Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului

MIRCEA GANGA

MATEMATICĂ

MANUAL PENTRU CLASA a XI-a

TRUNCHI COMUN + CURRICULUM DIFERENŢIAT
(3 ORE)

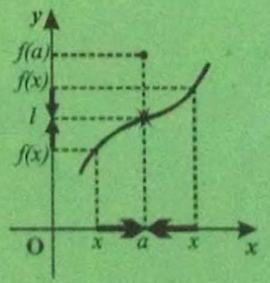
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\Delta = det(A) \neq 0$$

$$\bullet\ x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}$$

$$\bullet\ AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$



$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

EDITURA MATHPRESS

Ministerul Educaţiei şi Cercetării

MIRCEA GANGA

MATEMATICĂ

MANUAL PENTRU CLASA a XI-a

TRUNCHI COMUN + CURRICULUM DIFERENŢIAT
(4 ORE)

Filiera teoretică, profil real, specializarea matematică-informatică (TC + CD)
Filiera vocațională, profil militar MApN, specializarea matematică-informatică (CD)

EDITURA MATHPRESS

Manualul a fost aprobat prin Ordinul ministrului Educației și Cercetării nr. 4.446 din 19.06.2006 în urma evaluării calitative organizate de către Consiliul Național pentru Evaluarea și Difuzarea Manualelor și este realizat în conformitate cu programa analitică aprobată prin Ordin al ministrului Educației și Cercetării nr. 3252/13.02.2006.

Referenți: prof. gr. I ION NEDELCU, Colegiul Național „Mihai Viteazul", Ploiești
prof. gr. I RADU SIMION, Colegiul Național „Mihai Viteazul", Ploiești

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
GANGA, MIRCEA
Matematică : manual pentru clasa a XI-a : TC + CD (4 ore) / Mircea Ganga. - Ploiești : Mathpress, 2006
ISBN (10) 973-8222-23-0 ; ISBN (13) 978-973-8222-23-6

51(075.35)

Toate drepturile asupra acestei cărți aparțin editurii MATHPRESS.
Copyright © 2006 MATHPRESS
Editura MATHPRESS, Ploiești
Tel./fax: 0244.592.118
e-mail: ganga@ploiesti.astral.ro

Comenzi țară
Tel.: 0244.592.118
021.351.01.11
0722.745.965
0723.955.444

Comenzi București
Tel.: 021.327.26.23
021.351.01.11
0721.679.326

ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

0. PERMUTĂRI

Se defineşte conceptul de permutare de grad n. Mulţimea S_n împreună cu operaţia de compunere formează grup. Se arată că orice permutare este produs de transpoziţii. Se defineşte semnul unei permutări cu ajutorul inversiunilor permutării. O permutare este pară (impară) dacă are un număr par(impar) de inversiuni.

- **Definiţie. Compunerea permutărilor 5**
- **Transpoziţii. Proprietăţi 10**
- **Inversiuni. Semnul unei permutări 11**
- **Probleme propuse 18**

0.1. DEFINIŢIE. COMPUNEREA PERMUTĂRILOR

Cu noţiunea de permutare am făcut cunoştinţă încă din clasa a IX-a, la moduri de a defini o funcţie(modul sintetic) pe o mulţime finită A cu valori în ea însaşi, când fiecărui element din A, am asociat un unic element tot din A cu ajutorul unui tablou. Valorile funcţiei erau toate elementele lui A. Altfel spus, funcţia era o bijecţie de la A la A.
Anul următor de studiu, la capitolul "Metode de numărare", permutările sunt studiate mai detaliat, definindu-se riguros acest concept.

Definiţie. Fie $A=\{1,2,...,n\}, n\in\mathbb{N}^*$. Se numeşte permutare de gradul n (sau permutare a mulţimii A) orice funcţie bijectivă $f:A\to A$.

Notaţie. Notăm prin S_n mulţimea tuturor permutărilor de grad n ,adică $S_n=\{f:\{1,2,...n\}\to\{1,2,...n\}; f \text{ bijecţie}\}$. Elementele lui S_n le desemnăm prin litere mici ale alfabetului grec $\alpha,\beta,\gamma,...,\sigma,\tau,...$. Sub o formă dezvoltată şi sugestivă permutarea $\sigma\in S_n$ o reprezentăm prin tabloul cu două linii : **prima linie** conţine domeniul de definiţie(elementele se scriu în ordine crescătoare), iar **a doua linie** conţine mulţimea de valori ale funcţiei. Acesta este **tabloul de valori ale funcţiei**.

Deci $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & ... & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n)\end{pmatrix}\begin{matrix}\to \textbf{domeniul de definiţie}\\ \to \textbf{mulţimea de valori}\end{matrix}$ unde se indică , în extenso, toate imaginile : $\sigma:\begin{matrix}1 & 2 & ... & n\\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow\\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n),\end{matrix}$ unde $\sigma(i), i=\overline{1,n}$, sunt elementele $1,2,...,n$, eventual în altă ordine. Deci $\{\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(n)\}=\{1,2,...n\}$.

Exemple. **1) Există o singură permutare de gradul întâi şi anume** $e:\{1\}\to\{1\}, e(1)=1$, **dată sub forma** $e=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ **şi numită** permutarea identică.

2) Permutările de gradul doi sunt funcţiile $\sigma:\{1,2\}\to\{1,2\}, e=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$ (permutarea identică) şi $\sigma=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$.

3) Permutările de gradul trei sunt funcţiile $e,\sigma_i:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}, i=\overline{1,5}$, $e=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$ (permutarea identică), $\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}, \sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}, \sigma_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}, \sigma_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$, $\sigma_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$.

Permutările fiind funcţii are sens să vorbim de egalitatea a două permutări de acelaşi grad.

Definiţie. Fie $\sigma,\tau\in S_n$. Permutările σ,τ sunt egale şi scriem $\sigma=\tau$, dacă şi numai dacă $\sigma(i)=\tau(i), \forall i=\overline{1,n}$.

De aici deducem că $\alpha,\beta\in S_n$ sunt diferite, dacă există $i\in\{1,2,...,n\}$ astfel încât $\alpha(i)\neq\beta(i)$.

Cum $\alpha(i),\beta(i)$ sunt în linia a doua a tabloului, deducem că două permutări de gradul n diferă prin ordinea elementelor din linia a doua.

Exemplu. **Pentru** $\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}, \alpha,\beta\in S_3$ **avem** $\alpha\neq\beta$ **deoarece**

$\alpha(2)=2\neq3=\beta(2)$. **Se observă uşor că linia a două în** α **şi** β **are structura (123) şi respectiv (132). Se vede că ordinea elementelor 1,2,3 în cele două mulţimi este diferită !**

Cum fiecărei permutări $\sigma\in S_n$ i se asociază în mod unic linia a doua a tabloului, adică mulţimea ordonată $(\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(n))$ şi reciproc, fiecărei mulţimi ordonate formate cu elementele mulţimii $\{1,2,...,n\}$ i se asociază o unică permutare ce are a doua linie a tabloului această mulţime ordonată, avem o corespondenţă bijectivă între mulţimea S_n de permutări de grad n şi mulţimea permutărilor de n elemente ale mulţimii $\{1,2,...,n\}$.

Am stabilit, anul trecut următoarea

Teoremă. Numărul de permutări de grad $n, n\in\mathbb{N}^*$, este egal cu $P_n=n!=1\cdot2\cdot...\cdot n$.

Deci, $\text{card}(S_n)=n!$.

Cum permutările de grad n sunt funcţii are sens să vorbim de compunerea lor. Pe mulţimea S_n a permutărilor de grad n, vom defini **operaţia de compunere** (sau **produs**) a permutărilor. Fie $\sigma,\tau\in S_n$. Atunci $\sigma\circ\tau\in S_n$ (compunerea a două funcţii bijective este o funcţie bijectivă) se defineşte prin: $\sigma\circ\tau(k)=\sigma(\tau(k)), k=\overline{1,n}$.

Vom scrie în loc de $\sigma\circ\tau$ simplu $\sigma\tau$.

Dacă $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&...&n\\\sigma(1)&\sigma(2)&...&\sigma(n)\end{pmatrix}, \tau=\begin{pmatrix}1&2&...&n\\\tau(1)&\tau(2)&...&\tau(n)\end{pmatrix}$, atunci

$\sigma\tau=\begin{pmatrix}1&2&...&n\\\sigma(\tau(1))&\sigma(\tau(2))&...&\sigma(\tau(n))\end{pmatrix}$ după schema

$$\sigma\tau=\begin{pmatrix}1&2&...&j&...&n\\...&k&...\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&...&i&...&n\\...&j&...\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&...&i&...&n\\...&k&...\end{pmatrix}, \text{ adică}$$

$\sigma\tau(i)=\sigma(\tau(i))=\sigma(j)=k, i=\overline{1,n}, k\in\{1,2,...,n\}$.

Exemplu. **Pentru** $\sigma,\tau\in S_4$, $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$, $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$, **avem :**

$$\sigma\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}=\begin{matrix}1&2&3&4\\\tau\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\4&3&2&1\\\sigma\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\1&4&3&2\end{matrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}, \text{ unde}$$

$\sigma\tau(1)=\sigma(\tau(1))=\sigma(4)=1, \sigma\tau(2)=\sigma(\tau(2))=\sigma(3)=4$, $\sigma\tau(3)=\sigma(\tau(3))=\sigma(2)=3$ şi $\sigma\tau(4)=\sigma(\tau(4))=\sigma(1)=2$. Observaţi că în compunere prima dintre permutări care "acţionează" asupra elementelor 1,2,...,n este permutarea din dreapta, ultima în scrierea produsului $(\sigma\tau)$, adică τ, apoi intră în "acţiune" precedenta, adică σ.

Analog se calculează $\tau\sigma$ şi avem: $\tau\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}$. **Remarcaţi că $\sigma\tau\neq\tau\sigma$, deoarece, de exemplu $\sigma\tau(1)=1\neq\tau\sigma(1)=3$.**

Observaţii. **1)** Are sens să vorbim de compunerea permutărilor de acelaşi grad n. N-are sens să compunem permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\in S_3$ cu permutarea $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}\in S_4$ deoarece cele două permutări au grade diferite.

2) În cazul $n=2, n=3$ pentru a evidenţia compunerea elementelor din S_n se utilizează **tabla operaţiei de compunere**.

$\circ$	e	σ
e	$e\circ e$	$e\circ\sigma$
σ	$\sigma\circ e$	$\sigma\circ\sigma$

adică

$\circ$	e	σ
e	e	σ
σ	σ	e

dacă $n=2$;

$\circ$	e	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
e	e	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
σ_1	σ_1	e	σ_4	σ_5	σ_2	σ_3
σ_2	σ_2	σ_3	e	σ_1	σ_5	σ_4
σ_3	σ_3	σ_2	σ_5	σ_4	e	σ_1
σ_4	σ_4	σ_5	σ_1	e	σ_3	σ_2
σ_5	σ_5	σ_4	σ_3	σ_2	σ_1	e

dacă $n=3$.

Observați că $e\sigma=\sigma e=\sigma,\forall\sigma\in S_n$, unde $e\in S_n$ este permutarea identică.

3) Puterile unei permutări. Fie $\sigma\in S_n$, atunci $\sigma^2=\sigma\sigma,\sigma^3=\sigma^2\sigma$ și în general $\sigma^n=\begin{cases}e, n=0\\ \sigma^{n-1}\sigma, n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$. Cum $\text{card}(S_n)=n!$ (deci finit), se deduce că șirul $\sigma,\sigma^2,\sigma^3,...\sigma^n,...$ format cu elemente din S_n nu poate fi alcătuit din elemente distincte. Deci există $p<k,p,k\in\mathbb{N}^*$ pentru care $\sigma^p=\sigma^k$. Asupra acestei informații vom reveni.

Exemplu. Fie $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}\in S_4$. Să arătăm că există $p\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\sigma^p=e$.

R. Calculăm puterile succesive ale lui σ. Avem :

$$\sigma^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix},$$

$$\sigma^3=\sigma^2\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix},$$

$$\sigma^4=\sigma^3\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=e$$

. Deci $p=4$. Observați că $\sigma^5=\sigma^4\sigma=e\sigma=\sigma,\sigma^6=\sigma^5\cdot\sigma=\sigma\cdot\sigma=\sigma^2$ și mai general $\sigma^{4k}=e,\sigma^{4k+1}=\sigma,\sigma^{4k+2}=\sigma^2$, $\sigma^{4k+3}=\sigma^3,k\in\mathbb{N}$.

4) Dacă $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\in S_n$, atunci $\sigma_3\sigma_1\sigma_2\in S_n$ și $\sigma_3\sigma_1\sigma_2(i)=\sigma_3(\sigma_1(\sigma_2(i)))$, $\forall i=\overline{1,n}$. Mai general are sens să vorbim de produsul finit de permutări de același grad !

Proprietăți ale compunerii permutărilor

Să reținem că se pot compune doar permutări de același grad. Am văzut că dacă $\sigma,\tau\in S_n$, atunci $\sigma\tau\in S_n$. Se spune că operația de compunere a permutărilor de grad n este **o lege internă** sau încă **o lege de compoziție pe S_n**. Acest concept va fi dezvoltat anul viitor la algebră. Prezentăm în continuare alte proprietăți ale operației de compunere a permutărilor.

P1 (Asociativitatea compunerii) $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma),\forall\alpha,\beta,\gamma\in S_n$.

P2 (Elementul neutru) Există $e\in S_n$, e permutarea identică, cu proprietatea că $e\sigma=\sigma e=\sigma,\forall\sigma\in S_n$.

P3 (Elemente inversabile) Orice element $\sigma\in S_n$ are un invers notat $\sigma^{-1}\in S_n$, cu proprietatea $\sigma\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\sigma=e$.

Demonstrație P1. Aceasta rezultă din faptul că operația de compunere a funcțiilor este asociativă.

P2. Se spune că e este **element neutru pentru operația de compunere a permutărilor**. Permutarea e este funcția identică a mulțimii $\{1,2,...,n\}$ care se știe că are această proprietate pe mulțimea tuturor funcțiilor definite pe $\{1,2,...,n\}$ cu valori $\{1,2,...,n\}$.

P3. În acest caz σ^{-1} este inversa funcției $\sigma\in S_n$. Să observăm că σ^{-1} există deoarece σ este bijectivă(deci inversabilă). Permutarea inversă a lui σ, adică σ^{-1} se obține din σ schimbând linia de sus cu cea de jos din tabelul care definește pe σ, având grijă ca în linia de sus să dispunem elementele în ordine crescătoare (σ^{-1} este funcția care acționează "invers" decât σ). Într-o diagramă cu săgeți pentru a obține din σ pe σ^{-1} se schimbă sensul săgeților deoarece $\sigma^{-1}(j)=i\Leftrightarrow\sigma(i)=j$. Acum se verifică ușor că $\sigma\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\sigma=e$. ■

Exemplu Dacă $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&5&1&2\end{pmatrix}$, atunci $\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&1&2&3\end{pmatrix}$. Prin σ elementul 1 este dus în 3, iar prin σ^{-1} elementul 3 este dus în 1; prin σ numărul 2 este dus în 4, iar prin σ^{-1} numărul 4 este dus în 2, etc..

Se spune că perechea $(S_n,\circ)$ cu proprietățile **P1, P2, P3** formează un **grup**, numit **grupul permutărilor de grad** n sau **grupul simetric de grad** n. Cum pentru $n\geq 3$, există $\alpha,\beta\in S_n$ cu $\alpha\beta\neq\beta\alpha$ se spune că grupul este necomutativ. Dacă $n=2$, atunci $(S_2,\circ)$ este comutativ. Numărul de elemente din S_n se numește **ordinul grupului**. Avem $\text{ord}(S_n)=n!$. Am văzut că dacă $\sigma\in S_n$, atunci $\sigma,\sigma^2,...,\sigma^n...\in S_n$. Cum $\text{ord}(S_n)=n!$, deducem că există $p<k,p,k\in\mathbb{N}^*$ cu proprietatea $\sigma^p=\sigma^k$. Compunând în această egalitate cu $(\sigma^p)^{-1}=\sigma^{-p}$ rezultă $e=\sigma^{k-p}$. Deci pentru orice $\sigma\in S_n$ există $l\in\mathbb{N}$ cu proprietatea $\sigma^l=e$. Mai mult cel mai mic $l\in\mathbb{N}$ cu proprietatea $\sigma^l=e$ se numește **ordinul permutării** σ. Se notează $\text{ord}(\sigma)=l$. Se demonstrează că ordinul lui σ divide ordinul grupului S_n!

0.2. TRANSPOZIȚII. PROPRIETĂȚI

În mulțimea permutărilor de grad n considerăm o submulțime particulară, formată din acele permutări care schimbă între ele doar două elemente, conservându-le pe celelalte. Mai precis are loc următoarea:

Definiție. Fie $i, j \in \{1,2,...n\}$ cu $i \neq j$ și $\tau_{ij} \in S_n$,

$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 1\,2\,...\,i-1 & i & j-1 & j & j+1\,...\,n \\ 1\,2\,...\,i-1 & j & j-1 & i & j+1\,...\,n \end{pmatrix}$. Permutarea τ_{ij} se numește **transpoziție de grad n**.

Pentru simplitate în loc de τ_{ij} scriem (ij) (citim:transpoziția ij). Observăm că transpoziția (ij) permută doar numerele i și j, celelalte elemente rămânând pe loc.

Exemplu. **În S_4 următoarele permutări sunt transpoziții:**

$(12) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $(13) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $(24) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Proprietăți ale transpozițiilor

Transpozițiile de grad n sunt caracterizate de următoarea:

Teoremă. Dacă $(ij) \in S_n$, atunci:

1) $(ij) = (ji)$; **2)** $(ij)^2 = e$; **3)** $(ij)^{-1} = (ij)$.

Demonstrație. **1)** Egalitatea este adevărată deoarece în transpozițiile $(ij), (ji)$ se permută doar elementele i și j.

2) Verificăm egalitatea punctuală a celor două funcții. Avem:

$(ij)(ij)(i) = (ij)(j) = i = e(i)$, $(ij)(ij)(j) = (ij)(i) = j = e(j)$, și în fine pentru $k \neq i, k \neq j$, $k \in \{1,2,...n\}$ obținem $(ij)(ij)(k) = (ij)(k) = k = e(k)$.

3) În egalitatea $(ij)(ij) = e$, compunem cu $(ij)^{-1}$ și avem $(ij) = (ij)^{-1}$. ■

Observații. **1)** Din egalitatea $(ij) = (ji)$, se deduce că numărul tuturor transpozițiilor de grad n este egal cu numărul perechilor ordonate (i, j) cu $1 \leq i < j \leq n$, care este egal cu $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

2) Din **2)** rezultă că orice transpoziție are ordinul 2.

Următorul rezultat stabilește o legătură între o permutare din S_n și transpoziții din S_n.

Mai precis are loc următoarea:

Teoremă. Orice permutare de grad n se poate scrie ca un produs de transpoziții din S_n.

Demonstrație. Prin inducție matematică. Presupunem că orice permutare din S_{n-1} este un produs de transpoziții. Fie $\sigma \in S_n$. Presupunem că $\sigma(n) = k$. Dacă $\tau \in S_n$ este transpoziția (nk) avem $\tau\sigma(n) = \tau(\sigma(n)) = \tau(k) = n$, de unde rezultă că $\tau\sigma \in S_{n-1}$ și din ipoteza de inducție rezultă că există transpozițiile $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_{r-1}$, de gradul $n-1$, care pot fi considerate de grad n transformând pe n în el însuși, astfel că $\tau\sigma = \tau_1\tau_2...\tau_{r-1}$, iar de aici $\sigma = \tau^{-1}\tau_1\tau_2...\tau_{r-1}$. ■

Observație. Descompunerea unei permutări în produs de transpoziții nu este unică.

Exemplu. **Fie $\sigma \in S_5, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Realizăm o primă descompunere a lui σ în produs de transpoziții. Observăm că $\sigma(1) = 2$. Luăm transpoziția (12) și considerăm permutarea $\sigma_1 = (12)\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ (σ_1 se poate gândi ca o permutare de gradul 4 dacă se observă că σ_1 duce pe 1 în el însuși). Cum $\sigma_1(2) = 3$ se consideră transpoziția (23) și cu ea construim permutarea σ_2 dată de $\sigma_2 = (23)\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (45)$. Deci $\sigma_2 = (23)\sigma_1 = (23)(12)\sigma$ sau $(45) = (23)(12)\sigma$. Pentru a obține pe σ în funcție de transpoziții, în ultima egalitate compunem cu (23) și apoi cu (12) (ținând seamă de $(ij)^2 = e$) și avem: $\sigma = (12)(23)(45)$. Aceași permutare σ se mai poate descompune și sub forma $\sigma = (13)(12)(45) = (13)(41)(42)(41)(45) = ...$**

0.3. INVERSIUNI. SEMNUL UNEI PERMUTĂRI

Are loc următoarea

Definiție. Fie $\sigma \in S_n$ și $i < j, i, j \in \{1,2,...,n\}$. Dacă $\sigma(i) > \sigma(j)$, atunci perechea (i, j) se numește **inversiune** a permutării σ.

Numărul tuturor inversiunilor permutării σ se notează cu $m(\sigma)$.

Exemplu. **Fie $\sigma \in S_5, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Fixăm $i = 1$, iar $j \in \{2,3,4,5\}$. Avem următoarele inversiuni: $(1,2)$ (deoarece $\sigma(1) = 5 > \sigma(2) = 3$), $(1,3)$ (deoarece $\sigma(1) = 5 > \sigma(3) = 1$), $(1,4)$ (pentru că $\sigma(1) = 5 > \sigma(4) = 4$), $(1,5)$ ($\sigma(1) = 5 > \sigma(5) = 2$). Fixăm $i = 2$, iar $j \in \{3,4,5\}$.**

Găsim inversiunile: $(2,3),(2,5)$. **Dacă** $i=3$, **iar** $j\in\{4,5\}$ **nu avem nici o inversiune (pentru că** $\sigma(3)=1<\sigma(4)=4$ **şi** $\sigma(3)=1<\sigma(5)=2$ **). Dacă** $i=4$, **atunci** $j=5$ **şi din** $\sigma(4)=4>\sigma(5)=2$ **rezultă că** $(4,5)$ **este inversiune pentru** σ. **În concluzie inversiunile permutării** σ **sunt:** $(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),\ (2,3),(2,5),(4,5)$ **şi deci** $m(\sigma)=7$

Observaţie. O permutare $\sigma\in S_n$ poate avea cel mult $C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$ inversiuni, deoarece acesta este numărul perechilor (i,j) cu $1\le i<j\le n$.

Permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n-1 & n\\ n & n-1 & \dots & 2 & 1\end{pmatrix}$ are exact $\dfrac{n(n-1)}{2}$ inversiuni. Acestea sunt:

- $(1,2),(1,3),\dots,(1,n)$ în număr de $n-1$; $(i=1,\ j\in\{2,\dots,n\})$;
- $(2,3),\dots,(2,n)$ în număr de $n-2$; $(i=2,\ j\in\{3,\dots,n\})$;

$\vdots$

- $(n-1,n)$, o inversiune $(i=n-1,\ j=n)$.

Deci numărul total de inversiuni este egal cu $m(\sigma)=(n-1)+(n-2)+\dots+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$ şi reprezintă numărul maxim de inversiuni posibile. Cum permutarea identică $e\in S_n$ are zero inversiuni, deducem că pentru orice permutare $\sigma\in S_n$ avem $0\le m(\sigma)\le\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Definiţii. Fie $\sigma\in S_n$.

1) Se numeşte signatura(sau semnul) permutării σ, numărul $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{m(\sigma)}$, unde $m(\sigma)$ este numărul de inversiuni ale permutării σ.

2) Permutarea σ se numeşte pară dacă $\varepsilon(\sigma)=1$ şi respectiv impară dacă $\varepsilon(\sigma)=-1$.

Exemple. **1) Permutarea identică** $e\in S_n$ **are** $m(\sigma)=0$ **(nu are nici o inversiune) şi deci** $\varepsilon(e)=(-1)^0=1$, **ceea ce arată că permutarea identică este o permutare pară.**

2) Fie $\sigma\in S_4,\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$ **cu** $m(\sigma)=5$ **şi deci** σ **are signatura** $\varepsilon(\sigma)=(-1)^5=-1$. **Prin urmare permutarea** σ **este impară. Permutarea** $(13)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$ **are** $m((13))=3$ **şi deci** $\varepsilon((13))=(-1)^3=-1$, **adică transpoziţia** (13) **este impară.**

Observaţie Se arată că orice transpoziţie de grad n, $(ij)\in S_n$ este impară, deoarece

$\varepsilon((ij))=-1$. Dacă $\tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$, atunci $m(\tau)=4$ şi $\varepsilon(\tau)=(-1)^4=1$. Deci τ este o permutare pară.

Aplicaţii. **1) Numărul** $d_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\sum_{\sigma\in S_2}\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}$ **se numeşte determinant de ordin 2, iar numerele** $\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}$ **pentru** $\sigma\in S_2$ **se numesc termenii determinantului. Cum în** S_2 **avem doar două permutări** $e=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ **şi** $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, **atunci** $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Observăm că fiecare termen al determinantului de ordin doi conţine un produs de elemente situate pe linii şi coloane diferite(a_{ij} **este situat pe linia** i **şi coloana** j**).**

2) Numărul $d_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\sum_{\sigma\in S_3}\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}$ **se numeşte determinant de ordin 3;** $\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}$ **se numeşte termen al determinantului, format din produs de elemente situate pe linii şi coloane diferite(în** a_{ij}, **primul indice** (i) **este pentru linie, iar al doilea** $(\sigma(i))$ **este pentru coloană). Descrieţi termenii lui** d_3, **explicitând cele şase permutări din** S_3.

Observaţie. Asociind fiecărei permutări $\sigma\in S_n$, numărul -1 sau 1, am pus în evidenţă o funcţie $\varepsilon:S_n\to\{-1,1\}$, numită **funcţia signatură**(sau **semn**). Dăm în continuare un mod practic de a calcula signatura unei permutări $\sigma\in S_n$ cu ajutorul valorilor lui σ. Mai precis are loc următoarea:

Teoremă. Fie $\sigma\in S_n$. Atunci $\varepsilon(\sigma)=\prod_{1\le i<j\le n}\dfrac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$.

Demonstraţie. Fie $\sigma(j)=k$ şi $\sigma(i)=l$. Atunci $k\ne l$ (σ este bijectivă). Pentru $k>l$ avem $\sigma(j)-\sigma(i)=k-l$, care se va simplifica cu numitorul $k-l$ şi se obţine factorul 1, iar pentru $k<l$ după simplificare cu factorul $l-k$ de la numitor se obţine factorul (-1). Efectuând toate simplificările obţinem:

$$\prod_{1\le i\le j\le n}\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}=(-1)^{m(\sigma)}=\varepsilon(\sigma).\ \blacksquare$$

Exemplu. Fie $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$. Avem : $\varepsilon(\sigma)=\dfrac{4-3}{2-1}\cdot\dfrac{2-3}{3-1}\cdot\dfrac{1-3}{4-1}\cdot\dfrac{2-4}{3-2}\cdot\dfrac{1-4}{4-2}\cdot\dfrac{1-2}{4-3}=(-1)^5=-1$.

Comportarea funcţiei semn faţă de compunerea permutărilor este dată de următoarea:

Teoremă. 1) $\varepsilon(\sigma\tau)=\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau),\forall\sigma,\tau\in S_n$.

Signatura produsului este egală cu produsul signaturilor.

2) $\varepsilon\left(\sigma^{-1}\right)=\varepsilon(\sigma)$.

O permutare și inversa ei au același semn.

Demonstrație. **1)** Ținând seama de teorema precedentă avem:

$$\varepsilon(\sigma\tau)=\prod_{1\le i<j\le n}\frac{\sigma\tau(j)-\sigma\tau(i)}{j-i}=\prod_{1\le i<j\le n}\frac{\sigma\tau(j)-\sigma\tau(i)}{\tau(j)-\tau(i)}\cdot\prod_{1\le i<j\le n}\frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i}=$$

$$=\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau).$$

2) Din $\sigma\sigma^{-1}=e$ și rezultatul **1)** se deduce $\varepsilon\left(\sigma\sigma^{-1}\right)=\varepsilon(e)$, adică $\varepsilon(\sigma)\varepsilon\left(\sigma^{-1}\right)=1$.

Această egalitate arată că $\varepsilon(\sigma)=\varepsilon\left(\sigma^{-1}\right)=-1$ sau $\varepsilon(\sigma)=\varepsilon\left(\sigma^{-1}\right)=1$. ■

Corolar. Fie $\sigma,\tau\in S_n$.
1) Dacă σ,τ au același semn, atunci $\sigma\tau$ este pară.
2) Dacă σ,τ au semne diferite, atunci $\sigma\tau$ este impară.

Legătura între o permutare și o parte din transpoziții este dată de următoarea:

Teoremă. Orice permutare de grad n se poate scrie ca un produs de transpoziții, în număr par dacă permutarea este pară și în număr impar dacă permutarea este impară.

Demonstrație Partea din teoremă relativă la descompunerea unei permutări în produs de transpoziții s-a demonstrat mai sus. Partea a doua a teoremei rezultă din faptul că orice transpoziție este o permutare impară, via semnul produsului de permutări. Într-adevăr, dacă $\sigma\in S_n,\sigma=\tau_1\tau_2\ldots\tau_k$, atunci $\varepsilon(\sigma)=\varepsilon(\tau_1)\varepsilon(\tau_2)\ldots\varepsilon(\tau_k)=(-1)^k$. Dacă σ este pară, atunci $\varepsilon(\sigma)=1$ și k este un număr par, iar dacă σ este impară, atunci $\varepsilon(\sigma)=-1$ ceea ce atrage k număr impar. ■

Un ultim rezultat care precizează că în S_n avem același număr de permutări pare și permutări impare. Se obișnuește să se noteze $A_n=\{\sigma\in S_n\,|\,\varepsilon(\sigma)=1\}$. Deci în A_n se află toate permutările pare de grad n, iar în S_n-A_n se află toate permutările impare de grad n. Are loc următoarea:

Teoremă. Numărul de permutări pare de grad n este egal cu numărul de permutări impare de grad n.

$$\operatorname{card}(A_n)=\operatorname{card}(S_n-A_n)=\frac{n!}{2},n\in\mathbb{N},n\ge 2.$$

Demonstrație Fie transpoziția $(12)\in S_n$. Definim funcția $f:A_n\to S_n-A_n$ prin $f(\sigma)=\sigma(12)$. Funcția este injectivă, deoarece din $f(\sigma_1)=f(\sigma_2),\sigma_1,\sigma_2\in S_n$, rezultă $\sigma_1(12)=\sigma_2(12)$, iar de aici $\sigma_1=\sigma_2$. Funcția f este și surjectivă deoarece dacă $\beta\in S_n-A_n$, cu $\varepsilon(\beta)=-1$, atunci $\beta(12)\in A_n\left(\varepsilon(\beta(12))=\varepsilon(\beta)\varepsilon(12)=\right.$ $=(-1)(-1)=1)$ și $f(\beta(12))=\beta$. Așadar, f este bijectivă.

Deci, A_n și S_n-A_n au același număr de elemente. Cum $S_n=A_n\cup(S_n-A_n)$ și $A_n\cap(S_n-A_n)=\varnothing$, deducem $\operatorname{card}(A_n)=\operatorname{card}(S_n-A_n)=\frac{n!}{2}$. ■

Observație Ținând seamă de această ultimă teoremă, deducem că în descrierea termenilor determinantului de ordin doi și trei, jumătate din termeni apar cu plus (dacă σ este pară, atunci $\varepsilon(\sigma)=1$), iar ceilalți termeni cu minus(dacă σ este impară, atunci $\varepsilon(\sigma)=-1$).

Probleme rezolvate

1 Să se determine cel mai mic număr $p\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\sigma^p=e$, unde $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$.

R **Se calculează puterile succesive ale lui σ și avem:** $\sigma^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=e$. **Deci** $p=2$.

2 Fie $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&4&5&2\end{pmatrix},\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&4&3&1\end{pmatrix},\varphi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&2&3&4\end{pmatrix}$.

1) Să se calculeze σ^{-1},τ^{-1} și apoi $\sigma^{2006},\tau^{2007}$.

2) Să se rezolve ecuațiile: a) $\sigma x=\tau$; b) $\sigma x\tau=\varphi$; c) $\sigma^{2006}x=\tau^{2007}$; d) $\sigma x=x\sigma$.

R **1) Avem** $\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&1&3&4\end{pmatrix},\tau^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&4&3&2\end{pmatrix}$. **Calculăm cel mai mic $p\in\mathbb{N}^*$ pentru care $\sigma^p=e$. Avem succesiv**

$$\sigma^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&4&5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&4&5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&5&2&1\end{pmatrix},$$

$$\sigma^3=\sigma^2\cdot\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&5&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&4&5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&2&1&3\end{pmatrix},$$

$\sigma^4=\sigma^3\cdot\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&1&3&4\end{pmatrix}$, $\sigma^5=\sigma^4\cdot\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5\end{pmatrix}=e$.

Scriem exponentul lui σ^{2006} utilizând împărțirea prin 5 pe $\mathbb{Z}$ și avem $2006=5\cdot401+1$.

Așadar $\sigma^{2006}=\sigma^{5\cdot401+1}=\left(\sigma^5\right)^{401}\sigma=e\cdot\sigma=\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&4&5&2\end{pmatrix}$. Procedând analog pentru τ găsim: $\tau^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&3&4&2\end{pmatrix}$, $\tau^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&4&3&5\end{pmatrix}$, $\tau^4=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&3&4&1\end{pmatrix}$,

$\tau^5=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&4&3&2\end{pmatrix}$, $\tau^6=e$ și $\tau^{2007}=\tau^{6\cdot334+3}=\left(\tau^6\right)^{334}\cdot\tau^3=e\cdot\tau^3=\tau^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&4&3&5\end{pmatrix}$.

2) a) Ecuația $\sigma x=\tau$, prin compunerea la stânga cu σ^{-1}, devine:

$x=\sigma^{-1}\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&4&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&3&2&1\end{pmatrix}$, care este tocmai soluția ecuației.

b) Se compune la stânga cu σ^{-1} și la dreapta cu τ^{-1} și ecuația devine

$\sigma^{-1}(\sigma x\tau)\tau^{-1}=\sigma^{-1}\varphi\tau^{-1}\Leftrightarrow\left(\sigma^{-1}\sigma\right)x\left(\tau\tau^{-1}\right)=\sigma^{-1}\varphi\tau^{-1}\Leftrightarrow exe=\sigma^{-1}\varphi\tau^{-1}\Leftrightarrow x=\sigma^{-1}\varphi\tau^{-1}$

$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&1&5&2\end{pmatrix}$.

c) Utilizând 1) $\sigma^{2006}=\sigma$ și $\tau^{2007}=\tau^3$ se obține o ecuație de tipul a).

d) Alegem permutarea necunoscută x de forma $x=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\a&b&c&d&e\end{pmatrix}$. Analizăm cazurile:

1) $a=1$. Egalitatea $\sigma x=x\sigma$ o calculăm în 1 și rezultă $\sigma x(1)=x\sigma(1)$ sau $\sigma(1)=x(3)$ sau $3=c$. Egalitatea $\sigma x=x\sigma$ o calculăm în valoarea nou obținută 3. Deci $\sigma x(3)=x\sigma(3)$ sau $\sigma(3)=x(4)$, adică $4=d$. Din nou luăm $\sigma x(4)=x\sigma(4)$, adică $\sigma(4)=x(5),5=e$. În fine $\sigma x(5)=x\sigma(5)$, adică $\sigma(5)=x(2)$, adică $2=b$. Am găsim $x=e$, permutarea identică.

2) $a=2$. Avem $\sigma x(1)=x\sigma(1)\Leftrightarrow\sigma(2)=x(3)$, adică $c=1$. Luăm acum $\sigma x(3)=x\sigma(3)\Leftrightarrow$ $\sigma(1)=x(4)\Leftrightarrow3=d$. Avem $\sigma x(4)=x\sigma(4)\Leftrightarrow\sigma(3)=x(5)\Leftrightarrow4=c$. În fine $\sigma x(5)=x\sigma(5)\Leftrightarrow\sigma(4)=x(2)\Leftrightarrow5=b$. Deci permutarea $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&1&3&4\end{pmatrix}$ este soluție a ecuației.

3) $a=3$. Găsim soluția $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&4&5&2\end{pmatrix}$.

4) $a=4$. Avem soluția $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&5&2&1\end{pmatrix}$.

5) $a=5$. Obținem soluția $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&2&1&3\end{pmatrix}$. De observat că soluțiile ecuației sunt puterile lui $\sigma:e,\sigma,\sigma^2,\sigma^3,\sigma^4$.

REZUMATUL CAPITOLULUI

Noțiuni	Definiție	Notație. Descriere
Permutarea de grad n	$A_n=\{1,2,...,n\}$ $\sigma:A_n\to A_n$ bijectivă	$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&...&n\\\sigma(1)&\sigma(2)&...&\sigma(n)\end{pmatrix}$ $S_n=\{\sigma;\sigma$ permutare de grad $n\}$
Numărul de permutări de grad n	$\lvert S_n\rvert$	$\lvert S_n\rvert=1\cdot2\cdot...\cdot n=n!$
Compunerea permutărilor	$\sigma,\tau\in S_n\Rightarrow\sigma\circ\tau\in S_n(\sigma\tau\in S_n)$	$\sigma\tau(i)=\sigma(\tau(i)),\forall i=\overline{1,n}$
Puterile unei permutări	$\sigma\in S_n,\sigma^k=\begin{cases}e,k=0\\\sigma^{k-1}\sigma,k\in\mathbb{N}*\end{cases}$	$e=$ permutarea identică $e=\begin{pmatrix}1&2&...&n\\1&2&...&n\end{pmatrix}$
Proprietățile compunerii	1) (Asociativitatea) $(\sigma\tau)\delta=\sigma(\tau\delta),\forall\sigma,\tau,\delta\in S_n$ 2) (Element neutru) $\exists e\in S_n$, astfel încât $e\sigma=\sigma e=\sigma,\forall\sigma\in S_n$ 3)(Elemente inversabile) $\sigma\in S_n,\exists\sigma^{-1}\in S_n$ astfel încât $\sigma\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\sigma=e$	$(S_n,\circ)$ cu 1), 2), 3) formează grupul permutărilor de grad n
Transpoziție de grad n	$\tau_{ij}(k)=\begin{cases}k,k\neq i,k\neq j\\i,k=j\\j,k=i\end{cases}$	$\tau_{ij}=\begin{pmatrix}1&2&...&i&...&j&...&n\\1&2&...&j&...&i&...&n\end{pmatrix}$ $\tau_{ij}=(ij)$
Proprietăți ale transpozițiilor	1) $(ij)=(ji)$; 2) $(ij)^2=e$; 3) $(ij)^{-1}=(ij)$	
Inversiune	$\sigma\in S_n,i<j,i,j\in A_n$ (i,j) este inversiune dacă $\sigma(i)>\sigma(j)$	$m(\sigma)$ numărul tuturor inversiunilor lui σ
Signatura unei permutări	$\sigma\in S_n,\varepsilon(\sigma)=(-1)^{m(\sigma)}$	$\varepsilon(\sigma)=-1\Rightarrow\sigma$ este permutare impară ($\varepsilon(ij)=-1\Rightarrow(ij)$ impară) $\varepsilon(\sigma)=1\Rightarrow\sigma$ este permutare pară ($\varepsilon(e)=1\Rightarrow e$ permutare pară)
Produs de permutări		σ,τ de același semn $\Rightarrow\sigma\tau$ pară σ,τ de semne contrare $\Rightarrow\sigma\tau$ impară

Probleme propuse

1. Fie $\sigma,\tau\in S_6, \sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&i&2&1&j&4\end{pmatrix}$, $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\k&5&l&1&6&m\end{pmatrix}$. Să se determine i,j,k,l,m pentru ca $\sigma=\tau$.

2. Scrieți permutările $\sigma\in S_4$ cu proprietatea $\sigma(1)=1$; scrieți permutările $\sigma\in S_4$ cu proprietățile $\sigma(1)=1, \sigma(2)=3$.

3. Să se calculeze (dacă este posibil) $\sigma\tau$ și $\tau\sigma$ în cazurile:

1) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}, \tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$; 2) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}, \tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$; 3) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}$, $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$; 4) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&1&5&3&2\end{pmatrix}, \tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&3&2&1\end{pmatrix}$; 5) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$, $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&2&3&1&4\end{pmatrix}$; 6) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&5&4&2&1&6\end{pmatrix}, \tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&2&3&5&1&4\end{pmatrix}$.

4. Să se arate că există $p\in\mathbb{N}^*$ pentru care $\sigma^p=e$, în cazurile: 1) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$; 2) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$; 3) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&4&2&3\end{pmatrix}$.

5. Să se calculeze puterile $\sigma^2,\sigma^3,\ldots$, dacă: 1) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$; 2) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$; 3) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&1&3&5&2\end{pmatrix}$; 4) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&6&1&5&2&4\end{pmatrix}$. Determinați apoi $\sigma^{100},\sigma^{201},\sigma^{302},\sigma^{403},\sigma^{504}$.

6. Fie $G=\{e,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$, unde $e=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$, $\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$, $\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$, $\sigma_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$. Realizați tabla operației de compunere pentru G. Ce constatați ?

7. Să se determine n dacă numărul transpozițiilor de grad n este egal cu 55.

8. Care din următoarele permutări de grad 4 sunt transpoziții:

1) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}$.

9. Să se scrie următoarele permutări ca produs de transpoziții:

1) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$; 2) $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$; 3) $\varphi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&2&3&1\end{pmatrix}$.

10. Fie transpozițiile $(12),(13),\ldots,(1,n)\in S_n$. Arătați că orice transpoziție $(ij)\in S_n$ se poate scrie ca produs de transpoziții dintre cele de mai sus.

11. Determinați numărul de inversiuni și signatura pentru fiecare din permutările:

1) $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&3&1&2\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&5&3&4&1&2\end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix}1&2&\ldots&k-1&k&k+1&\ldots&n\\2&3&\ldots&k&1&k+1&\ldots&n\end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&\ldots&n&n+1&n+2&\ldots&2n\\2&4&6&8&\ldots&2n&1&3&\ldots&2n-1\end{pmatrix}$.

12. a) Dacă $\sigma\in S_n$ are proprietatea că $\forall i<j, i,j\in\{1,2,\ldots,n\}, \sigma(i)<\sigma(j)$, atunci $\sigma=e$.

b) Dacă $\sigma\in S_n$ are proprietatea $\forall i<j, i,j\in\{1,2,\ldots,n\}, \sigma(i)>\sigma(j)$, atunci $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&\ldots&n\\n&n-1&\ldots&1\end{pmatrix}$.

13. Fie $\sigma\in S_{10}, \sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\4&7&i&9&8&j&10&1&k&5\end{pmatrix}$. Să se determine i,j,k astfel ca numărul de inversiuni din σ să fie maxim.

14. a) Determinați permutările pare de forma $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&i&j&2&5&k\end{pmatrix}$.

b) Determinați permutările impare de forma $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&i&j&5&k\end{pmatrix}$.

15. Numărul $d_n=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{n1}&a_{n2}&\ldots&a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)}$, $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$, se numește determinant de ordin n, iar numerele $\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)}$ pentru $\sigma\in S_n$ se numesc termenii determinantului.

1) Pentru d_4 determinați semnul fiecăruia dintre termenii: a) $\varepsilon(\sigma)a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}$;

b) $\varepsilon(\tau)a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$; c) $\varepsilon(\varphi)a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$.

2) Pentru d_5 determinați semnul fiecăruia dintre termenii: a) $\varepsilon(\sigma)a_{12}a_{23}a_{35}a_{44}a_{51}$;

b) $\varepsilon(\tau)a_{15}a_{24}a_{32}a_{43}a_{51}$; c) $\varepsilon(\varphi)a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}a_{55}$.

16. Folosind definiția determinantului de ordin n din problema 15, calculați determinanții

1) $d_3=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&2&3\end{vmatrix}$; 2) $d_3=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&2&1\\3&2&1\end{vmatrix}$; 3) $d_3=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{vmatrix}$; 4) $d_4=\begin{vmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\-1&1&-1&1\\1&0&1&0\end{vmatrix}$.

17. Să se arate că nu există nici o permutare $\sigma\in S_4$ pentru care $\sigma^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$.

18. Să se rezolve ecuațiile: $\sigma x=\tau, x\sigma=\tau$ în cazurile:

1) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}, \tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$; 2) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&1&5&2\end{pmatrix}, \tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&4&3&1\end{pmatrix}$;

3) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&5&1&6&4&3\end{pmatrix}, \tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&5&1&6&4&2\end{pmatrix}$.

19. Să se rezolve ecuația $\sigma x\tau=\varphi$ în cazurile:

1) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}, \tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}, \varphi=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$;

2) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}, \tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}, \varphi=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}$;

3) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&1&2&4\end{pmatrix}, \tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&2&5&1&3\end{pmatrix}, \varphi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&3&2&1\end{pmatrix}$.

20. Să se rezolve ecuațiile: 1) $x^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$; 2) $x^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$.

21. Să se rezolve ecuația $\sigma x = x\sigma$, unde $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

22. Fie numerele $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

1) Să se determine permutarea $\sigma \in S_n$ pentru care suma

$S_\sigma = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_{\sigma(i)}}$, ia valoarea maximă.

2) Să se determine permutarea $\sigma \in S_n$ pentru care suma

$S_\sigma = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_{\sigma(i)}}$, ia valoarea minimă.

3) Să se determine permutarea $\sigma \in S_n$ pentru care suma

$S_\sigma = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i a_{\sigma(i)}}$, este maximă și respectiv minimă.

23. Se consideră numerele $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, $0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_n$. Să se determine permutarea $\sigma \in S_n$ pentru care suma $S_\sigma = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)}$ este maximă.

24. Să se determine $\sigma \in S_n, n \geq 3$ pentru care $1+\sigma(1), +2+\sigma(2), \ldots, n+\sigma(n)$ formează o progresie aritmetică.

25. O permutare $\sigma \in S_n$, se numește ciclu de lungime k dacă există $x_1, x_2, \ldots, x_k$ astfel încât $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & x_1 & \ldots & x_2 & \ldots & x_{k-1} & \ldots & x_k & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & x_2 & \ldots & x_3 & \ldots & x_k & \ldots & x_1 & \ldots & n \end{pmatrix}$ și se notează $\sigma = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

Determinați ciclurile din permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 2 & 4 & 9 & 8 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ și scrieți permutarea σ ca produs de cicluri. Arătați că ciclul $(1,2,\ldots,n)$ este produsul de transpoziții $(1,n)(1,n-1)\ldots(1,3)(1,2)$. Ce reprezintă produsele $(1,4)(1,3)(1,2), (1,5)(1,4)(1,3)(1,2)$?

1. MATRICE

În acest capitol analizăm conceptul de matrice și anumite operații algebrice cu matrice. De asemenea, sunt introduse matricele ca structuri în care se pot stoca și prelucra date. Operațiilor de adunare și înmulțire de pe $\mathbb{C}$ li se asociază operații similare pentru adunarea matricelor și respectiv înmulțirea cu scalari a matricelor. Conceptul matematic care a generat noțiunea de matrice și a perfectat operațiile cu matrice este cel de aplicație liniară. Se definește conceptul de înmulțire a două matrice, care n-au corespondent între operațiile pe $\mathbb{C}$. Se dau proprietăți fundamentale pentru operațiile cu matrice.

Numeroase aplicații practice prezentate vin să sublinieze importanța cunoașterii operațiilor cu matrice în rezolvarea multor probleme din viața cotidiană.

Istorie **Matricele au fost descoperite de doi matematicieni englezi Arthur Cayley (1821-1895 – cu studii la celebrul „Trinity College" în Cambridge) și James Joseph Sylvester (1814-1897 – în 1878 creează celebra „The American Journal of Mathematics") colaborator al lui Cayley, el fiind cel care în 1850 folosește termenul de matrice (termenul latin fiind „matrix" pentru matcă). Lor li se adaugă W. Hamilton (1805-1865) și A. Cauchy (1789-1857). În matematică o matrice este un „container" de informație evaluabilă.**

- Matrice 21
- Operații cu matrice 29
- Probleme propuse 58
- Teste de evaluare 70

1.1. MATRICE

Tabel de tip matriceal

Poate nici un capitol al matematicii studiate în liceu nu beneficiază de atât de multe aplicații în cele mai diverse domenii ale vieții sociale. De aceea am ilustrat fiecare operație prin aplicații diferite. Multe probleme practice se rezolvă utilizând operațiile aritmetice asupra unor date asociate problemelor. Suntem obligați să folosim matrice atunci când vorbim de articole care au **două caracteristici**. Printr-o organizare adecvată a datelor în **blocuri de numere**, putem utiliza aceste operații aritmetice într-o manieră eficientă. Scrierea lor astfel face prelucrarea ușoară cu ajutorul computerului. De exemplu, o rețea actuală de comunicații conține un număr mare de vârfuri și muchii (de ordinul milioanelor). Reprezentarea ei plană este practic imposibilă. O alternativă la realizarea ei în plan este utilizarea matricelor.

Exemplul 1. **Vânzările în leasing (pe 3 ani) a următoarelor mărci de autoturisme (număr de bucăți) BMW, MERCEDES, FORD, TOYOTA, RENAULT, în cele patru trimestre ale unui an sunt sintetizate în tabelul de mai jos.**

Trimestrul / Marca	I	II	III	IV
BMW	173	191	203	215
MERCEDES	112	123	106	137
FORD	98	107	109	126
TOYOTA	75	82	76	93
RENAULT	205	211	200	273

În acest tabel pe linii se citesc mărcile de autoturisme, iar pe coloane citim numărul de exemplare vândute în leasing în cursul unui anume trimestru. De exemplu, în linia întâi, corespunzătoare mărcii BMW, şi coloana trei, corespunzătoare trimestrului III, găsim numărul 203, ceea ce înseamnă că în trimestrul III al anului s-au vândut 203 autoturisme BMW. În linia trei, corespunzător mărcii FORD şi coloana a doua, corespunzător trimestrului al II-lea, întâlnim numărul 107, ceea ce se traduce prin aceea că în trimestrul al II-lea s-au vândut 107 autoturisme marca FORD. Datele din acest tabel le putem sintetiza într-o formă restrânsă astfel:

$$\begin{pmatrix} 173 & 191 & 203 & 215 \\ 112 & 123 & 106 & 137 \\ 98 & 107 & 109 & 126 \\ 75 & 82 & 76 & 93 \\ 205 & 211 & 200 & 273 \end{pmatrix}$$

Observăm că acest tabel are cinci linii (corespunzătoare celor cinci mărci de autoturisme) şi patru coloane (corespunzătoare celor patru trimestre).

Un astfel de tabel în care datele sunt aşezate pe linii şi coloane îl numim tabel de tip matriceal. Tabelele de tip matriceal stau la baza noţiunii matematice de matrice. Elementele tabelului matriceal, numerele din tabel, le-am închis între paranteze pentru a preciza că aceasta este toată mulţimea de elemente.

Observăm că indicând un număr din tabel trebuie să-i precizăm două elemente: linia şi coloana pe care se află. Deci pentru identificarea unui element avem nevoie de doi indici: unul pentru linie şi altul pentru coloană. Tabelul de mai sus îl putem reprezenta sub forma alăturată:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{pmatrix}$$

unde, de exemplu, $a_{11}=173$, $a_{12}=191$, $a_{22}=123$, $a_{43}=76$, $a_{54}=273$.

Cât sunt: a_{24}, a_{33}, a_{42}, a_{53} **? Care este semnificaţia lor?**

Exemplul 2. **Clasamentul diviziei A la fotbal în 2005, în urma etapei a XIX-a, pentru primele cinci echipe arată astfel:**

1. STEAUA	12	5	2	41
2. DINAMO	12	0	7	36
3. RAPID	10	5	4	35
4. FARUL	10	4	5	34
5. F.C. NAŢIONAL	8	6	5	30

$$\begin{pmatrix} 12 & 5 & 2 & 41 \\ 12 & 0 & 7 & 36 \\ 10 & 5 & 4 & 35 \\ 10 & 4 & 5 & 34 \\ 8 & 6 & 5 & 30 \end{pmatrix}$$

unde pe prima coloană este trecut numărul de meciuri câştigate, pe a doua numărul de meciuri egale, pe a treia numărul de meciuri pierdute, iar pe ultima coloană numărul de puncte (3 p pentru victorie, 1 p pentru meci egal şi 0 p pentru înfrângere).

Tabelul de tip matriceal este reprezentat mai sus.

Fie $\mathbb{C}$, mulţimea numerelor complexe,
$N_m=\{1,2,\ldots,m\}$, $N_n=\{1,2,\ldots,n\}$, $m,n\in\mathbb{N}^*$.

Definiţie. Se numeşte matrice de tip (m,n) sau încă $(m\times n)$ cu elemente din $\mathbb{C}$ o funcţie $A: N_m\times N_n\to\mathbb{C}$.

Valorile funcţiei $A(i,j)=a_{ij}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ se numesc **elementele matricei.**

Notaţii. Matricea A se reprezintă printr-un tabel dreptunghiular cu m linii şi n coloane, corespunzător celor mn elemente.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ţinând seama de aranjarea elementelor în tabel pe linii şi coloane în loc de matrice de tip (m,n) vom spune matrice cu m linii şi n coloane.

Uneori, pentru simplitatea scrierii, această matrice se notează $A=(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ sau când nici o confuzie nu-i posibilă, doar $A=(a_{ij})$.

Pentru elementul a_{ij}, indicele i arată linia pe care se află elementul, iar al doilea indice j indică pe ce coloană este situat.

Liniile matricei sunt mulţimile ordonate: $L_1=(a_{11}\ \ a_{12}\ \ \ldots\ \ a_{1n})$,
$L_2=(a_{21}\ \ a_{22}\ \ \ldots\ \ a_{2n})$, ..., $L_m=(a_{m1}\ \ a_{m2}\ \ \ldots\ \ a_{mn})$.
Elementele din linii le citim de la stânga la dreapta.
Coloanele matricei sunt mulţimile ordonate:

$$C_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\quad C_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\quad \ldots,\quad C_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Elementele din coloane le citim de sus în jos.
Vom nota matricele cu litere mari A, A_1, A', B, B_1, B', ..., X, X_1, X',...
Mulţimea matricelor de tip (m,n) cu elemente complexe o notăm cu $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.
Analog, notăm $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{N})$ pentru mulţimile de matrice de tip (m,n) cu elemente numere reale, raţionale, întregi şi respectiv naturale. Cum $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$, deducem
$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{N})\subset\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})\subset\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q})\subset\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})\subset\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

Exemple

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{N})$;

$B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 4 & -2 & 5\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{Z})$;

$D=\begin{pmatrix}1 & \pi & \sqrt{3}\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$;

$E=\begin{pmatrix}3i\\ -5\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$.

$C=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -3 & 0\\ 2 & \frac{5}{4} & \frac{1}{3}\\ 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{5}\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{Q})$;

Matrice particulare

1) O matrice de tipul $(1,n)$ (cu o linie şi n coloane) se numeşte **matrice linie** (sau **vector linie**) şi are forma $A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \dots & a_n\end{pmatrix}$.

Exemple: a) Un vector $\vec{u}$ din plan, în reperul $(O,\vec{i},\vec{j})$, $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ poate fi gândit ca o matrice linie cu două coloane de forma $\vec{u}=(x,y)$.

b) În exemplul practic prezentat la începutul capitolului, pentru marca MERCEDES avem matricea linie $(112\ \ 123\ \ 106\ \ 137)$. Aceste patru numere corespund vânzărilor din cele patru trimestre ale anului considerat.

2) O matrice de tipul $(m,1)$ (cu m linii şi o coloană) se numeşte **matrice coloană** (sau **vector coloană**) şi are forma: $A=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}$.

Exemple: a) Vectorul $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ din planul $(O,\vec{i},\vec{j})$ îl putem gândi ca o matrice coloană cu două linii de forma $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$.

b) În exemplul practic analizat, vânzările de autoturisme din trimestrul al treilea le putem reprezenta prin coloana:

$\begin{pmatrix}203\\ 106\\ 109\\ 76\\ 200\end{pmatrix}$

3) O matrice de tip (m,n) cu toate elementele egale cu zero se numeşte **matricea zero** (nulă). Se notează cu $O_{m,n}$ sau simplu O.

$O_{m,n}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$.

4) Dacă numărul de coloane este egal cu numărul de linii, adică $m=n$, atunci matricea se numeşte **pătratică de ordin n**.

Are forma: $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$.

Sistemul ordonat de elemente $(a_{11},a_{22},\dots,a_{nn})$ reprezintă **diagonala principală** a matricei A, iar suma acestor elemente $a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn}$ se numeşte **urma matricei** A, notată $Tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ (*Tr* provine din prescurtarea cuvântului francez trace = urmă).Sistemul ordonat de elemente $(a_{1n},a_{2n-1},\dots,a_{n1})$ se numeşte **diagonala secundară** a matricei A.

Mulţimea matricelor pătratice de ordin n cu elemente numere complexe o notăm $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ în loc de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$.

Exemple. **1) $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, are diagonala principală $(1,2)$ şi $Tr(A)=1+2=3$, iar diagonala secundară $(-1,0)$.**

2) $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ 4 & -5 & 6\\ 7 & -8 & 9\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$, are diagonala principală $(-1,-5,9)$ şi $Tr(A)=-1-5+9=3$, iar diagonala secundară $(-3,-5,7)$.

3) Printre matricele pătratice de ordin n, una este foarte importantă. Aceasta este: matricea unitate de ordin n şi se numeşte **(pe diagonala principală are toate elementele egale cu 1, iar în rest sunt elementele egale cu zero).** $I_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$

Uneori pentru scrierea ei se utilizează simbolul lui Kronecker

$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{dacă } i=j\\ 0, & \text{dacă } i\neq j\end{cases}$. **Deci,** $I_n=(\delta_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$.

Matricele unitate de ordin 2 şi respectiv 3 sunt: $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

5) Matricea pătratică $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numeşte **triunghiulară** dacă are una din formele:

$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$ sau $A=\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$.

6) Matricea pătratică $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numeşte **diagonală** dacă

$A=\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & \dots & 0\\ 0 & a_{22} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$.

În particular, dacă $a_{11}=a_{22}=...=a_{nn}=\alpha$, atunci matricea A se numește **scalară**.

Utilizarea matricelor în reprezentarea datelor

Prezentăm aici câteva aplicații extrem de interesante ale matricelor în modelarea unor probleme practice, asupra cărora vom reveni atunci când vom vorbi despre operațiile cu matrice pentru a traduce semnificația lor la nivelul problemei discutate.

1) Matricele și transformările liniare. Fie V mulțimea vectorilor legați de O din reperul cartezian $(O,\vec{i},\vec{j})$. Am văzut, în anii precedenți, că orice vector $\overrightarrow{OM}$ are expresia analitică unică $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$, unde (x,y) sunt coordonatele lui M. Cuplul de vectori $(\vec{i},\vec{j})$ formează o bază pentru V (orice vector din V se exprimă unic cu ajutorul vectorilor unitari $(\vec{i},\vec{j})$).

Fie V_2 mulțimea vectorilor din plan și $(\vec{i},\vec{j})$ o bază pentru V_2 (orice doi vectori nenuli, necoliniari formează o bază pentru V_2).

O funcție $f:V_2\to V_2$ se numește aplicație liniară de la V_2 la V_2 dacă:

1) $f(\vec{u}+\vec{v})=f(\vec{u})+f(\vec{v}),\ \forall \vec{u},\vec{v}\in V_2$, și 2) $f(\alpha\vec{u})=\alpha f(\vec{u}),\ \forall \alpha\in\mathbb{R},\forall \vec{u}\in V_2$.

Dacă are loc 1) se spune că f este aditivă, iar dacă are loc 2) se spune că f este omogenă (scoate scalarii în față). Cele două condiții din definiție pot fi restrânse echivalent în $f(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})=\alpha f(\vec{u})+\beta f(\vec{v}),\ \forall \vec{u},\vec{v}\in V_2,\ \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Cum orice vector din V_2 se scrie în mod unic în raport cu elementele bazei $(\vec{i},\vec{j})$, deducem că o aplicație liniară este bine determinată dacă știm cum acționează asupra vectorilor bazei. Pentru $f:V_2\to V_2$ avem $f(\vec{i})=a_{11}\vec{i}+a_{12}\vec{j}$, $f(\vec{j})=a_{21}\vec{i}+a_{22}\vec{j}$, iar dacă $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$, atunci $f(\vec{u})=xf(\vec{i})+yf(\vec{j})$. Mai precis numerele $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ caracterizează complet aplicația liniară f. Acestea se așează în tabelul pătratic, numit matrice pătratică $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$. Această matrice se numește matricea asociată aplicației liniare f relativ la baza $(\vec{i},\vec{j})$ și se notează $A(f)$. Acesta este cadrul firesc în care trebuie tratate matricele și operațiile cu acestea.

2) Reprezentarea relațiilor utilizând matricele. Fie $A=\{a_1,a_2,...,a_m\}$, $B=\{b_1,b_2,...,b_n\}$, iar $\Re$ o relație de la A la B. Această relație o reprezentăm printr-o matrice $\mathcal{M}_\Re=(m_{ij})$, unde

$$m_{ij}=\begin{cases}1, \text{ dacă } (a_i,b_j)\in\Re, \text{ deci dacă } a_i \text{ se află în relația } \Re \text{ cu } b_j\\ 0, \text{ în caz contrar.}\end{cases}$$

Matricea $\mathcal{M}_\Re$ se numește matricea zero-unu.

Exemplu. Fie $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2\}$,. Atunci $a\Re b\Leftrightarrow(a\in A,b\in B,a>b)$.

Avem $\Re=\{(2,1),(3,1),(3,2)\}$ iar matricea asociată acestei relații este $\mathcal{M}_\Re=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\1&1\end{pmatrix}$.

Prezența lui 1 în matrice arată că perechile $(2,1),(3,1),(3,2)$, aparțin relației $\Re$, iar 0 arată că nici o altă pereche nu aparține lui $\Re$.

3) Grafurile și matricele. Teoria grafurilor este unul dintre cele mai importante capitole ale matematicilor aplicate (studiul rețelelor de telecomunicații, problema transporturilor

etc.). Un graf neorientat G, este format din două mulțimi: 1) o mulțime V ale cărei elemente sunt numite vârfuri (sau puncte sau nodari) ale lui G și 2) o mulțime M, de perechi neordonate ale vârfurilor numite muchii ale lui G. Graful G se notează G(V,M), pentru a pune în evidență cele două mulțimi. Două vârfuri u,v sunt adiacente dacă există o muchie $m=\{u,v\}$. În acest caz u,v se numesc capetele muchiei m, iar m se spune că unește u și v sau încă m este incidentă în fiecare din capetele u,v. Grafurile se reprezintă în plan prin diagrame. Fiecare vârf $v\in V$ este reprezentat printr-un punct sau un cerc mic și fiecare muchie $m=\{u,v\}$ este reprezentată printr-un segment (curbă) care unește capetele u,v. Fiecare muchie reprezintă o legătură de comunicare directă între două noduri ale rețelei. Fie graful cu diagrama din Fig.1.Atunci $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ $M=\{m_1,m_2,m_3,m_4,m_5\}$, unde $m_1=\{v_1,v_2\}$, $m_2=\{v_2,v_3\}$, $m_3=\{v_3,v_4\}$, $m_4=\{v_2,v_4\}$, $m_5=\{v_1,v_4\}$.

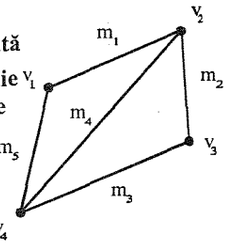


Fig. 1

Matricea $A=(a_{ij})$ asociată acestui graf are elementele

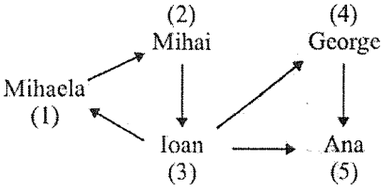
$$a_{ij}=\begin{cases}1, \text{ dacă } \{v_i,v_j\} \text{ este muchie în graf}\\ 0, \text{ în caz contrar}\end{cases}$$

$$A=\begin{array}{c}\\v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}v_1&v_2&v_3&v_4\end{array}\\\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}\end{array}.$$

Matricea A se numește matricea adiacentă grafului. Aici : Suma elementelor dintr-o linie dă gradul vârfului din acea linie (adică numărul de muchii incidente din acel vârf). Pentru v_2 avem $\text{grad}(v_2)=3$ (avem muchiile m_1,m_2,m_4), pentru v_3 avem $\text{grad}(v_3)=2$ (avem muchiile incidente m_2,m_3).

Un graf G(V,M) se numește orientat dacă mulțimea M este formată din perechi ordonate de elemente din V. Se utilizează o săgeată de la u la v pentru a indica direcția muchiei (u,v).

Cu acest tip de grafuri se pot modela comportarea unor grupuri de oameni, rezultatele unui turneu de fotbal (tenis, etc.),



Grafuri influență. În studiul comportării unui grup este de observat că anumite persoane pot influența gândirea altora. Un graf orientat numit graf influență poate fi utilizat pentru modelarea acestui comportament. Fiecare persoană este reprezentată printr-un vârf. Avem o muchie de la a la b dacă persoana reprezentată prin a influențează persoana reprezentată prin b. Matricea adiacentă este:

$$A=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\\5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array}\\\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

Graful turneului. Într-un turneu de fotbal fiecare echipă joacă cu fiecare altă echipă exact o dată. La fiecare meci o echipă este câștigătoare. Echipele participante sunt {A.C. Milan (1), Bayern München (2), F.C. Barcelona (3), Ajax (4), Manchester United (5)}. Graful orientat al turneului este (am notat cu (a,b) muchia dacă echipa a bate echipa b (Fig.2)). Scrieți matricea adiacentă asociată grafului.

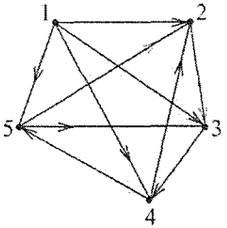


Fig.2

4) Lanțurile Markov și matricele. **Lanțurile Markov (matematician rus, 1856-1922) apar ca rezultat al modelării matematice a unor fenomene din diferite domenii de activitate. Noțiunea de lanț Markov este dezvoltată în cadrul teoriei probabilităților. Se ia în discuție un experiment ale cărui rezultate sunt aleatorii. Am numit, anul trecut la probabilități, orice repetare a experimentului probă. În general, prin lanț Markov înțelegem un șir de probe ale unui experiment, în care rezultatele la fiecare pas depind cel mult de rezultatele de la pasul precedent și nu și de rezultatele celorlalți pași anteriori. Mai precis:**

Definiție. **Un lanț Markov este un șir de probe ale unui experiment ale cărui rezultate au următoarele două proprietăți:**

1) fiecare rezultat aparține unei mulțimi finite $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ numită spațiul stărilor sistemului; dacă rezultatul la a n-a probă este a_i, atunci spunem că sistemul este în starea a_i la momentul n sau la pasul n;

2) rezultatul oricărei probe depinde cel mult de rezultatul probei precedente.

În conformitate cu această definiție, fiecărei perechi (a_i, a_j) îi asociem o probabilitate $0 \le p_{ij} \le 1$, care înseamnă probabilitatea de a trece din starea curentă a_i în starea viitoare a_j (este probabilitatea condiționată de a ajunge în starea a_j dacă a fost în starea a_i). Aceste probabilități determină matricea numită matricea de trecere a lanțului Markov. Să observăm în T că oricărei stări a_i îi corespunde o linie $(p_{i1}, p_{i2}, ..., p_{in})$ și reprezintă probabibilitățile tuturor posibilităților de a pleca din starea a_i. În aceste condiții $p_{i1} + p_{i2} + ... + p_{in} = 1$, $\forall i = \overline{1,n}$. O astfel de matrice se numește matrice stocastică.

$$T = \begin{array}{c} \\ \text{starea} \\ \text{curentă} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{starea viitoare} & & & \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{array}$$

Exemple. 1) **Trei copii A, B, C aruncă o minge de la unul la altul. A aruncă întotdeauna la B, B aruncă întotdeauna la C, iar C aruncă fie la A, fie la B. Este un lanț Markov cu trei stări A,B,C și care are matricea de trecere dată alăturat. Prima linie a matricei corespunde cu faptul că A aruncă mingea întotdeauna la B $(p_{12} = 1)$; a doua linie corespunde cu faptul că B aruncă mingea întotdeauna la C $(p_{23} = 1)$, iar a treia linie a matricei corespunde cu faptul că C aruncă mingea fie la A, fie la B (cu aceeași probabilitate) $p_{31} = p_{32} = \frac{1}{2}$.**

$$T = \begin{array}{c} \\ \text{starea} \\ \text{curentă} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{starea viitoare} & & \\ A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} A \\ B \\ C \end{array}$$

2) Mersul la întâmplare – random walk.

O particulă se poate deplasa pe o axă orientată sărind în una din stările 0, 1, 2, 3. La fiecare moment particula rămâne pe loc cu probabilitatea 1, dacă se află în punctele 0 sau 3, iar în caz contrar face un salt la dreapta cu o unitate în punctul vecin cu probabilitatea p sau la stânga cu o unitate cu probabilitatea $q = 1 - p$ (Fig.3). Stările 0 și 3 se numesc absorbante, deoarece odată atinse ele nu mai pot fi părăsite. Matricea de trecere este:

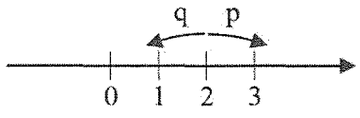


Fig.3

$$T = \begin{array}{c} \\ \text{starea} \\ \text{curentă} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{starea viitoare} & & & \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

Pentru frontierele 0 și 3 se pot imagina diferite variante. Ele pot fi făcute reflectante, ceea ce înseamnă că odată ajunsă în 0 sau 3 particula este reflectată în 1 și respectiv 2, când avem un lanț Markov cu $p(0,1) = p(3,2) = 1$ și deci matricea de trecere este:

$$T = \begin{array}{c} \\ \text{starea} \\ \text{curentă} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{starea viitoare} & & & \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

3) Ruinarea jucătorului. **Vom lua un caz particular, cu două persoane care au capitalul de 2 € și respectiv 3 €. Presupunem că la fiecare partidă se pariază 1 €, că probabilitățile de câștig a unei partide de cei doi jucători sunt p și respectiv $q = 1 - p$ și că rezultatele partidelor sunt independente. Repartizarea capitalului total $2+3=5$ € va evolua neîncetat până ce unul dintre ei se va ruina, adică pierde ultimul €.**

Problema ruinării jucătorului revine la calcularea probabilităților de a atinge stările absorbante 0 și respectiv 5 și a timpului mediu până la absorbție. Matricea de trecere este prezentată alăturat.

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & p \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}$$

1.2. OPERAȚII CU MATRICE

1) Egalitatea a două matrice

Cum matricea este o funcție are sens să vorbim de egalitatea a două matrice. Reamintim că dacă $f : A \to B$, $g : C \to D$ sunt două funcții, atunci spunem că ele sunt egale dacă: 1) $A = C$ (domeniile sunt egale), 2) $B = D$ (codomeniile sunt egale) și 3) $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A$ (punctual funcțiile coincid).

Acum putem formula următoarea:

Definiție. Fie matricele $A : N_m \times N_n \to K$, $B : N_{m_1} \times N_{n_1} \to K_1$, K, $K_1 \subseteq \mathbb{C}$. Spunem că matricele A și B **sunt egale** dacă: 1) $m = m_1$ și $n = n_1$ (matricele au același tip), 2) $K = K_1$ și 3) $A(i,j) = B(i,j)$, $\forall i = \overline{1,m}$, $\forall j = \overline{1,n}$ (sau $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i = \overline{1,m}$, $\forall j = \overline{1,n}$, **elementele corespunzătoare sunt egale**). Scriem $A = B$.

Două elemente, a_{ij} din matricea A și b_{ij} din matricea B, sunt corespunzătoare dacă sunt situate pe aceeași linie și aceeași coloană în fiecare din matrice.

Observație . Deci două matrice $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, de același tip, sunt egale dacă elementele coespunzătoare sunt egale.

Exemplu . **Să se determine** $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ **astfel încât să avem egalitatea matricelor:**

$\begin{pmatrix} y+1 & 3^x-2 \\ 2z+1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & t-3 \end{pmatrix}$. Din definiție avem egalitățile $y+1=4$, $3^x-2=1$, $2z+1=-2$, $0=t-3$, adică $y=3$, $3^x=3$ sau $x=1$, $z=-\frac{3}{2}$, $t=3$.

2) Transpusa unei matrice

Este o primă operație simplă care se efectuează asupra matricelor.

Definiție. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. **Transpusa matricei** A este matricea notată ${}^tA \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$, care se obține din A prin schimbarea liniilor în coloane (sau a coloanelor în linii): linia întâi din A devine coloana întâi în ${}^tA$, linia a doua din A devine coloana a doua în ${}^tA$, etc.

Operația prin care **fiecărei matrice** $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ **i se asociază matricea** ${}^tA \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ se numește **operația de transpunere a matricelor.**

Observații . **1)** Prin operația de transpunere a unei matrice pătratice de ordin n, elementele de pe diagonala principală rămân pe loc – cei doi indici fiind egali – ceea ce înseamnă că $Tr({}^tA) = Tr(A)$.

2) ${}^t({}^tA) = A$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exemple. 1) $A = (1 \quad 0 \quad -1) \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{Z}) \Rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{Z})$.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{Z}) \Rightarrow {}^tA = (1 \quad -2 \quad 3) \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{Z})$.

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \sqrt{3} \\ \pi & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \Rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & \pi \\ -1 & 1 \\ \sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.

4) Matrice simetrică . **O matrice pătratică de ordin n,** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ **se numește simetrică dacă** $A = {}^tA$, **ceea ce-i echivalent cu** $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i = \overline{1,n}$, $\forall j = \overline{1,n}$. **Prin urmare, într-o matrice simetrică elementele de pe diagonala principală rămân pe loc, iar celelalte sunt simetrice în raport cu această diagonală. Deci este suficient să știm elementele de pe diagonala principală și de deasupra acesteia, pentru a completa celelalte elemente prin simetrie față de diagonala principală.**

Dacă A este o matrice simetrică, atunci forma ei este:

a) pentru $n=2$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$; **b) pentru** $n=3$, $A = \begin{pmatrix} x & a & b \\ a & y & c \\ b & c & z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Matrice antisimetrică . **O matrice pătratică de ordin** n, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ **se numește antisimetrică dacă** $A = -{}^tA$, **adică echivalent cu** $a_{ij} = -a_{ji}$, $\forall i = \overline{1,n}$, $\forall j = \overline{1,n}$. **Dacă punem** $i = j$, **atunci din** $a_{ii} = -a_{ii}$, **rezultă** $a_{ii} = 0$, $\forall i = \overline{1,n}$, **ceea ce arată că într-o matrice antisimetrică elementele de pe diagonala principală sunt egale cu zero. În plus, dacă se cunosc elementele de deasupra acestuia, atunci pentru a le obține pe cele de sub diagonala principală le simetrizăm pe cele de deasupra diagonalei și le schimbăm semnul. Analog se procedează dacă se cunosc elementele de pe diagonala principală și de sub aceasta.**

Dacă A este o matrice antisimetrică, atunci forma ei este:

a) pentru $n=2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$; **b) pentru** $n=3$, $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

3) Adunarea matricelor

Am văzut că dacă $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, atunci suma funcțiilor f, g este funcția $f+g : A \to \mathbb{R}$, definită prin $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$, $\forall a \in A$.

Cum și matricele sunt funcții are sens să vorbim de adunarea lor. Mai precis are loc următoarea:

Definiție. Fie $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Matricea C se numește **suma** matricelor A și B dacă $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall i = \overline{1,m}$, $\forall j = \overline{1,n}$.

Operația prin care **oricăror două matrice de același tip** li se asociază suma lor se numește **adunarea matricelor.**

Observații. **1)** Se pot aduna numai matrice care **sunt de același tip**, adică au același număr de linii și respectiv același număr de coloane. Rezultatul este o matrice de același tip. Deci $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}) \Rightarrow A + B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

2) Explicit adunarea matricelor A, B înseamnă

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Spunem că adunarea matricelor se face pe componente.

3) Dacă A, B sunt matrice linie (sau matrice coloană) de aceleași dimensiuni,

atunci adunarea lor coincide cu adunarea vectorilor.

Exemple. Să se calculeze $A+B$ pentru: 1) $A=(-2\ \ 3\ \ 5)$, $B=(4\ \ -2\ \ 1)$;

2) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

R. 1) Observăm că $A, B\in\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{Z})$. Avem adunarea a doi vectori. Obținem:

$$A+B=(-2+4\ \ \ 3+(-2)\ \ \ 5+1)=(2\ \ 1\ \ 6)$$

2) Cele două matrice sunt de același tip, $A, B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Deci are sens suma lor.

Avem: $A+B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0 & 1+1\\ -1+1 & 1+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

3) Cum $A\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{Z})$, $B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ sunt de tipuri diferite ele nu se pot aduna.

Proprietăți ale adunării matricelor

Ținând seama de proprietățile pe care le are adunarea numerelor complexe și egalitatea a două matrice, se stabilesc ușor următoarele proprietăți:

A1) (**Asociativitatea adunării**) Adunarea matricelor este asociativă, adică $(A+B)+C=A+(B+C)$, $\forall A,B,C\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

A2) (**Comutativitatea adunării**) Adunarea matricelor este comutativă, adică $A+B=B+A$, $\forall A,B\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

A3) (**Element neutru**) Adunarea matricelor admite matricea nulă ca **element neutru**, adică $A+O_{m,n}=A, \forall A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

A4) (**Elemente opuse**) Orice matrice $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ are o opusă, notată cu $-A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ astfel încât $A+(-A)=O_{m,n}$.

Dacă $A=(a_{ij})$, atunci $-A=(-a_{ij})$, adică opusa lui A, $-A$, se obține din A prin **schimbarea semnelor tuturor elementelor sale**.

Observații. 1) Mulțimea $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ înzestrată cu operația de adunare și având proprietățile **A1) – A4)** spunem că formează un **grup comutativ** (sau **abelian**).

2) În loc să scriem $A+(-B)$, notăm $A-B$ și spunem că facem **diferența** dintre matricea A și matricea B. Deci, **în scăderea a două matrice elementele se scad pe componente**.

Exemple. 1) Fie $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -4\\ 1 & -5 & 0\end{pmatrix}$. Atunci $-A=\begin{pmatrix}-2 & -3 & 4\\ -1 & 5 & 0\end{pmatrix}$.

2) Fie $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\\ -4 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$.

Atunci $\left(A, {}^tB\in\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{Z})\right)$: $A-{}^tB=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\\ -4 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ -1 & 6\\ -4 & 4\end{pmatrix}$.

3) În virtutea proprietăților **A1) – A4)**, regulile de calcul relative la adunarea matricelor sunt identice cu acelea de la adunarea numerelor complexe. Dacă avem de adunat trei matrice de același tip A, B, C, atunci efectuăm, de exemplu, suma dintre matricea A și matricea B, care este matricea $A+B$, iar aceasta o adunăm cu matricea C. De altfel, operațiile indicate pentru matrice le păstrăm pentru elementele corespunzătoare ale matricelor.

Exemplu. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & 5\\ 3 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$ pentru care să calculăm $A-B-C$.

Avem: $A-B-C=\begin{pmatrix}1-(-2)-0 & -1-1-1 & 0-0-0 & 3-5-1\\ 0-3-(-1) & 2-(-1)-0 & 4-1-(-1) & 1-1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -3 & 0 & -3\\ -2 & 3 & 4 & 0\end{pmatrix}$

4) Se verifică imediat egalitatea ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$, $\forall A, B\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ (**transpusa sumei a două matrice este egală cu suma transpuselor matricelor**).

Aplicații la adunarea matricelor

1. Animația și matricele. O figură în plan poate fi stocată în calculator ca o mulțime de vârfuri. Vârfurile pot fi marcate și unite prin segmente pentru a obține figura. Dacă sunt n vârfuri ele pot fi stocate într-o matrice $2\times n$. Abscisele x sunt stocate în prima linie, iar ordonatele y în a doua linie. Fiecare două vârfuri consecutive se unesc printr-un segment. Fie $A(4,6)$, $B(6,4)$, $C(4,1)$, $D(2,4)$ și patrulaterul $ABCD$ este un "zmeu". (Fig.4)

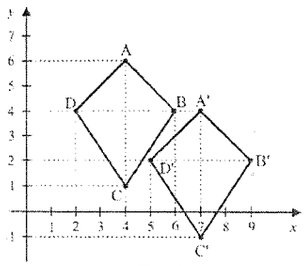


Fig.4

Matricea asociată acestui "zmeu" este $S=\begin{pmatrix}4 & 6 & 4 & 2\\ 6 & 4 & 1 & 4\end{pmatrix}$. Fie matricea $T=\begin{pmatrix}3 & 3 & 3 & 3\\ -2 & -2 & -2 & -2\end{pmatrix}$.

Atunci $S+T=\begin{pmatrix}7 & 9 & 7 & 5\\ 4 & 2 & -1 & 2\end{pmatrix}$ și avem punctele $A'(7,4)$, $B'(9,2)$, $C'(7,-1)$, $D'(5,2)$, adică „zmeul" A'B'C'D' se obține din ABCD printr-o translație de-a lungul axei Ox cu 3 unități și o coborâm pe verticală cu 2 unități.

2. Criptologia și matricele. Criptologia (cripto = ascuns) este la fel de veche ca și limbajul. Odată cu transmiterea de mesaje, oamenii au avut nevoia ca acestea ajunse în mâinile unor persoane indezirabile să nu poată fi decodificate și deci citite. Astăzi dezvoltarea tot mai rapidă a telecomunicațiilor, a comunicațiilor electronice, a tranzacțiilor bancare, a plăților cu cărți de credit, etc. au impus tot mai mult criptologia. Scopul criptologiei este de a transmite și proteja informațiile, asigurându-le confidențialitatea dintr-un mesaj. Criptografia este studiul tehnicilor utilizate pentru a codifica un text inteligibil (clar).

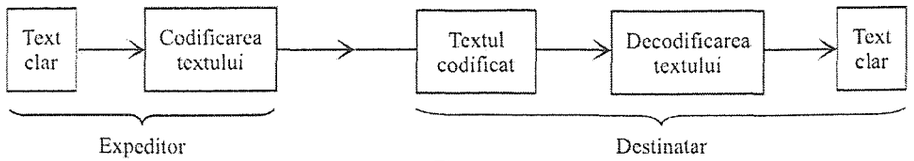


Fig.5

După codificarea textului, printr-un anumit procedeu, se obține textul cifrat (sau codificat), care odată ajuns la destinatar acesta pentru a-l aduce la forma textului inițial (inteligibil) trebuie să-l decodifice având la îndemână procedeul utilizat de expeditor, făcând astfel operația inversă realizată de expeditor. (Fig.5)

Un procedeu de codificare a unui mesaj este cel realizat prinsubstituții literale , când textul clar este cifrat literă cu literă sau prin grupuri de două sau trei litere.

Cifrul lui Iuliu Cesar (împărat roman). Este unul din cifrurile cele mai simple. Pentru a-și cifra o parte a corespondenței realiza o decalare a alfabetului clar cu 3 poziții.

Alfabetul clar	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
Alfabetul cifrat	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

Cheia cifrului este această decalare. De exemplu, textul "te ador" se codifică și devine cu acest cifru un text total neinteligibil "WHDGRU". Destinatarului nu-i rămâne decât să ia alfabetul cifrat și să observe că lui W îi corespunde t în alfabetul clar, adică $W \to t$, $H \to e$, $D \to a$, $G \to d$, $R \to o$, $U \to r$ și obține mesajul inițial "te ador".

Dezavantajul acestui cod este acela că odată descoperită o singură literă permite descifrarea întregului mesaj. Se spune că "am spart" codul.

	1	2	3	4	5
1	a	b	c	d	e
2	f	g	h	ij	k
3	l	m	n	o	p
4	q	r	s	t	u
5	v	w	x	y	z

Pătratul lui Polybe ($\approx$ 207-130 î.C.). În acest caz fiecărei litere din textul clar îi corespunde numărul format din două cifre (numărul liniei și numărul coloanei pe care se află litera).

Textul clar al expeditorului: te ador

Textul codificat al destinatarului: 44 15 11 14 34 42

Destinatarul face operația inversă de decodificare a textului utilizând Pătratul lui Polybe. Putem complica codificarea mesajelor observând că fiecărei litere îi corespund două cifre sub formă de coloană: $a \to \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $b \to \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, ..., $z \to \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$, unde primul element este numărul liniei, iar al doilea este numărul coloanei pe care se află litera în Pătratul lui Polybe.

Textului "te ador" îi corespunde matricea $A = \begin{pmatrix}4&1&1&1&3&4\\4&5&1&4&4&2\end{pmatrix}$.Considerăm matricea

$$M = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&1&2&3&4&5&1&2&\dots\\5&4&3&2&1&5&4&3&2&1&5&4&\dots\end{pmatrix}.$$

Pentru matricea A, considerăm M cu atâtea coloane câte are A, adică cu 6.

Deci $M = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&1\\5&4&3&2&1&5\end{pmatrix}$. Calculăm $S = A + M = \begin{pmatrix}5&3&4&5&8&5\\9&9&4&6&5&7\end{pmatrix}$ și mesajul cifrat devine: 5939 44 56 85 57. Mesajul obținut nu poate fi decodificat cu Pătratul lui Polybe. Cifrele 6, 7, 8, 9 nu figurează în cod. Ajuns la destinatar acesta îl pune sub forma S, apoi

din S scade matricea M și rezultă A. De aici cu ajutorul Pătratului lui Polybe decriptarea este imediată.

4) Înmulțirea cu scalari a matricelor

Am văzut la vectori că dacă $\lambda \in \mathbb{R}$ și $\bar{u} = (x, y)$, atunci vectorul λu are componentele obținute din cele ale vectorului $\bar{u}$ prin înmulțire cu scalarul λ, adică $\lambda\bar{u} = (\lambda x, \lambda y)$.

O situație similară are loc dacă înmulțim o matrice cu un scalar. Mai precis are loc următoarea:

Definiție. Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și $\lambda \in \mathbb{C}$. Se numește **produsul dintre scalarul $\lambda \in \mathbb{C}$ și matricea A**, matricea notată $\lambda A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ definită prin $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

A înmulți o matrice cu un scalar revine la a înmulți toate elementele matricei cu acest scalar.

Operația prin care **fiecărui număr complex λ și fiecărei matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ li se asociază produsul $\lambda A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$**, se numește **înmulțirea cu scalari a matricelor.**

Deci, $\lambda A = \begin{pmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn}\end{pmatrix}$.

Observații. 1) Dacă A este o matrice linie sau coloană, atunci înmulțirea ei cu scalari coincide cu înmulțirea vectorilor cu scalari.

2) Arătați că ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

Exemplu. Dacă $A = \begin{pmatrix}1&-2&0\\-3&4&5\end{pmatrix}$, atunci $3A = \begin{pmatrix}3&-6&0\\-9&12&15\end{pmatrix}$.

Proprietăți ale înmulțirii matricelor cu scalari

Au loc următoarele proprietăți:

S1) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

S2) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

S3) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

S4) $1 \cdot A = A$, $1 \in \mathbb{C}$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

Verificarea proprietăților este imediată (se face apel la asociativitatea înmulțirii numerelor complexe, a distributivității înmulțirii numerelor complexe în raport cu adunarea acestor numere etc.).

Mulțimea $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, împreună cu operațiile de adunare a matricelor și înmulțirii cu scalari din $\mathbb{C}$ și proprietățile **A1) – A4), S1) – S4)**, formează **un spațiu vectorial peste $\mathbb{C}$.**

Aplicații practice la înmulțirea matricelor cu scalari

$$P = \begin{array}{c} \\ \text{albastru} \\ \text{alb} \\ \text{verde} \\ \text{roșu} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{XL} & \text{XXL} & \text{M} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 12 & 13,5 & 14 \\ 11 & 12 & 12,5 \\ 12,5 & 13 & 13,5 \\ 12 & 12,5 & 13 \end{pmatrix} \end{array}$$

1. **Matricea alăturată conține prețurile de vânzare (în euro) pentru diferite sortimente de cămăși (de mărimi diferite: XL, XXL, M și culori diferite: albastru, alb, verde, roșu).**

Ca urmare a creșterii costurilor de producție s-a decis majorarea prețului fiecărui articol cu 2%. Determinați matricea corespunzătoare noilor prețuri.

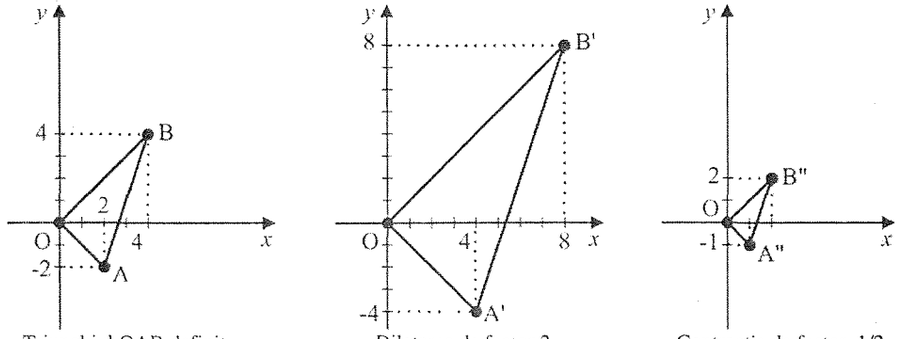
R. **Dacă x este prețul vechi al unui articol, atunci după majorare noul preț va fi $\left(1+\frac{2}{100}\right)x = 1,02x$. Deci, matricea noilor prețuri va fi:**

$$P' = 1,02P = \begin{pmatrix} 1,02\times12 & 1,02\times13,5 & 1,02\times14 \\ 1,02\times11 & 1,02\times12 & 1,02\times12,5 \\ 1,02\times12,5 & 1,02\times13 & 1,02\times13,5 \\ 1,02\times12 & 1,02\times12,5 & 1,02\times13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12,24 & 13,77 & 14,28 \\ 11,22 & 12,24 & 12,75 \\ 12,75 & 13,26 & 13,77 \\ 12,24 & 12,75 & 13,26 \end{pmatrix}.$$

Ce semnifică în această matrice: p'_{23}, p'_{32}, p'_{41} ?

2. **Animația și matricele. Fie A, matricea asociată unei figuri din plan, iar c o constantă reală. Atunci cA este matricea asociată noii figuri. Dacă $0 < c < 1$, atunci noua figură este o contracție, iar dacă $c > 1$, atunci noua figură este o dilatare a figurii date.**

Exemplu. Fie triunghiul OAB, $O(0,0)$, $A(2,-2)$, $B(4,4)$ (Fig.6). Atunci matricea



Triunghiul OAB definit de matricea T — Dilatarea de factor 2 — Contracția de factor 1/2

Fig.6

asociată este $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Pentru $c = 2$ (dilatare), avem $2T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ și figura asociată OA'B'. Pentru $c = \frac{1}{2}$ (contracție), avem $\frac{1}{2}T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ pentru care avem triunghiul OA"B".

3. **Criptografia și matricele. Transmiteți unui coleg de clasă un mesaj codificat, utilizând Pătratul lui Polybe, în care matricea asociată o înmulțiți cu un coeficient număr natural (pe care nu uitați să-l comunicați colegului în vederea decodificării).**

Probleme rezolvate

1. **Se consideră matricele: $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calculați: $3A - 4^tB + 2C$.**

R. **Avem:** $3A - 4^tB + 2C = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -12 \\ 17 \end{pmatrix}$.

2. **Determinați numerele x, y, z, t dacă are loc egalitatea:**

$$3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ x & -2y \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} z & -3t \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

R. **Egalitatea se scrie succesiv:** $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3x & -6y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2z & -6t \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **sau**

$$\begin{pmatrix} 3-2z & -3+6t \\ 3x-2 & -6y-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Din ultima egalitate de matrice rezultă sistemul: $\begin{cases} 3-2z=-1 \\ -3+6t=1 \\ 3x-2=1 \\ -6y-10=2 \end{cases}$

cu soluția $x = 1$, $y = -2$, $z = 2$, $t = \frac{2}{3}$.

3. **Să se determine matricea X dacă:** $2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - 4X = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

R. **Această egalitate este o ecuație matriceală. Operațiile din membrul stâng au sens dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Izolăm termenul care conține necunoscuta și avem:**

$$-4X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \text{ sau } -4X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}. \text{ De aici } X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Observație. Se poate lua $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de forma $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și se aduce membrul stâng la o matrice pătratică de ordinul doi. Se egalează cei doi membri și se ajunge la un sistem de patru ecuații cu patru necunoscute.

4. Determinați matricele X, Y pentru care: $\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ 2X - Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \end{cases}$

R. Este un sistem de ecuații matriceale. Pentru rezolvarea lui vom aplica metoda reducerii. Adunăm cele două ecuații, membru cu membru, și se obține (am redus necunoscuta Y): $3X = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$, iar de aici: $X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Din prima ecuație:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5) Înmulțirea matricelor

Următoarea operație pentru matrice, cea de înmulțire, este mai dificilă. Prezentarea ei prin definiție poate ridica semne de mirare. Utilizarea ei în probleme economice ar justifica o astfel de definiție. Dar resorturile produsului a două matrice, se va vedea, țin de schimbarea de bază pentru mulțimea vectorilor din plan.

Aplicație practică. O stație de benzină vinde într-o zi 1600 litri de motorină, 1000 litri benzină Premium și 800 litri benzină fără plumb. Știind că prețurile în Euro în acea zi au fost 0,85 €/l motorină, 0,95 €/l benzină Premium și 0,97 €/l benzină fără plumb, să se determine valoarea totală a încasărilor realizate în acea zi la benzinărie.

	Motorină	Benzină Premium	Benzină fără Plumb
C =	1600	1000	800

matrice linie de tip (1, 3)

P =	0,85	Motorină
	0,95	Benzină Premium
	0,97	Benzină fără Plumb

matrice coloană de tip (3, 1)

R. Vânzările de carburanți din acea zi de la benzinărie pot fi reprezentate sub formă de matrice linie, matricea $C \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$.

Prețurile carburanților per litru le punem sub formă de matrice coloană, matricea $P \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Primul element din C dă numărul de litri de motorină vânduți în acea zi la stația de benzină, iar primul element din P dă prețul unui litru de motorină, iar produsul $1600 \cdot 0,85 = 1360$ € dă valoarea totală încasată din vânzarea motorinei din acea zi.

Interpretări similare au elementele al doilea și al treilea din cele două matrice.
Făcând produsul elementelor corespunzătoare din matricele C și P și apoi suma acestor produse obținem totalul încasărilor din vânzarea combustibililor din acea zi de la stația de benzină.

Deci $1600 \cdot 0,85 + 1000 \cdot 0,95 + 800 \cdot 0,97 = 1360 + 950 + 776 = 3086$ €.

Pe scurt avem următoarea scriere:

$$C \cdot P = \begin{pmatrix} 1600 & 1000 & 800 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,85 \\ 0,95 \\ 0,97 \end{pmatrix} = 1600 \cdot 0,85 + 1000 \cdot 0,95 + 800 \cdot 0,97 = 3086.$$

Dacă gândim cele două matrice ca fiind doi vectori, regula de calcul dă produsul scalar al acestor vectori.

Cu aceste elemente formulăm următoarea:

Definiție. Definim produsul a două matrice astfel:

a) Dacă $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ și $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$,

atunci **produsul matricelor** A, B este matricea

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{C})$$

și reprezintă produsul scalar al lui A cu B.

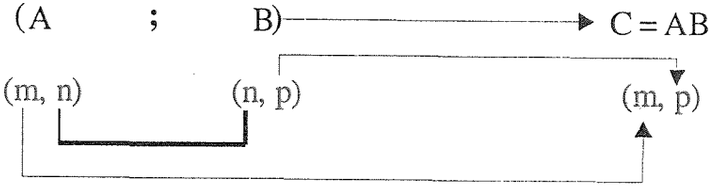
b) Dacă $A = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și $B = \begin{pmatrix} b_{jk} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, atunci **produsul lui A cu B**, în această ordine, este matricea de tip (m, p),

$$C = \begin{pmatrix} c_{ij} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{C}),$$

unde

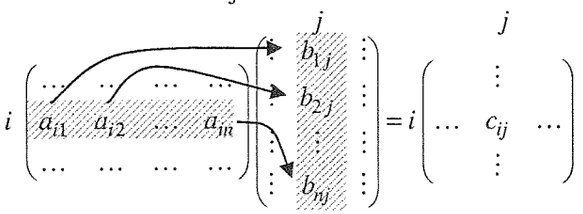
$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \; i = \overline{1,n}, \; j = \overline{1,p}.$$

Observații. 1) Produsul AB a două matrice nu se poate efectua întotdeauna decât dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ adică dacă numărul de coloane ale lui A este egal cu numărul de linii ale lui B, când se obține o matrice $C = AB \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{C})$ după schema:



2) Pentru a obține elementul c_{ij} din matricea C se ia vectorul de pe linia i (linia i)

din matricea A (prima matrice) și vectorul de pe coloana j (coloana j, de sus în jos) și se face produsul lor scalar ca mai jos:



$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}.$$

Se așează linia i din matricea A peste coloana j din matricea B, se înmulțesc elementele corespunzătoare și se adună rezultatele.

Dacă se consideră matricea A definită prin cele m linii L_1, L_2, ..., L_m, iar matricea B prin cele p coloane, C_1, C_2, ..., C_p, adică $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}$ și respectiv $B = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \ldots & C_p \end{pmatrix}$, atunci elementele matricei C sunt numerele $c_{ij} = L_i C_j$, adică explicit:

$$AB = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \ldots \\ L_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \ldots & C_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1C_1 & L_1C_2 & \ldots & L_1C_p \\ L_2C_1 & L_2C_2 & \ldots & L_2C_p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ L_mC_1 & L_mC_2 & \ldots & L_mC_p \end{pmatrix}$$

Regula prezentată mai sus este cunsocută sub numele de „regula de înmulțire a liniilor cu coloanele".

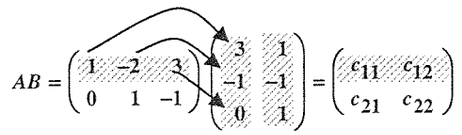
Să observăm că elementele liniei i din matricea C se obțin înmulțind pe rând linia i din matricea A, cu coloanele matricei B.

Exemplu. **Să se calculeze produsul AB pentru:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{Z}), \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{Z}).$$

Cum A este de tipul (2, 3), iar B de tipul (3,2), matricea produs $C = AB$ are sens (numărul de coloane (3) din A este egal cu numărul de linii (3) din B) și este de tipul (2, 2).

Avem:

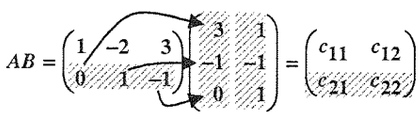


unde elementele liniei întâi din matricea produs c_{11}, c_{12} sunt date de:

$$c_{11} = 1\cdot 3 + (-2)(-1) + 3\cdot 0 = 5, \qquad c_{12} = 1\cdot 1 + (-2)(-1) + 3\cdot 1 = 6.$$

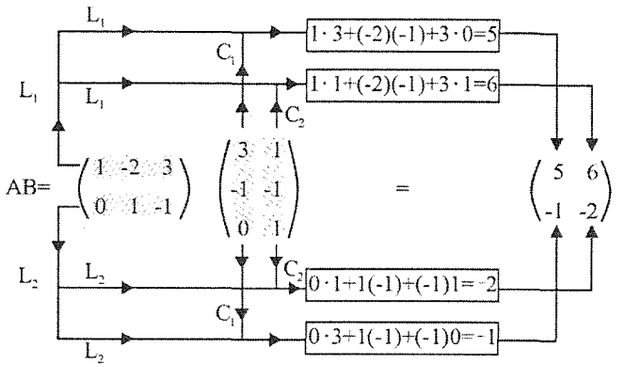
(în scriere s-au haşurat linia întâi din prima matrice și cele două coloane din a doua matrice, care contribuie la determinarea elementelor din prima linie a matricei produs; săgețile indică modul în care se fac produsele pentru a obține elementul c_{11}).

Pentru a obține elementele liniei a doua (c_{21}, c_{22}) din matricea produs, se consideră linia a doua din prima matrice și coloanele matricei a doua. Avem $c_{21} = 0\cdot 3 + 1(-1) + (-1)\cdot 0 = -1$ (produsele din sumă au factorii dați de săgeți):



$c_{22} = 0\cdot 1 + 1(-1) + (-1)\cdot 1 = -2$. **Deci** $AB = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Desfășurat, procesul de determinare al elementelor matricei AB este redat mai jos:



3) Dacă matricele sunt pătratice $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci are sens întotdeauna atât AB cât și BA. În general, $AB \neq BA$, adică **înmulțirea matricelor nu este comutativă**. Dacă $AB = BA$, atunci se spune că matricele **comută**.

Exemplu. **Dacă** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, **atunci** $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, **iar** $BA = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **și observăm că $AB \neq BA$.**

Proprietăți ale înmulțirii matricelor

Următoarele proprietăți vin să faciliteze calculul algebric cu matrice. Are loc următoarea:

Teoremă. I1) (Asociativitatea înmulțirii) Înmulțirea matricelor este asociativă, adică $(AB)C=A(BC)$, $\forall A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $\forall B\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, $\forall C\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$.

I2) (Distributivitatea înmulțirii în raport cu adunarea) Înmulțirea matricelor este distributivă (la dreapta și la stânga) în raport cu adunarea matricelor, adică $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$, $\forall A,B,C$ matrice pentru care au sens operațiile de adunare și înmulțire.

I3) (Elementul neutru) Înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are element neutru, adică există I_n, matricea unitate de ordin n astfel încât $A\cdot I_n=I_n\cdot A=A$, $\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Se spune că matricea unitate I_n, este **element neutru** în raport cu operația de înmulțire a matricelor pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Demonstrație **I1)** Fie $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B=(b_{jk})\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, $C=(c_{kl})\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, $AB=(d_{ik})\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $BC=(e_{jl})\in\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{C})$, $(AB)C=(f_{il})\in\mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{C})$, $(AB)C=(g_{il})\in\mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{C})$. Avem:

$$f_{il}=\sum_{k=1}^{p}d_{ik}c_{kl}=\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl}=\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}c_{kl}=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p}b_{jk}c_{kl}\right)a_{ij}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}e_{jl}a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}e_{jl}=g_{il},\ \forall i=\overline{1,m},\ \forall l=\overline{1,q}.$$

I2) Temă.

I3) Fie $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $I_n=(\delta_{ij})=\begin{cases}1, \text{ dacă } i=j\\ 0, \text{ în rest}\end{cases}$, $AI_n=(b_{ij})$, $I_nA=(c_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Atunci: $b_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\delta_{kj}=a_{ij}\delta_{jj}=a_{ij}$ și $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\delta_{ik}a_{kj}=\delta_{ii}a_{ij}=a_{ij}$, $\forall i,j=\overline{1,n}$. ■

Observații. 1) Arătați că: a) ${}^t(AB)={}^tB\cdot{}^tA$, $\forall A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $\forall B\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$;

b) $Tr(AB)=Tr(BA)$, $\forall A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2) Matricea $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numește **inversabilă** dacă există matricea $A'\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A\cdot A'=A'\cdot A=I_n$.

Matricea A', dacă există este unică și se notează $A'=A^{-1}$ (citim: A la minus unu) și se numește **inversa matricei** A.

3) Fie $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dacă $A=O_n$ sau $B=O_n$, atunci $AB=O_n$. Reciproca nu este adevărată. Avem contraexemplul $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\neq O_2$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\neq O_2$ când $AB=O_2$.

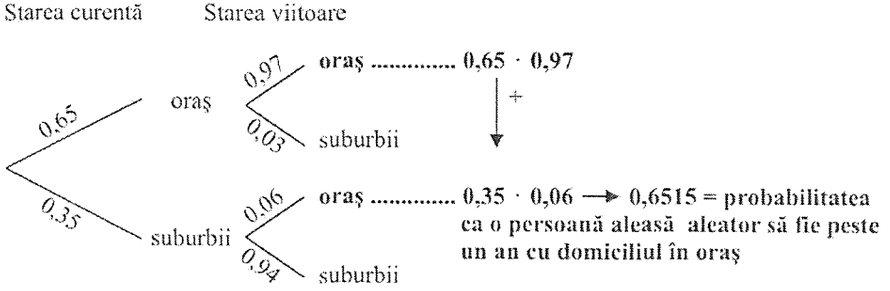
Exerciții. 1) Fie $A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&-3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\\1&3\end{pmatrix}$. **Calculați transpusele matricelor** A, B, AB, BA **și verificați egalitățile** ${}^t(AB)={}^tB\cdot{}^tA$, ${}^t(BA)={}^tA\cdot{}^tB$.

2) Să se determine inversa matricei $A=\begin{pmatrix}1&-3&-1\\-1&4&1\\1&9&-2\end{pmatrix}$ **luând** $A^{-1}=\begin{pmatrix}x&y&z\\m&n&p\\u&v&z\end{pmatrix}$.

Aplicații la înmulțirea matricelor

1. Migrația populației și înmulțirea matricelor . Se așteaptă ca în fiecare an 3% din populația curentă cu reședința în oraș să se mute în suburbiile acestuia, iar 6% din populația curentă cu reședința în suburbii să se mute în oraș. În prezent, 65% din totalul populației locuiește în oraș, iar restul de 35% au domiciliul în suburbii. Presupunem că totalul populației din oraș și suburbii este constant, care va fi distribuția populației un an mai târziu? Dar după doi ani?

R. Arborele diagramă asociat problemei este:



Deci peste un an 65,15 % din populație va trăi la oraș, iar 34,85% $(0,65\cdot0,03+0,35\cdot0,94=0,3485)$ **va avea domiciliul în suburbii.**

Procesul descris mai sus este un lanț Markov cu două stări: starea 1 („locuiește în oraș"), starea 2 („locuiește în suburbii").

Matricea de trecere asociată lanțului Markov este:

$$T=\begin{array}{c}\\\text{starea curentă}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\text{starea viitoare}&\\1&2\end{array}\\\begin{pmatrix}0,97&0,03\\0,06&0,94\end{pmatrix}\end{array}$$

Distribuția probabilităților inițiale a populației o reprezentăm ca o matrice linie:

$$X_0=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\text{Starea 1}&\text{Starea 2}\end{array}\\(0,65\quad 0,35)\end{array}$$ **(matricea stării inițiale)**

De fapt X_0 este o variabilă aleatoare $X_0 : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0{,}65 & 0{,}35 \end{pmatrix}$.

Starea 1 Starea 2

Punând: $X_1 = (0{,}6515 \quad 0{,}3485)$ (distribuția după un an)observăm că $X_1 = X_0 T$.

Analog, dacă X_1 este distribuția probabilitătilor după un an. iar X_2 este distribuția

Starea 1 Starea 2

probabilităților după doi ani, atunci: $X_2 = X_1 T = X_0 T^2 = (0{,}6529 \quad 0{,}3471)$.

Aceasta înseamnă că după doi ani 65,29 % din populație are domiciliul în oraș, iar 34,71 % din populație este domiciliată în suburbii.

2. Animația și înmulțirea matricelor. Se numește transformare liniară a planului $\mathcal{P}$ în el însuși o aplicație $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $f(P) = P'$, $P(x, y)$, $P'(x', y')$ și $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, unde A este o matrice pătratică de ordinul doi. De obicei A se notează $A(f)$ pentru a indica transformarea căreia se asociază matricea.

Fie $f, g : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ două transformări liniare ale lui $\mathcal{P}$, iar $A(f), B(g) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ matricele asociate transformărilor. Care este legătura între coordonatele punctului $P''(x'', y'')$ și cele ale punctului $P(x, y)$, dacă $P'' = (g \circ f)(P)$?

Fie $f(P) = P'$ cu $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A(f) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Avem echivalent

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

Din $g(f(P)) = g(P') = P''$, deducem $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = B(g) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'' = b_{11}x' + b_{12}y' \\ y'' = b_{21}x' + b_{12}y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = b_{11}(a_{11}x + a_{12}y) + b_{12}(a_{21}x + a_{22}y) \\ y'' = b_{21}(a_{11}x + a_{12}y) + b_{22}(a_{21}x + a_{22}y) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x'' = (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})x + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})y \\ y'' = (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})x + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = B(g)A(f) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

În concluzie, dacă transformarea liniară f este definită prin matricea A, iar transformarea liniară g prin matricea B, atunci transformarea liniară $g \circ f$ este definită prin matricea BA.

a) Simetria în raport cu axa Ox. Fie punctul $P(x, y)$. Simetricul lui în raport cu axa Ox este punctul $P'(x', y')$, unde $x' = 1 \cdot x + 0 \cdot y = x$, $y' = 0 \cdot x - 1 \cdot y = -y$. Din această scriere îi asociem simetriei în raport cu axa Ox, matricea $A_{Ox} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dacă punem coordonatele lui P sub formă de matrice coloană $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ și ale lui P', de asemenea $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, atunci legătura între coordonatele acestor puncte este dată de egalitatea matriceală

$$A_{Ox}X = X' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Exemplu. Fie triunghiul OAB, $O(0,0)$, $A(2,-2)$, $B(4,-4)$. Determinați simetricul lui în raport cu axa Ox. (Fig.7)

R. Fie $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ matricea asociată triunghiului (celor trei puncte). Atunci

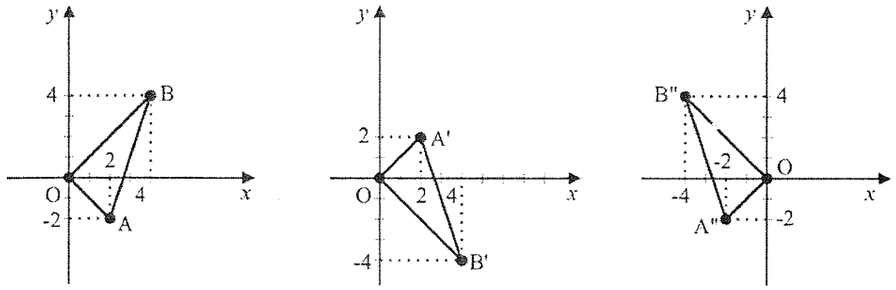
$A_{Ox}T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ dă coordonatele simetricelor vârfurilor O, A, B în raport cu axa Ox.

Acestea sunt punctele $O(0,0)$, $A'(2,2)$, $B'(4,-4)$.

b) Simetria în raport cu axa Oy. Analog simetricul lui $P(x, y)$ în raport cu axa Oy este $P''(x'', y'')$, unde $x'' = -1 \cdot x + 0 \cdot y = -x$, $y'' = 0 \cdot x + 1 \cdot y = y$. Acestei simetrii îi asociem matricea $A_{Oy} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, iar legătura între coordonatele punctelor P și P'' este dată de egalitatea $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$.

Exemplu. Pentru a obține simetricul triunghiului OAB, de la a), în raport cu axa Oy calculăm $A_{Oy}T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Deci avem punctele $O(0,0)$, $A''(-2,-2)$, $B''(-4,4)$ (Fig.7).

3. Teoria jocurilor și înmulțirea matricelor. Teoria jocurilor este o ramură relativ nouă a



Triunghiul definit de T | Simetria în raport cu Ox | Simetria în raport cu Oy

Fig.7

matematicii. Cel care a fundamentat și dezvoltat teoria jocurilor este John von Newmann (1903-1957), unul dintre marii matematicieni ai secolului al XX-lea. Teoria jocurilor combină metode matriceale cu teoria probabilităților pentru a determina strategia optimă care să fie utilizată de doi sau mai mulți concurenți într-o competiție, fiecare dorind să-și maximizeze câștigurile sau echivalent să-și minimizeze pierderile. Așa sunt jucătorii de poker, managerii unor firme concurente, etc.

Considerăm două persoane A și B care joacă următorul joc: fiecare jucător are o monedă pe care o acoperă cu palma (notăm cu b și s, banul și respectiv stema pe fiecare monedă). La un semnal dat cei doi jucători dezvăluie alegerea făcută. Dacă cei doi jucători aleg banul, atunci A plătește lui B suma de 3 €. Dacă A alege b și B alege s, atunci B plătește lui

A suma de 6 €. Dacă A alege s și B alege b, atunci A plătește lui B suma de 2 € și în fine, dacă A și B aleg s, atunci A plătește lui B suma de 1 €.

Considerăm matricea dată alăturat.

Alegerile lui B

Alegerile lui A	b	s
b	3	-6
s	2	1

T = Alegerile lui A

(matricea plată pentru un joc)

Fiecare element din T reprezintă o plată de la A la B. De exemplu, $a_{11} = 3$ reprezintă plata sumei de 3 € de la A la B, $a_{12} = -6$ înseamnă că A primește de la B suma de 6 €. Acest joc este un joc de sumă nulă (suma plăților făcute de cei doi jucători la sfârșitul fiecărui joc este egală cu zero: $3 - 6 + 2 + 1 = 0$). Jucătorul A poate alege linia întâi cu probabilitatea p_1, iar linia a doua cu probabilitatea p_2. Aceasta se numește strategia jucătorului A și se reprezintă prin matricea $P = (p_1 \quad p_2)$, $p_1 + p_2 = 1$. Jucătorul B poate alege coloana întâi cu probabilitatea q_1, iar coloana a doua cu probabilitatea q_2. Aceasta este strategia jucătorului B și se reprezintă prin matricea coloană $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$, $q_1 + q_2 = 1$.

În fiecare partidă a acestui joc sunt patru rezultate posibile: (linia 1, coloana 1), (linia 1, coloana 2), (linia 2, coloana 1), (linia 2, coloana 2), unde prima componentă este alegerea lui A, iar a doua componentă este alegerea lui B. Cum cele două alegeri sunt independente, Probabilitatea (linia 1, coloana 1) = Probabilitatea (linia 1) · Probabilitatea (coloana *1*) = $p_1 q_1$, etc.

Aceste rezultate se trec în tabelul de mai jos.

Rezultate	Probabilitate	Plata
(l_1, c_1)	$p_1 q_1$	a_{11}
(l_1, c_2)	$p_1 q_2$	a_{12}
(l_2, c_1)	$p_2 q_1$	a_{21}
(l_2, c_2)	$p_2 q_2$	a_{22}

unde *l* se referă la linie, iar *c* la coloană.

După cum se știe,din anul precedent, valoarea medie M a jocului este egală cu $M = p_1 q_1 a_{11} + p_1 q_2 a_{12} + p_2 q_1 a_{21} + p_2 q_2 a_{22}$.

De exemplu, pentru $p_1 = \frac{1}{4}$, $p_2 = \frac{3}{4}$, $q_1 = \frac{1}{3}$, $q_2 = \frac{2}{3}$ și valorile plăților din matricea *T*, obținem $M = 0{,}25$ €, ceea ce înseamnă că pe termen lung A se poate aștepta să câștige în medie 0,25 € pentru fiecare partidă. Se constată ușor că plata medie per joc se poate exprima ca produs de matrice $(M) = PAQ = (0{,}25)$.

4. Prognoza vremii și înmulțirea matricelor. Să presupunem că probabilitatea de a ploua mâine depinde numai de condiția de a ploua sau nu astăzi. Presupunem că dacă azi plouă, atunci mâine va ploua cu probabilitatea $p \geq 0$. Dacă azi nu plouă, atunci probabilitatea ca mâine să plouă este $q \geq 0$.

Constatăm că suntem în cazul unui lanț Markov cu două stări: 0 „plouă", 1 „nu plouă".

Matricea probabilităților de trecere este:

P = stări curente	stări viitoare 0	1
0	p	$1-p$
1	q	$1-q$

Dacă $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ și $X_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ (distribuția inițială, pentru azi; $\frac{1}{5}$ = probabilitatea ca azi să plouă și $\frac{4}{5}$ să nu plouă), atunci $X_1 = X_0 P = \begin{pmatrix} \frac{11}{30} & \frac{19}{30} \end{pmatrix}$ reprezintă distribuția probabilităților pentru mâine. Mâine va ploua cu probabilitatea $\frac{11}{30}$ și nu va ploua cu probabilitatea $\frac{19}{30}$. Predicția vremii pentru ziua de poimâine este dată de matricea $X_2 = X_1 P = \begin{pmatrix} \frac{71}{180} & \frac{109}{180} \end{pmatrix}$. De aici probabilitatea ca poimâine să plouă este egală cu $\frac{71}{180}$ și să nu plouă $\frac{109}{180}$.

6) Ridicarea la putere a unei matrice

Dacă $a \in \mathbb{R}$, atunci $a^2 = a \cdot a$ (înmulțirea lui a cu el însuși), iar $a^n = a^{n-1} \cdot a$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Observăm că înmulțirea unui număr real cu el însuși are loc întotdeauna.

Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, atunci pentru a vorbi de $A \cdot A$, trebuie să aibă sens operația de înmulțire. Aceasta este definită dacă $m = n$, adică pentru A, **matrice pătratică de ordin *n***. Ținând seama de proprietatea de asociativitate de la înmulțirea matricelor se poate defini ridicarea la putere a unei matrice pătratice astfel:

$$A^k = \begin{cases} A, k = 1 \\ A^{k-1} \cdot A, k \geq 2, k \in \mathbb{N} \cdot \end{cases}$$

Se verifică imediat următoarele proprietăți:

1) $A^m \cdot A^k = A^{m+k}$, $\left(A^m\right)^k = A^{mk}$, $(\alpha A)^k = \alpha^k \cdot A^k$, $\forall m, k \in \mathbb{N}^*$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2) Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ și $AB = BA$ (**matricele comută**) atunci $(AB)^k = A^k B^k$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A^p - B^p = (A - B)\left(A^{p-1} + A^{p-2}B + ... + B^{p-1}\right)$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$,

$(A + B)^p = A^p + C_p^1 A^{p-1} B + ... + C_p^k A^{p-k} B^k + ... + B^p$ (**binomul lui Newton**).

Prezentăm mai jos câteva tehnici utilizate pentru a ridica o matrice la o putere.

1. **Metoda inducției matematice.** Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n, $n\in\mathbb{N}^*$.

Se calculează puterile A^2, A^3, A^4 până când se observă o regulă de formare a elementelor din A^n. În acest caz $A^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A^4=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, ceea ce atrage $A^n=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Această afirmație se probează prin inducție matematică. Fie predicatul $p(n):A^n=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Verificarea propoziției. Pentru $n=1$, $p(1):A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, adevărat.

Demonstrația. $p(k)\to p(k+1)$, unde $p(k):A^k=\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $p(k+1):A^{k+1}=\begin{pmatrix}1 & k+1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Dar $A^{k+1}=A^k\cdot A=\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & k+1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, ceea ce arată că $p(k+1)$ este adevărată, dacă $p(k)$ este adevărată.

Concluzie. Propoziția $p(n)$ este adevărată $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

2. **Binomul lui Newton.** Scriem aceeași matrice A ca sumă a **două matrice care comută**: $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=I_2+B$. Se știe că $I_2B=BI_2=B$. În plus $B^k=O_2$, $\forall k\geq 2$ și $A^n=(I_2+B)^n$ se calculează cu formula binomului lui Newton și avem:

$$A^n=I_2^n+C_n^1I_2^{n-1}B+C_n^2I_2^{n-2}B^2+\ldots=I_2+nB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & n\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

3. **Metoda șirurilor recurente.** Din calculul puterilor A^2, A^3, ... se observă că avem un singur element variabil, cel din linia întâi, coloana a doua.

Considerăm $A^n=\begin{pmatrix}1 & a_n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Atunci $A^{n+1}=\begin{pmatrix}1 & a_{n+1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Relația de recurență între termenii șirului (a_n) se obține din egalitatea

$$A^{n+1}=A^n\cdot A\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & a_{n+1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a_n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & a_{n+1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1+a_n\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

De aici $a_{n+1}=a_n+1$, $\forall n\geq 1$. Pentru $n=1$, $a_1=1$. Găsim ușor (progresie aritmetică) $a_n=n$.

4. Scrierea matricei, utilizând funcțiile trigonometrice sinus și cosinus, sub una din formele $A_\alpha=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ sau $A_\alpha=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ când se verifică ușor $A_\alpha^n=A_{n\alpha}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Fie $A=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$. Să determinăm A^n, $n\in\mathbb{N}^*$.

Se scrie matricea sub forma $A=2\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3}\\ -\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}=2B_{\frac{\pi}{3}}$.

Atunci: $A^n=\left(2B_{\frac{\pi}{3}}\right)^n=2^nB_{\frac{\pi}{3}}^n=2^n\begin{pmatrix}\cos\frac{n\pi}{3} & \sin\frac{n\pi}{3}\\ -\sin\frac{n\pi}{3} & \cos\frac{n\pi}{3}\end{pmatrix}$.

Aplicații la ridicare la putere a unei matrice

Matricele se pot utiliza în rezolvarea aplicațiilor în care un șir de evenimente se repetă în timp.

1.Proprietarii și alegerea surselor de căldură. Într-un oraș, comisia de verificare a surselor de căldură în locuințe a realizat un studiu pe o perioadă de 10 ani. Ca surse de căldură sunt folosite: electricitatea (E), gazul natural (G), motorina (M), energia solară (S). Matricea de trecere de la o formă la alta de încălzire este:

$$T=\text{stări curente}\begin{array}{c}\\ E\\ G\\ M\\ S\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\text{stări viitoare}\\ E & G & M & S\end{array}\\ \begin{pmatrix}0,7 & 0,15 & 0,05 & 0,1\\ 0 & 0,9 & 0,02 & 0,08\\ 0 & 0,2 & 0,75 & 0,05\\ 0 & 0,05 & 0 & 0,95\end{pmatrix}\end{array}$$

Printre proprietari 20 % utilizează pentru încălzire curentul electric, 35 % gazul natural, 40 % motorină și 5 % energia solară. Precizați care este distribuția proprietarilor care utilizează fiecare tip de sursă de căldură în a treia decadă.

R. Fie $X_0=(0,2\quad 0,35\quad 0,4\quad 0,05)$ **distribuția inițială. Atunci distribuția după prima decadă este** $X_1=X_0T$, **după a doua decadă** $X_2=X_1T=X_0T^2$ **și în fine după a treia decadă** $X_3=X_2T=X_0T^3$. **Găsim** $X_3=(0,069\quad 0,502\quad 0,204\quad 0,225)$, **ceea ce înseamnă că după a treia decadă (după 30 de ani) 6,9 % utilizează pentru încălzire curentul electric, 50,2 % gazul natural, 20,4 % motorina, iar 22,5 % energia solară.**

2. Botanica și ridicarea la putere a matricelor. O plantă bienală devine matură la un an după ce sămânța este pusă în pământ. În anul al doilea planta produce semințe care vor deveni plante în anul al treilea. După doi ani planta moare. Presupunem că o arie sălbatică conține 500.000 plante bienale, dintre care 225.000 sunt în primul an, iar 275.000 în anul al doilea. Presupunem că 70 % dintre plantele din anul întâi supraviețuiesc în anul al doilea

și că fiecare 1000 plante din anul doi dau naștere la 1400 plante de un an. Determinați numărul de plante după 5 ani, după n ani.

R. **Punem în evidență numărul de plante existente printr-o matrice linie** $X_0 = (225.000 \quad 275.000)$. **Procesul descris este un lanț Markov cu două stări: 1 (plante de un an) și 2 (plante de doi ani).**

Matricea de trecere este:

$$T = \text{stări curente} \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{matrix} \text{stări viitoare} \\ \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0,7 \\ 1,4 & 0 \end{pmatrix}$$

Distribuția plantelor după un an este dată de matricea $X_1 = X_0T$; **după doi ani avem distribuția** $X_2 = X_1T = X_0T^2$; **după trei ani avem distribuția** $X_3 = X_2T = X_0T^3$, **iar după n ani avem distribuția**

$X_n = X_{n-1}T = X_0T^n =$ (număr plante de 1 an, număr plante de 2 ani). **După 5 ani avem distribuția** $X_5 = X_0T^5$. **Se calculează** T^2, T^4, T^5. **Găsim** $T^5 = T^2 \cdot T^2 \cdot T$,

$T^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0,672 \\ 0,672 & 0 \end{pmatrix}$ **și deci** $X_5 = X_0T^5 = (369.754 \quad 151.263)$, **ceea ce înseamnă că după 5 ani vor fi 369.754 plante de 1 an și 151. 263 plante de doi ani.**

3. **Bibliotecara și opțiunile elevilor. Bibliotecara unui colegiu a constatat că în fiecare lună 0,8 % dintre elevi au optat pentru romane în detrimentrul cărților de poezie și numai 0,1 % dintre pasionații de romane au preferat cărțile de poezie. În prezent, în colegiu 88 % dintre elevi preferă cărțile de poezie și doar 12 % sunt pasionați de romane. Care va fi ponderea elevilor pasionați de romane sau cărți de poezie după patru luni ?**

R. **Considerăm distribuția inițială** $X_0 = (0,88 \quad 0,12)$ **și matricea de trecere este:**

$$T = \text{stări curente} \begin{matrix} \\ P \\ R \end{matrix} \begin{matrix} \text{stări viitoare} \\ \begin{matrix} P & R \end{matrix} \end{matrix} \begin{pmatrix} 0,992 & 0,008 \\ 0,001 & 0,999 \end{pmatrix}$$

După o lună distribuția este:

$X_1 = X_0T = \begin{pmatrix} \text{număr de elevi} & \text{număr de elevi} \\ \text{pasionați de poezie} & \text{pasionați de romane} \end{pmatrix}$;

după două luni: $X_2 = X_1T = X_0T^2, \ldots$,

iar după n **luni:** $X_n = X_{n-1}T = X_0T^n = \begin{pmatrix} \text{număr de elevi} & \text{număr de elevi} \\ \text{pasionați de poezie} & \text{pasionați de romane} \end{pmatrix}$.

4. **Grafurile și ridicarea la putere a matricelor.**

Considerăm graful orientat din Fig.8.

Matricea adiacentă asociată grafului este

$$A = \begin{matrix} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

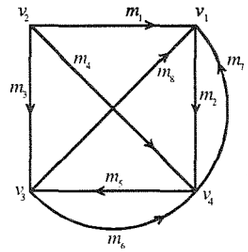


Fig. 8

Numărul de cifre 1 din A dă numărul de muchii. Fie $a_k(i,j)$ **elementul de pe linia** i, **coloana** j **din matricea** A^k. **Atunci** $a_k(i,j)$ **dă numărul drumurilor de lungime k de la vârful** v_i **la vârful** v_j **(demonstrație prin inducție după k). Prin drum în graful orientat înțelegem o înșiruire alternantă de vârfuri și muchii ordonate** $(v_0, m_1, v_1, m_2, \ldots, m_n, v_n)$ **unde fiecare muchie** m_i **începe cu** v_{i-1} **și se termină cu** v_i.

Numărul de muchii dă lungimea drumului. De exemplu, drumul $(v_2, m_1, v_1, m_2, v_4, m_7, v_1)$ leagă vârful v_2 cu vârful v_1 și are lungimea 3.

Calculăm puterile matricei A și avem:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aici $a_2(4,1) = 1$, adică există un drum de lungime 2 de la v_4 la v_1 $((v_4, m_7, v_1, m_2, v_4)$, $a_3(2,3) = 2$, adică sunt două drumuri de lungime 3 de la v_2 la v_3.

Acestea sunt: $(v_2, m_1, v_1, m_2, v_4, m_5, v_3)$, $(v_2, m_3, v_4, m_5, v_4, m_5, v_3)$.

Elementul de pe linia i și coloana j din matricea $B_k = A + A^2 + \ldots + A^k$, dă numărul de drumuri de lungime k sau mai mică decât k de la v_i la v_j.

Probleme rezolvate

1. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Să se calculeze $AB, BA, AB - BA, Tr(AB - BA)$ și deduceți că $AB - BA \neq I_2$.

R. Avem: $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 1 & 1\cdot 2 + 1\cdot 0 \\ 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 & 1\cdot 2 + (-1)\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 1 & 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) \\ 1\cdot 1 + 0\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observăm că $AB \neq BA$.

Acum $AB - BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ pentru care $Tr(AB - BA) = -1 + 1 = 0$.

Dacă prin absurd $AB - BA = I_2$, atunci ar trebui ca și $Tr(I_2)$ să fie tot zero.

Ori vedem că $Tr(I_2) = 1 + 1 = 2 \neq 0$. Deci $AB - BA \neq I_2$.

2. Să se arate că oricare matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ verifică ecuația

$X^2 - Tr(A)X + \det(A)I_2 = O_2$, numită ecuația Cayley – Hamilton.

R. Într-adevăr fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ pentru care $Tr(A) = a + d$ și $\det(A) = ad - bc$. Avem:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix} \text{ și deci}$$

$$A^2 - Tr(A)A + \det(A)I_2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix} - (a + d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} +$$

$$+ (ad - bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + dc & ad + d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Fie $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

Să se calculeze A^2, A^3 și apoi $f(A)$, unde $f(X)=X^3-3X^2+2X-5I_2$.

R. Avem $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ și

$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -7\\ 0 & 8\end{pmatrix}$.

Acum $f(A)$ are exprimarea

$f(A)=A^3-3A^2+2A-5I_2=\begin{pmatrix}1 & -7\\ 0 & 8\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1 & -7\\ 0 & 8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & -9\\ 0 & 12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ 0 & -5\end{pmatrix}$.

Observație. Matricea $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică ecuația Cayley – Hamilton și deci

$A^2-3A+2I_2=O_2$, $Tr(A)=3$, $\det(A)=2$. Acum

$f(A)=A\left(A^2-3A+2I_2\right)-5I_2=A\cdot O_2-5I_2=-5I_2$.

4. Fie $\mathcal{M}=\left\{A_\alpha=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\middle|\ \alpha\in\mathbb{R}\right\}$.

a) Să se arate că dacă $A_\alpha, A_\beta\in\mathcal{M}$, atunci $A_\alpha\cdot A_\beta\in\mathcal{M}$; (se spune că mulțimea de matrice $\mathcal{M}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor).

b) Calculați A_α^n, $n\in\mathbb{N}^*$.

c) Arătați că funcția $f:\mathcal{M}\to\left\{z_\alpha=\cos\alpha+i\sin\alpha\middle|\ \alpha\in\mathbb{R}\right\}$, $f(A_\alpha)=z_\alpha$

verifică egalitatea: $f(A_\alpha\cdot A_\beta)=f(A_\alpha)\cdot f(A_\beta)$, $\forall A_\alpha, A_\beta\in\mathcal{M}$.

R. a) Avem pentru $A_\alpha, A_\beta\in\mathcal{M}$,

$A_\alpha\cdot A_\beta=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta\\ -\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha & -\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta)\\ -\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}=A_{\alpha+\beta}\in\mathcal{M}$

b) Avem $\underbrace{A_\alpha\cdot A_\alpha\cdot\ldots\cdot A_\alpha}_{n}=\underbrace{A_{\alpha+\alpha+\ldots+\alpha}}_{n}=A_{n\alpha}$. Așadar $A_\alpha^n=\begin{pmatrix}\cos n\alpha & \sin n\alpha\\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha\end{pmatrix}$

c) Avem: $f(A_\alpha\cdot A_\beta)=f(A_{\alpha+\beta})=z_{\alpha+\beta}=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)=$

$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)=z_\alpha\cdot z_\beta=f(A_\alpha)\cdot f(A_\beta)$.

5. Fie matricele: $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & x\\ y & 1\end{pmatrix}$, $x,y\in\mathbb{R}$.

a) Calculați AB, BA.
b) Determinați x, y pentru care $AB=BA$.

R. a) Avem:
$AB=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x\\ y & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+y & x+1\\ 2+2y & 2x+2\end{pmatrix}$ și $BA=\begin{pmatrix}1 & x\\ y & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2x & 1+2x\\ y+2 & y+2\end{pmatrix}$.

b) Din cerința $AB=BA$ rezultă sistemul $\begin{cases}1+y=1+2x\\ x+1=1+2x\\ 2+2y=y+2\\ 2x+2=y+2\end{cases}$ cu soluția $x=y=0$.

6. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}$. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care $A^2=aA+bI_2$ și apoi arătați că $A^n=nA+(1-n)I_2$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

R. Numerele reale a, b se vor determina din cerința $A^2=aA+bI_2$.

Avem: $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 8\\ -8 & -7\end{pmatrix}$ și deci

$\begin{pmatrix}9 & 8\\ -8 & -7\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}5 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ sau $\begin{pmatrix}9 & 8\\ -8 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5a+b & 4a\\ -4a & -3a+b\end{pmatrix}$.

De aici avem sistemul $\begin{cases}5a+b=9\\ 4a=8\\ -4a=-8\\ -3a+b=-7\end{cases}$ cu soluția $a=2$, $b=-1$. Așadar $A^2=2A-I_2$.

Pentru a proba egalitatea $A^n=nA+(1-n)I_2$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ vom proceda prin inducție matematică.
Pentru $n=1$ relația devine $A=A$, adevărat.

Pentru $n=2$ avem de arătat că $A^2=2A-I_2$, ceea ce s-a văzut mai sus.

Presupunem că afirmația este adevărată pentru $n=k$, $A^k=kA+(1-k)I_2$ și vom arăta că pentru $n=k+1$ relația $A^{k+1}=(k+1)A+(-k)I_2$ este adevărată.

Într-adevăr $A^{k+1}=A^k\cdot A=\left[kA+(1-k)I_2\right]A=kA^2+(1-k)A=$

$=k(2A-I_2)+(1-k)A=(1+k)A-kI_2$,

unde în a doua egalitate am utilizat ipoteza de inducție, iar în a patra egalitate am uzat de $A^2=2A-I_2$ probată la început. Așadar relația este adevărată pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

7. Determinați mulțimea matricelor $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care comută cu matricea $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$

(Matricea X comută cu matricea A dacă $XA=AX$).

R. Considerăm matricea $X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ pentru care trebuie să avem $AX=XA$ sau

efectuând produsul de matrice $\begin{pmatrix} 3x+z & 3y+t \\ 5x+2z & 5y+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+5y & x+2y \\ 3z+5t & z+2t \end{pmatrix}$, iar de aici rezultă sistemul:

$$\begin{cases} 3x+z=3x+5y \\ 3y+t=x+2y \\ 5x+2z=3z+5t \\ 5y+2t=z+2t \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} z=5y & (1) \\ y-x+t=0 & (2) \\ 5x-z-5t=0 & (3) \\ z=5y & (4) \end{cases}.$$

Punem $z=5y$ în ecuațiile (2) și (3) și avem sistemul

$$\begin{cases} z=5y \\ y-x+t=0 \\ x-y-t=0 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} z=5y \\ x-y-t=0 \end{cases}.$$

Notând variabilele $y=\lambda\in\mathbb{R}$, $t=\mu\in\mathbb{R}$, atunci $x=\lambda+\mu$, $z=5\lambda$.

Deci forma matricelor X este $X=\begin{pmatrix} \lambda+\mu & \lambda \\ 5\lambda & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

8. Determinați matricele $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care comută cu matricele A și B unde $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

R. Fie $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Trebuie să avem verificate condițiile:

$$\begin{cases} AX=XA \\ BX=XB \end{cases} \text{ sau în scriere cu elemente } \begin{cases} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 3z & 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 2x+3y \\ z & 2z+3t \end{pmatrix} \end{cases}$$

iar de aici avem sistemul

$$\begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ x+2z=x \\ y+2t=2x+3y \\ 3z=z \\ 3t=2z+3t \end{cases} \text{ cu soluția } t=x=\lambda\in\mathbb{R},\ y=z=0.$$

Deci matricele X căutate au forma $X=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}=\lambda I_2$.

9. Să se determine mulțimea matricelor $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care comută cu orice matrice $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

R. Trebuie să găsim matricele X cu proprietatea $AX=XA$, $\forall A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, (1).

Fie $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Cum relația (1) are loc pentru orice matrice $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ea se verifică și pentru matricele:

1) $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ când $XA_1=A_1X$ dă $\begin{pmatrix} x & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, iar de aici $y=z=0$.

2) $A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ când $XA_2=A_2X$ dă $\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. De aici $x=t$.

Cu aceasta $X=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}=xI_2$. Ori se știe că I_2 comută cu orice matrice pătrată $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Deci $X=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$ reprezintă forma generală a matricelor căutate. O astfel de matrice X am numit-o matrice scalară.

Observație. Problema se poate generaliza ușor pentru matricele din $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

10. Să se rezolve ecuația $X^2=\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

R. Fie matricea X de forma $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ pentru care $X^2=\begin{pmatrix} x^2+yz & xy+yt \\ xz+tz & yz+t^2 \end{pmatrix}$.

Din ecuația matriceală rezultă sistemul $\begin{cases} x^2+yz=1 \\ xy+yt=12 \\ xz+tz=-4 \\ yz+t^2=1 \end{cases}$ cu soluțiile:

$(x_1=2,\ y_1=3,\ z_1=-1,\ t_1=2)$, $(x_2=-2,\ y_2=-3,\ z_2=1,\ t_2=-2)$.

Prin urmare ecuația are soluțiile: $X_1=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

11. Determinați matricele $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ cu $\det(X)=ad-bc=0$ care verifică relația

$$X^3-3X^2=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

R. Conform ecuației Cayley – Hamilton avem $X^2-Tr(X)\cdot X=0$. Punând $Tr(X)=t\in\mathbb{R}$ rezultă $X^2=tX$, $X^3=t^2X$. Ecuația devine

$$t^2X-3tX=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\left(t^2-3t\right)X=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\Rightarrow a=b=c=d.$$

De aici se ajunge la ecuația $2a^3-3a^2+1=0$ cu soluțiile $a_1=a_2=1$, $a_3=-\frac{1}{2}$.

Dacă $a=1$, atunci $X=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pentru $a=-\frac{1}{2}$ se obține $X=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

12. Fie $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ două matrici care comută, $AB=BA$.

Să se arate că:

a) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$;

b) $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$;

c) $A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$;

d) $(A+B)^n = C_n^0 A^n + C_n^1 A^{n-1} B + C_n^2 A^{n-2} B^2 + ... + C_n^n B^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

R.a) Avem:

$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A(A+B) + B(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 =$

$= A^2 + AB + AB + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$;

b) Aplicăm distributivitatea înmulțirii în raport cu adunarea și obținem:

$(A+B)(A-B) = A(A-B) + B(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2$.

c) Se dezvoltă membrul drept.

d) Prin inducție matematică.

REZUMATUL CAPITOLULUI

Noțiuni	Definiție	Notație. Descriere
Matrice de tip (m,n), cu m linii și n coloane	$A: N_m \times N_n \to \mathbb{R}$ $N_k = \{1,2,...,k\}, k \in \mathbb{N}^*$	$A(i,j) = a_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ sunt elementele matricei A $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$
Transpusa matricei A de tip (m,n)	$A': N_n \times N_m \to \mathbb{R}$	$A' = {}^tA$, ${}^tA(i,j) = A(j,i) = a_{ji}$, $i = \overline{1,n}, j = 1,m$ ${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{m2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ (liniile lui A devin coloane în ${}^tA$)
Matricea nulă de tip (m,n)	$A(i,j) = 0, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$	$A = O_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$ (are toate elementele egale cu zero)
Matrice pătratică de ordin n	$n = m$	Sistemul ordonat $(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$ reprezintă diagonala principală a matricei, iar $(a_{1n}, a_{2n-1}, ..., a_{n1})$ diagonala secundară $T_r(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$ = urma matricei A
Matrice unitate de ordin n	$I_n(i,j) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$ $i, j \in \{1,2,...,n\}$	$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$
Operații cu matrice	1) Adunarea a două matrice de același tip (m,n)	$A + B = C$, unde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ (adunarea se face pe componente)
	2) Produsul dintre scalarul λ și matricea A de tip (m,n)	$\lambda A = C$, unde $c_{ij} = \lambda a_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ (fiecare element din A se înmulțește cu λ)
	3) Produsul dintre o matrice A de tip (m,n) și o matrice B de tip (n,p)	$AB = C$, unde $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,p}$ (se înmulțește scalar fiecare linie din A cu fiecare coloană din B)
	4) Ridicarea la putere a unei matrice pătratice de ordin n	$A^k = \begin{cases} A, k = 1 \\ A^{k-1} \cdot A, k \geq 2 \end{cases}$

Probleme propuse

Tabele de tip matriceal. Matrice

1.În activitatea voastră zilnică aveți următoarele activități: sport, studiu, vizionare programe TV (în ore). Descrieți-le pentru o săptămână (de luni până duminecă), printr-un tablou, unde pe linii sunt activitățile, iar pe coloane zilele din săptămână.

2.Un teatru al unui oraş are trei casierii C_1, C_2, C_3 situate în diferite zone ale orașului. Tabelele de mai jos indică numărul de bilete vândute în cele patru săptămâni (1, 2, 3, 4) din două luni consecutive.
Scrieți rezultatele din tabele sub formă de tabel matriceal.

Luna I

Săptămâna / Caseria	1	2	3	4
C_1	375	411	389	400
C_2	380	400	365	383
C_3	361	395	318	379

Luna II

Săptămâna / Caseria	1	2	3	4
C_1	330	321	355	363
C_2	280	364	210	334
C_3	217	305	311	328

3.Fie $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 3 & 5 & -3 & 4\\ 0 & 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

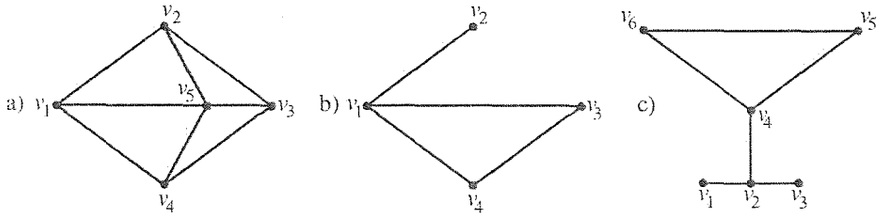
Determinați: a) tipul matricei; b) a treia coloană; c) a doua linie; d) a_{34}; e) ${}^tA$.

4.Fie $A=\{a_1,a_2,a_3\}$, $B=\{b_1,b_2\}$. Care perechi ordonate aparțin relației $\mathfrak{R}$ reprezentată prin matricea $M_{\mathfrak{R}}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

5.Fie $A=\{a_1,a_2,a_3\}$.

a) Scrieți matricea asociată unei relații reflexive pe A.
b) Scrieți matricea asociată unei relații simetrice pe A.
c) Scrieți matricea asociată unei relații antisimetrice pe A.

6.Determinați matricea asociată fiecăruia din grafurile de mai jos.



7.Determinați graful neorientat care are matricea adiacentă $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ relativ la vârfurile v_1, v_2, v_3, v_4 în această ordine.

8.Scrieți o matrice din $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{N})$, $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{Z})$, $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{Q})$, $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{C})$.

9.a) Câte matrice sunt de tip (1, 3) care au elemente egale cu 0 sau 1 ?
b) Câte matrice sunt de tip (2, 2) care au elementele egale cu 0, 1 sau 2 ?
c) Câte matrice sunt de tip (3, 4) care au elementele egale cu 0 sau 1 ?

10.a) Sistemului $\begin{cases}3x-2y=5\\ -5x+3y=-3\end{cases}$ asociați-i matricea coeficienților necunoscutelor (fiecare linie conține coeficienții necunoscutelor din acea ecuație). Completați matricea obținută prin coloana termenilor liberi (se obține matricea extinsă a sistemului).

b) Aceleași cerințe pentru sistemul $\begin{cases}x-2y+3z=0\\ 3y-z=5\\ 4x-5y=-3\end{cases}$.

Operații cu matrice

Egalitatea a două matrice

1.Să se determine numerele x, y, z, t astfel încât să aibă loc egalitatea de matrice:

a) $\begin{pmatrix}x-2 & y+3\\ 3-2z & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 1+t\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}x+1 & 0 & 0\\ 0 & 2y & t-5\\ z+3 & 0 & 1\end{pmatrix}=I_3$;

c) $\begin{pmatrix}x^2 & y^2 & 1+t^2\\ y+2 & z-1 & x+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ 4 & 2 & 4\end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix}2x & 3x+y\\ x-7y & 2x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y+3 & 8-y\\ -5 & 4y\end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix}y+3x & -1\\ 3 & y-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2 & -1\\ 3 & 5\end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix}\sqrt[3]{x} & x+y\\ xy & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-\sqrt[3]{y} & 28\\ 27 & 5\end{pmatrix}$.

Transpusa unei matrice

1.Scrieți transpusa fiecăreia dintre matricele de mai jos:

a) $A=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 5\end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$; c) $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$; d) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$;

e) $A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 5 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}$; f) $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & -4 & 5\\ -6 & 7 & -4\end{pmatrix}$; g) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -2 & 0 & 5\\ 3 & 5 & 2\end{pmatrix}$; h) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -3\\ -1 & 0 & 2\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

2.Scrieți forma matricei simetrice pentru $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, în cazurile $n\in\{4,5\}$.

3.Câte matrice simetrice $A\in\mathcal{M}_n(\{0,1\})$ există în cazul $n=2$? Dar pentru $n=3$?

4.Dați exemple de matrice antisimetrice de ordin 2, 3 și 4.

Adunarea matricelor

1 .Să se calculeze $A+B$ în cazurile (în care are sens):

a) $A=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix}1&-3\\0&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&4\\-5&-3\end{pmatrix}$; c) $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1\\2&0\end{pmatrix}$;

d) $A=\begin{pmatrix}1+i&-i&3i\\0&2i&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1-3i&2+i&1\\i&1+i&-i\end{pmatrix}$; e) $A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\4&-5&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}$;

f) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}9&8&7\\6&5&4\\3&2&1\end{pmatrix}$.

2 .Se consideră matricele: $A=\begin{pmatrix}1&3\\-2&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\\0&2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\\3&1\end{pmatrix}$.

Să se calculeze: $A+B$, $A-B$, $A+C$, $A-C$, $B+C$, $B-C$, $A+B+C$, $A+B-C$, $A-B-C$, $A+C-B$, $B+C-A$, $B-C-A$.

3 .Să se determine $x,y,z\in\mathbb{R}$ astfel încât:

$$\begin{pmatrix}x-1&2&3z\\4&3&y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&y+1&0\\x&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&3\\2&4&-2\end{pmatrix}.$$

4 .Fie matricele $A=\begin{pmatrix}1&-2\\3&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4&5\\1&-3\end{pmatrix}$.

Să se rezolve ecuațiile: a) $A+X=B$; b) $X+B=A$.

5 .Să se determine matricele A, B astfel încât: $A+B=\begin{pmatrix}3&1\\-2&5\end{pmatrix}$, $A-B=\begin{pmatrix}1&-3\\6&1\end{pmatrix}$.

6 .a) Fie $A=\begin{pmatrix}2&-3\\5&4\\0&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$. Calculați $A+{}^tB$ și $B+{}^tA$.

b) Fie $A=\begin{pmatrix}3&0&5\\-2&4&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&5&0\\3&-2&4\end{pmatrix}$. Calculați ${}^t(B+A)$, ${}^tA$, ${}^tB$ .Ce constatați ?

7 .Arătați că suma a două matrice simetrice (antisimetrice) de același ordin este tot o matrice simetrică (antisimetrică).

8 .Fie $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Arătați că matricea $M+{}^tM$ este simetrică.

b) Arătați că matricea $M-{}^tM$ este antisimetrică.

c) Arătați că $M=S_M+A_M$, unde $S_M=\frac{1}{2}\left(M+{}^tM\right)$, $A_M=\frac{1}{2}\left(M-{}^tM\right)$.

(Orice matrice pătratică este suma dintre o matrice simetrică și alta antisimetrică).

Aplicații. 1) $M=\begin{pmatrix}1&-2\\3&5\end{pmatrix}$; 2) $M=\begin{pmatrix}-1&0&2\\3&-4&-3\\0&2&1\end{pmatrix}$.

9 .Se consideră matricele

$$A_k=\begin{pmatrix}k&2k-1\\2^k-1&3k^2\end{pmatrix},\ B_k=\begin{pmatrix}k&k(k+1)&k^2(k+1)\\k(2k-1)&0&k(k-1)\end{pmatrix},\ k\in\mathbb{N}^*.$$

Să se calculeze sumele $S_n=\sum_{k=1}^{n}A_k$, $T_n=\sum_{k=1}^{n}B_k$.

10 .Să se calculeze suma de matrice $S_n=\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix}1&\omega^k\\\omega^{2k}&\omega^{3k}\end{pmatrix}$, unde $\omega^2+\omega+1=0$.

11 .Să se determine $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dacă $A+{}^tA=\begin{pmatrix}4&5\\-6&-4\end{pmatrix}$.

12 .Se consideră aplicațiile $f,g:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ definite prin $f(x,y)=(2x+3y,-x+5y)$, $g(x,y)=(-3x+y,x-2y)$. Arătați că f, g sunt aplicații liniare și scrieți matricea asociată fiecărei aplicații. Determinați matricea asociată sumei $f+g$.

13 .Un magazin care vinde tricouri de diferite culori: albastru, roșu, alb, verde și mărimi diferite: XL, XXL, M are două puncte de vânzare.
Situația vânzărilor (număr de bucăți) într-o lună pentru cele două puncte este redată prin matricele:

$$A=\begin{array}{c}\\\text{albastru}\\\text{roșu}\\\text{alb}\\\text{verde}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{XL}&\text{XXL}&\text{M}\end{array}\\\begin{pmatrix}50&105&98\\39&86&43\\73&68&75\\29&53&34\end{pmatrix}\end{array},\quad B=\begin{array}{c}\\\text{albastru}\\\text{roșu}\\\text{alb}\\\text{verde}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{XL}&\text{XXL}&\text{M}\end{array}\\\begin{pmatrix}46&100&79\\41&58&39\\67&73&71\\30&42&37\end{pmatrix}\end{array}.$$

Determinați matricea C care dă vânzarea de tricouri realizată de magazin în acea lună. Ce semnificație au elementele: c_{23}, c_{32}, c_{43}?

14 .În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$, $B(2,5)$, $C(4,3)$, $D(5,6)$. Construiți matricea asociată patrulaterului $ABCD$. Fie aceasta S. Considerăm matricea $T=\begin{pmatrix}-2&-2&-2&-2\\3&3&3&3\end{pmatrix}$. Cum se obține patrulaterul $A'B'C'D'$ corespunzător matricei $S+T$ din patrulaterul $ABCD$?

15 .Folosind Pătratul lui Polybe:

a) cifrați maxima: „Cine gândește puțin se înșeală mult" (Leonardo da Vinci).

b) descifrați textul: „32 34 14 15 43 44 24 11 43 15 33 44 24 32 15 33 44 45 31 32 34 14 15 42 11 44 11 31 51 11 31 34 42 24 24 35 42 34 35 42 24 24".

c) Codificați mesajul de la a) utilizând matricea $M=\begin{pmatrix}1&2&3&1&2&3&1&2&\dots\\3&2&1&3&2&1&3&2&\dots\end{pmatrix}$ și operația de adunare a matricelor.

Înmulțirea cu scalari a matricelor

1 .Compania „Petrom" distribuie la pompele de la benzinăriile proprii următorii

carburanți: benzină premium (0,93 €/l), benzină fără plumb (0,95 €/l) și motorină (0,85 €/l) (în paranteză este indicat prețul în €/l).

a) Scrieți matricea prețurilor combustibililor.

b) Un raport al companiei arată că se impune o descreștere cu 3% a prețurilor tuturor combustibililor ca urmare a scăderii prețului țițeiului pe piața mondială. Descrieți matricea noilor prețuri ale combustibililor, utilizând matricea de la a).

c) Din cauza ridicării prețului de achiziție al petrolului, compania decide creșterea prețului tuturor tipurilor de combustibili cu 2% față de situația inițială. Descrieți matricea care conține noile prețuri ale combustibililor, utilizând matricea de la a).

2 .Salariile profesorilor sunt date, în Euro, în matricea de mai jos în funcție de vechime și gradele didactice obținute.

$$\begin{array}{c} \\ \text{Ani vechime de la} \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} \text{Definitivat} & \text{Gradul II} & \text{Gradul I} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 225 & 240 & 260 \\ 235 & 255 & 300 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \begin{matrix} 1 \text{ la } 10 \\ 11 \text{ la } 20 \end{matrix} \end{array}.$$

Scrieți matricea care dă salariile profesorilor dacă ele s-au mărit cu 12% pentru toți profesorii.

3 .Se consideră pătratul $OABC$ în reperul xOy, unde $O(0,0)$, $A(3,0)$, $B(3,3)$, $C(0,3)$.

Scrieți matricea T asociată figurii $OABC$. Determinați matricele $3T$ și $\frac{1}{3}T$ și desenați figurile asociate.

4 .Fie $A=\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&2&-4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-2&1\\5&1&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$.

Să se calculeze $-3A+2B-5\,{}^tC$.

5 .Determinați x,y,z,t dacă pe rând:

a) $x\begin{pmatrix}2&5\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}4&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&33\end{pmatrix}$; b) $x\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\-3\\16\end{pmatrix}$;

c) $x\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}t&2\\3&0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$; d) $3\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&6\\-1&2t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&x+y\\z+t&3\end{pmatrix}$.

6 .Fie $A=\begin{pmatrix}-1&2\\-3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&0\\-3&1\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $3(A+2B)-2(3A-B)+5I_2$;

b) Să se afle $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dacă $2(X-I_2)=3A+4B$.

7 .a) Să se arate că dacă $\alpha\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1&2&0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\end{pmatrix}$, atunci $\alpha=\beta=\gamma=0$.

b) Să se arate că există $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $\begin{pmatrix}5&6&9\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&2&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}$.

8 .Să se determine matricea X dacă verifică pe rând egalitățile:

a) $\begin{pmatrix}-1&0\\2&3\end{pmatrix}-5X+2\begin{pmatrix}1&-3\\5&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;

b) $3X+\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\\2&-3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&3\\7&4\\-2&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&6\\-9&3\\3&0\end{pmatrix}$, $X\in\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$;

c) $i\begin{pmatrix}1&-i&i\\i&0&1\end{pmatrix}+5X=2i\begin{pmatrix}i&0&1\\-1&-2&i\end{pmatrix}$, $X\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C})$.

9 .Să se determine matricele X,Y în fiecare din cazurile:

a) $\begin{cases}X-3Y=\begin{pmatrix}1&5\\3&-2\end{pmatrix}\\X+2Y=\begin{pmatrix}6&0\\-2&3\end{pmatrix}\end{cases}$, $X,Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; b) $\begin{cases}2X+3Y=\begin{pmatrix}8&7&-2\\1&-6&5\end{pmatrix}\\X-2Y=\begin{pmatrix}-3&0&-1\\-3&4&-1\end{pmatrix}\end{cases}$, $X,Y\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$;

c) $\begin{cases}2X-5Y=\begin{pmatrix}4&-3\\-5&6\end{pmatrix}\\3X+2y=\begin{pmatrix}-3&5\\7&1\end{pmatrix}\end{cases}$, $X,Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; d) $\begin{cases}X+Y=4\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\\2X-Y=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\2&-2&2\\5&-5&5\end{pmatrix}\end{cases}$, $X,Y\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

10 .Se consideră mulțimea matricelor de forma $M=\left\{\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}\middle|\,a,b,c\in\mathbb{C}\right\}$.

a) Arătați că I_3, $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ aparțin lui M.

b) Arătați că $\forall X,Y\in\mathcal{M}$, $\forall\alpha\in\mathbb{C}$, atunci $X+Y$, $\alpha X\in\mathcal{M}$.

c) Arătați că $\forall A\in\mathcal{M}$, există $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$, astfel încât $A=\alpha I_3+\beta B+\gamma C$.

Înmulțirea matricelor

1 .Calculați produsele de matrice $A\cdot B$ (dacă au sens), unde:

1) $A=\begin{pmatrix}-1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}1&\sqrt{2}&-\sqrt{3}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1\\0\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix}2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&3\\2&0\end{pmatrix}$; 4) $A=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}&-1\end{pmatrix}$;

5) $A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1\end{pmatrix}$; 6) $A=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-5\end{pmatrix}$;

7) $A=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}$; 8) $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\cos\beta&-\sin\beta\\\sin\beta&\cos\beta\end{pmatrix}$;

9) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\5&4&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&3&1&4\\2&4&1&0\\1&2&0&2\end{pmatrix}$; 10) $A=\begin{pmatrix}3&1\\2&5\\1&-4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&-2\\4&3\end{pmatrix}$;

11) $A=\begin{pmatrix}1&i\\-2i&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}i&-3i\\0&1\end{pmatrix}$; 12) $A=\begin{pmatrix}1+i&1-i&i\\2i&1&-3i\\0&1+i&1-i\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2i&1-i&0\\3&i&1\\-i&0&1+i\end{pmatrix}$.

2 .Să se determine $x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât: $\begin{pmatrix}2x&1\\3&-y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&x\\2y&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&11\\-35&-6\end{pmatrix}$.

3 .Fie $A=\begin{pmatrix}2&-3&0\\1&-1&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\\0&1\end{pmatrix}$. Verificați egalitatea ${}^t(A\cdot B)={}^tB\cdot{}^tA$.

4 .Fie $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$. Calculați AB, BA, $AB-BA$, $Tr(AB-BA)$ și deduceți că $AB-BA\neq I_3$.

5 . Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1&3\\2&-4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-2\\1&3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}$.

Verificați prin calcul egalitățile: $A(B+C)=AB+AC$, $(AB)C=A(BC)$.

6 .Determinați mulțimea matricelor $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ care comută cu matricea

$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

7 .Determinați matricele $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care comută cu matricele $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}-3&2\\2&1\end{pmatrix}$.

8 .Determinați mulțimea matricelor $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ care comută cu orice matrice $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

9 .Să se rezolve ecuațiile matriceale:

1) $\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-1&7\\3&5\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}X-X\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$;

3) $X\begin{pmatrix}-3&4&0\\1&1&-2\\-2&-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&4&2\\1&7&-7\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}2&0&1\\0&-3&0\\1&0&2\end{pmatrix}X=X\begin{pmatrix}2&0&1\\0&-3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$.

10 .1) Fie $A(x)=\begin{pmatrix}1-2x&2x\\x&1+x\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$. Arătați că:

a) $A(x)A(y)=A\big(1-(1-x)(1-y)\big)$, $x,y\in\mathbb{R}$;

b) $A(x_1)A(x_2)\ldots A(x_n)=A\big(1-(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)\big)$, $x_k\in\mathbb{R}$, $k=\overline{1,n}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

2) Se consideră $A(x)=\begin{pmatrix}1&x&2x^2+x\\0&1&4x\\0&0&1\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$. Arătați că:

a) $A(x)A(y)=A(x+y)$, $x,y\in\mathbb{R}$;

b) $A(x_1)A(x_2)\ldots A(x_n)=A(x_1+x_2+\ldots+x_n)$, $x_k\in\mathbb{R}$, $k=\overline{1,n}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

11 .O matrice pătratică A se numește stocastică dacă are elemente pozitive și suma elementelor de pe fiecare linie este egală cu unu. O matrice stocastică având suma elementelor de pe fiecare coloană egală cu unu se numește dublu stocastică. Arătați că:
a) produsul a două matrice stocastice este tot o matrice stocastică (arătați pentru $n=3$);
b) produsul a două matrice dublu stocastice este, de asemnea, o matrice dublu stocastică.
Verificați pentru:

$a')\ A=\begin{pmatrix}\frac12&\frac12\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$; $b')\ A=\begin{pmatrix}\frac12&0&\frac12\\\frac12&\frac12&0\\0&\frac12&\frac12\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\frac15&\frac15&\frac35\\\frac25&\frac25&\frac15\\\frac25&\frac25&\frac15\end{pmatrix}$.

12 .Se consideră mulțimea de matrice $M=\left\{A_n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}\middle|\,n\in\mathbb{Z}\right\}$ în raport cu operația de înmulțire.
Atunci:
a) $A_n=A_m\Leftrightarrow n=m$;
b) arătați că dacă $A_n,A_m\in\mathcal{M}$, atunci $A_n\cdot A_m\in\mathcal{M}$;
c) arătați că înmulțirea pe $\mathcal{M}$ este comutativă;
d) arătați că există $A_u\in\mathcal{M}$ pentru care $A_n\cdot A_u=A_n$, $\forall A_n\in\mathcal{M}$;
e) pentru orice $A_n\in\mathcal{M}$, există $A_{n'}\in\mathcal{M}$ astfel încât $A_n\cdot A_{n'}=A_u$;
f) funcția $f:\mathcal{M}\to\mathbb{Z}$, $f(A_n)=n$ este bijectivă și în plus $f(A_n\cdot A_m)=f(A_n)+f(A_m)$, $\forall A_n,A_m\in\mathcal{M}$.

13 .Fie $\mathcal{M}=\left\{M(a)=\begin{pmatrix}1&0&a\\-a&1&-\frac{a^2}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}\middle|\,a\in\mathbb{R}\right\}$ cu operația de înmulțire a matricelor.
Atunci:
a) $M(a)=M(b)\Leftrightarrow a=b$;
b) arătați că dacă $M(a),M(b)\in\mathcal{M}$, avem $M(a)M(b)\in\mathcal{M}$;
c) înmulțirea pe $\mathcal{M}$ este comutativă;
d) există $M(u)\in\mathcal{M}$ pentru care $M(a)M(u)=M(a)$, $\forall M(a)\in\mathcal{M}$;

e) pentru orice $M(a) \in \mathcal{M}$, există $M(a') \in \mathcal{M}$ astfel încât $M(a)M(a') = M(u)$;

f) aplicația $f : \mathbb{R} \to \mathcal{M}$, $f(a) = M(a)$ este bijectivă și în plus $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

14 .Se consideră mulțimea de matrice $\mathcal{M} = \left\{ M(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$.

Verificați cerințele a) – e) din problema precedentă.

15(Înmulțirea matricelor și codul de bare). Numerele de identificare ale produselor etc. pot fi reprezentate prin simboluri de coduri de bare pentru a permite citirea electronică la punctele de vânzare, la recepția în depozite, în comerțul electronic etc. Codurile de bare sunt aplicate de producător. Sistemul de codificare este gestionat de Uniform Code Council (UCC) (în Canada și SUA) și respectiv Article Numbering Association (EAN) în restul țărilor. Iată structura de numerotare $EAN/UCC-13 : N_1N_2N_3 \ldots N_{12}C$, unde primele trei cifre $N_1N_2N_3$ reprezintă țara, iar $N_4 \ldots N_{12}$ reprezintă prefix companie + referințe despre articol. În fine C este cifra de control, rezultată dintr-un calcul în care intră toate celelalte cifre ale numărului și este folosită pentru a ne asigura că numărul este corect, pentru a detecta eventualele erori în scrierea numărului.

Pentru a afla cifra de control C în cazul codului *594843000001* se face produsul matricilor $\begin{pmatrix} 5 & 9 & 4 & 8 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,12}(\mathbb{N})$,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ \vdots \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{12,1}(\mathbb{N})$

când obținem:

$5 \cdot 1 + 9 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + + 1 \cdot 3 = 76$

Se scade acest număr din cel mai apropiat multiplu de 10, în acest caz din 80. Deci $C = 80 - 76 = 4$, iar numărul complet de identificare este 5948430000014. Determinați cifra de control în cazurile codurilor 594843000010, 594843000031.

16(Codul ISBN și înmulțirea matricelor). Cărțile sunt identificate prin International Standard Book Number (ISBN), un cod de 10 cifre $x_1x_2 \ldots x_{10}$, pentru a identifica țara $x_1x_2x_3$, editorul $x_4 \ldots x_7$, numărul asociat cărții x_8x_9 și în final cifra de control x_{10}, care poate fi o cifră sau x (utilizat pentru a reprezenta numărul 10).

Cifra de control x_{10} se alege astfel încât $\sum_{i=1}^{10} ix_i \equiv 0 \pmod{11}$ și este utilizată pentru a detecta erorile în cifrele individuale ($a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow a - b \vdots n, a, b \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$).

Să determinăm cifra de control pentru ISBN: 973-8222-20-C. Se face produsul matricelor: $\begin{pmatrix} 9 & 7 & 3 & 8 & 2 & 2 & 2 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} = 116 + 10C$.

Din $116 + 10C \equiv 0 \pmod{11} \Leftrightarrow 11 \cdot 10 + 6 + 10C \equiv 0 \pmod{11} \Leftrightarrow 6 + 10C \equiv 0 \pmod{11}$. De aici $C = 6$.

Deci codul ISBN este 973-8222-20-6.

Verificați dacă cifra de control este corectă pentru codurile ISBN ale următoarelor cărți:

1) 973-8222-18-4;

2) 973-8222-21-4;

3) 973-8222-22-2.

17(Podiumul diviziei A la fotbal). Numărul de meciuri câștigate (C), nule (E) și pierdute (P) acasă și în deplasare de echipele Dinamo, Steaua, Rapid sunt date de matricele:

$$A = \begin{matrix} \\ \text{Dinamo} \\ \text{Steaua} \\ \text{Rapid} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} C & E & P \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 10 & 3 & 2 \\ 9 & 5 & 1 \\ 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} \end{matrix} \qquad D = \begin{matrix} \\ \text{Dinamo} \\ \text{Steaua} \\ \text{Rapid} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} C & E & P \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 8 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

În întreg campionatul se desfășoară de fiecare echipă 30 meciuri, dintre care 15 acasă și 15 în deplasare. Dacă pentru un meci câștigat se acordă 3 p, pentru meci egal 1 punct, iar pentru meci pierdut 0 puncte, fie $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, matricea punctelor de meci. Ce semnifică AP, DP, $AP + DP$? Stabiliți ordinea celor trei echipe.

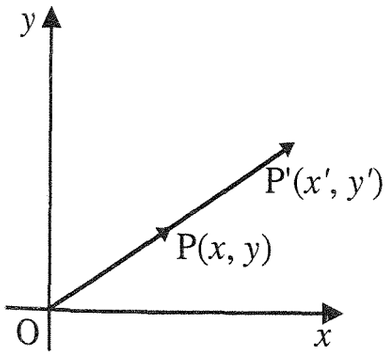
18 .Fie matricea plată pentru un joc $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Determinați plata medie a jocului dacă cei doi jucători au strategiile date de $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

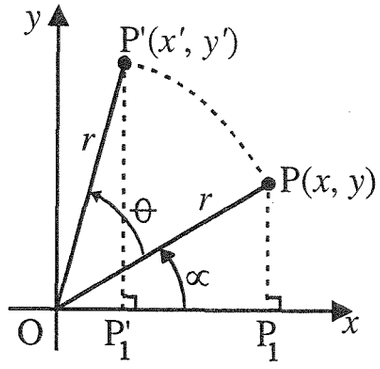
19(Microbistul și înmulțirea matricelor). Un microbist a constatat, urmărind scorurile înregistrate în ultimii ani la meciurile de fotbal Dinamo-Steaua, că dacă Dinamo a câștigat ultima dată, atunci sunt 45 % șanse ca să câștige din nou, iar dacă Steaua a câștigat ultima dată, atunci sunt 30 % șanse să câștige din nou. Presupunem că acum fiecare echipă are 50 % șanse de câștig.

a) Scrieți matricea care dă șansele de câștig pentru cele două echipe (matricea de trecere).

b) Determinați predicția pentru următoarele două meciuri ale celor două echipe.

c) Când acest proces se va stabiliza ? (Un proces se va stabiliza dacă există $X = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix}$ astfel încât $XT = X$).





20.(Animația și înmulțirea matricelor)

1) Omotetia de centru O și coeficient $k \neq 0$ este aplicația $\mathcal{O}_{O,k} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $\mathcal{O}_{O,k}(P) = P'$ astfel încât: 1) punctele O, P, P' sunt

coliniare şi 2) $OP' = k \cdot OP$. Pentru $k > 1$, vorbim de o dilatare, iar pentru $0 < k < 1$, vorbim de o contracţie. Arătaţi că matricea asociată acestei transformări este $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$.

2)Rotaţia de centru O şiunghi $\theta \in \mathbb{R}$ este aplicaţia $\mathfrak{R}_{O,\theta} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $\mathfrak{R}_{O,\theta}(P) = P'$ astfel încât: 1) $OP = OP'$ şi 2) $m\left(\widehat{POP'}\right) = \alpha$. Arătaţi că matricea asociată acestei transformări este $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

21 .Se consideră în reperul cartezian xOy punctele $A_1(4,-2)$, $A_2(6,4)$, $A_3(2,6)$.

a) Să se determine imaginile acestor puncte după aplicarea unei omotetii de centru O şi coeficient $\frac{1}{2}$, urmată de o rotaţie de centru O şi unghi 30^o.

b) Să se determine imaginile acestor puncte după aplicarea unei rotaţii de centru O şi unghi 30^o, urmată de o omotetie de centru O şi coeficient $\frac{1}{2}$.

22 (Proiecţia pe o dreaptă). În reperul cartezian xOy se consideră dreapta de ecuaţie $y = 2x$. Fie $P(x,y)$ un punct al planului, iar $P'(x',y')$ proiecţia lui P pe această dreaptă. Găsiţi matricea asociată acestei transformări.

Ridicarea la putere a unei matrice

1 .Să se calculeze $f(A)$ dacă : a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $f(X) = X^2 - 5X + 7I_2$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $f(X) = 3X^2 - 7X - 4I_3$.

2 .Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Să se determine cea mai mică valoare a lui $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $A^n = I_2$.

3 .Pentru matricea A arătaţi că există numerele reale a, b astfel încât să aibă loc egalitatea indicată:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A^3 = aA + bI_2$; 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $A^3 = aA + bI_2$;

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = aA^2 + bA$.

4 .Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ \omega^2 & 1 \end{pmatrix}$, $\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

Să se calculeze: a) $A^2, A^3, A^4, \ldots$; b) $A^2 + A^3 + \ldots + A^n$.

5 .Să se rezolve ecuaţiile matriceale: 1) $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $X^2 = 3X$.

6 .Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. a) Să se calculeze A^2; b) Să se arate că $A^n = A$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

c) Să se arate că $A + 2A^2 + 3A^3 + \ldots + nA^n = \frac{n(n+1)}{2}A$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

7 .Să se calculeze A^n, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $S_n = \sum_{k=1}^{n} A^k$ pentru:

I. 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$; 4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

5) $A = \begin{pmatrix} a+1 & a-1 \\ a-1 & a+1 \end{pmatrix}$; 6) $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$; 7) $A = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ \sqrt{3}-1 & \sqrt{3}+1 \end{pmatrix}$; 8) $A = \begin{pmatrix} i & i \\ 0 & i \end{pmatrix}$.

II. 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

5) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; 6) $A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

8 .Se consideră matricele: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = 3A + 7B$.

a) Arătaţi că $AB = BA$ şi că există $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care $A^{n+1} = \alpha A^n$.

b) Calculaţi A^n, B^n, C^n, $S = A + A^2 + \ldots + A^n$.

9 .Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Arătaţi că $(A+B)^n = A^n + B^n$.

10 .Pentru matricea A arătaţi că există $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ astfel încât să aibă loc relaţiile alăturate pentru fiecare caz în parte:

1) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$, $A^n = a_n A + b_n I_2$, $A^n = I_2 + 4nB$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^n = a_n A + b_n I_3$, $A^n = \frac{2^{n+1}}{3}(A + I_3) + \frac{(-1)^n}{3}(2I_3 - A)$.

11 .a) Utilizând exerciţiul 10 de la „Înmulţirea matricelor", calculaţi $A^n(x)$.

b) Utilizând exerciţiul 13 de la „Înmulţirea matricelor", calculaţi $M^n(a)$.

c) Fie $M = \left\{ A_a = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$. 1) Arătaţi că $A_a \cdot A_b = A_{2ab}$ şi calculaţi A_a^n.

2) Calculați $\sum_{k=1}^{n} A_1^k$.

12.Se consideră matricea $A=\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$. Să se determine $A^n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}$, $n\in\mathbb{N}^*$ și să se calculeze limitele șirurilor $(a_n),(b_n),(c_n),(d_n)$.

13.Fie $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ și arătați că $A^n=\begin{pmatrix}f_{n-1} & f_n\\ f_n & f_{n+1}\end{pmatrix}$, unde $f_0=0$, $f_1=1$, $f_2=1$, $f_3=2$, ... (șirul lui Fibonacci).

14.Fie matricea $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. Să se arate că există șirurile (a_n), (b_n) pentru care $A^n=a_nA+b_nI_2$ și să se calculeze $\lim\limits_n \frac{a_n}{b_n}$.

15.Într-un colegiu se desfășoară cercuri de matematică și fizică la clasele a IX-a în vederea participării la olimpiadă. Se știe că anual 20 % dintre elevii de la cercul de matematică trec la cercul de fizică și 25 % dintre elevii de la cercul de fizică la cel de matematică. În colegiu sunt la clasa a IX-a 60 de elevi la cercul de matematică și 40 de elevi la cercul de fizică, iar numărul elevilor de la cele două cercuri rămâne constant. Determinați numărul de elevi de la cele două cercuri după doi ani.

16(Supermarketurile și preferințele clienților). Într-un cartier al unui oraș se află două supermarketuri A, B. În fiecare lună magazinul A menține 98 % dintre cumpărători și pierde 2 % dintre clienții care merg la magazinul B. Magazinul B își păstrează 95 % dintre clienți și pierde 5 % , aceștia făcându-și cumpărăturile din A. La început magazinul A are 25 % dintre cumpărătorii cartierului, iar B restul de 75 %. Determinați procentul de cumpărători de la cele două magazine după 5 luni; după n luni.

17(Leasingul de automobile). Un dealer (comerciant) de automobile marca Audi (A3, A4, A6, A8) vinde mașini în leasing pe doi ani de zile. La sfârșitul termenului, clienții pot negocia un nou contract pentru o mașină nouă. Rezultatele precendentelor contracte de leasing arată că 80 % dintre clienții care au optat pentru marca A3 își mențin solicitarea și pentru noul contract. În plus 10 % dintre clienții doritori de A4 vor opta pentru A3, iar 5 % dintre cei care au achiziționat A6, A8 vor contracta A3.
Scrieți matricea de trecere asociată leasingului. Presupunem că acum sunt 200 de clienți pentru A3 și câte 100 pentru fiecare dintre modelele A4, A6, A8. Determinați opțiunile clienților după trei contracte (presupunem că numărul lor total a rămas același).

Teste de evaluare

Testul 1

1. Fie $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

a) Arătați că dacă $\alpha A+\beta B+\gamma C+\delta D=O_2\Rightarrow\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$.

b) Arătați că pentru matricea $E=\begin{pmatrix}-3 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$, există $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ astfel încât $E=aA+bB+cC+dD$.

2. Să se determine $x,y\in\mathbb{R}$ pentru care $3\begin{pmatrix}2x & 1\\ 2 & 3y\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 3x\\ -y & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & 12\end{pmatrix}$.

3. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1 & x\\ y & 1\end{pmatrix}$. Să se determine x,y astfel încât $AB=BA$.

4. Să se rezolve sistemul matriceal: $\begin{cases}X+Y=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ 2X+3Y=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{cases}$, $X,Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$. Arătați:

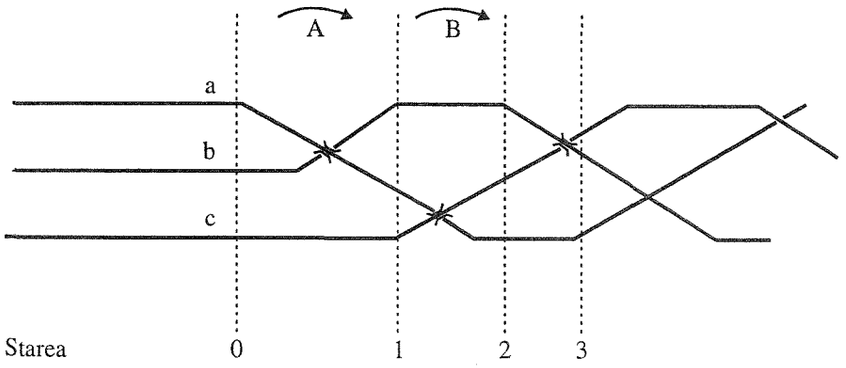
a) că există șirurile $(a_n),(b_n)$ astfel încât $A^n=\begin{pmatrix}a_n & 0 & b_n\\ 0 & 1 & 0\\ b_n & 0 & a_n\end{pmatrix}$;

b) că există relațiile $a_{n+1}=2a_n+b_n$, $b_{n+1}=a_n+2b_n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$;

c) $a_n=\frac{3^n+1}{2}$; $b_n=\frac{3^n-1}{2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

6. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Să se determine numerele reale x,y astfel încât $xA^2+yA+2I_3=O_3$.

7. Su... trei fire a, b, c, care se împletesc. Procesul are doi pași care se repetă: A: firul de sus (a) se trece peste firul din mijloc (b); B: firul din mijloc se trece pe sub firul de joc.



La starea 0 ordinea firelor este dată de matricea $S_o=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$.

1) Arătați că matricea asociată pasului A este egală cu $A=\begin{array}{c}\\ a\\ b\\ c\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}a & b & c\end{array}\\ \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}$.

2) Care este semnificația produsului AS_o.

3) Determinați matricea B, de tip $(3,3)$ care reprezintă trecerea de la starea 1 la starea 2;

4) Dacă $M = BA$, atunci $MS_o = S_2$ reprezintă ordinea firelor la starea 2;

5) Calculați M^2 și deduceți ordinea firelor la starea 4;

6) Calculați M^3. Ce spune ?

Testul 2 (grilă)

1. Egalitatea $a\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ are loc dacă:

a) $a=b=1$, $c=-1$; b) $a=2$, $b=1$, $c=-1$; c) $a=b=2$, $c=-2$;
d) $a=-1$, $b=1$, $c=-2$; e) $a=0$, $b=3$, $c=2$.

2. Soluția ecuației $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ este matricea:

a) I_3; b) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

3. O soluție a ecuației $X^2=3X$ este: a) $X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$; b) $X=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$;

c) $X=I_2$; d) $X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; e) nu are soluții.

4. Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A^n=\begin{pmatrix}1 & a_n & b_n\\ 0 & 1 & a_n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Atunci:

a) $a_{n+1}=1+a_n$, $b_{n+1}=a_n+b_n$; b) $a_{n+1}=2a_n$, $b_{n+1}=-a_n+b_n$; c) $a_{n+1}=2a_n+1$,
$b_{n+1}=3a_n+2b_n$; d) $a_{n+1}=a_n+2b_n$, $b_{n+1}=a_n+b_n$; e) $a_{n+1}=a_n+2b_n$, $b_{n+1}=2a_n+b_n$.

5. Fie $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Atunci: 1) suma elementelor matricei A^n este: a) 2^n+2; b) $2^{n+1}+2$; c)
2^{n+1}; d) $2n^2+2n+1$; 2) cuplul de numere reale (α,β) pentru care $A^2-\alpha A+\beta I_2=O_2$ este:
a) $(3,2)$; b) $(2,3)$; c) $(-3,2)$; d) $(4,3)$.

6. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Valoarea lui $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care avem egalitatea

$A^n+A^{n-1}=\begin{pmatrix}48 & 0 & 48\\ 0 & 0 & 0\\ 48 & 0 & 48\end{pmatrix}$, este: a) $n=2$; b) $n=6$; c) $n=4$; d) $n=8$; e) $n=12$.

. Trei copii A, B, C aruncă o minge de la unul la altul: A aruncă întotdeauna la B, B aruncă întotdeauna la C, iar C aruncă fie la A, fie al B. Dacă C începe să arunce mingea, atunci după trei aruncări probabilitățile ca A, B, C să aibă mingea sunt:

a) $p_A=\frac{1}{3}$, $p_B=\frac{2}{3}$, $p_C=0$; b) $p_A=p_B=p_C=\frac{1}{4}$; c) $p_A=\frac{1}{4}$, $p_B=\frac{1}{4}$, $p_C=\frac{1}{2}$;

d) $p_A=0$, $p_B=\frac{1}{2}$, $p_C=\frac{1}{2}$; e) $p_A=\frac{1}{2}$, $p_B=\frac{1}{2}$, $p_C=0$.

2. DETERMINANȚI

Se definește pentru matricea pătratică, determinantul ei, care este un număr. Sunt prezentate principalele proprietăți ale determinanților, care vin să faciliteze calculul acestora. Determinanții sunt utilizați la rezolvarea sistemelor de ecuații liniare în care numărul de ecuații este egal cu numărul de necunoscute, precum și la determinarea inversei unei matrice pătratice inversabile.

Ca aplicații ale inversei unei matrice inversabile sunt prezentate rezolvări de sisteme de ecuații liniare, modelul economic al lui Leontiev, probleme de codificare a informației, etc., iar ca aplicații ale determinanților în geometria analitică, coliniaritatea a trei puncte, aria unui triunghi, etc.

Istoric . Determinanții au fost descoperiți de matematicianul japonez Seki Kowa (1642 - 1708). Totuși matematicianul german G. W. Leibniz (1646 - 1716) este considerat creatorul determinanților, deși contribuția sa a venit 10 ani mai târziu (1693) după aceea a lui Kowa. Leibniz a dezvoltat determinanții în timp ce se ocupa de studierea rezolvării sistemelor de ecuații liniare.
Școala franceză de matematică, ilustrată de G. Cramer (1704 - 1752), P. F. Sarrus (1798 - 1861) și A. T. Vandermonde (1735 - 1796), pune cu adevărat bazele teoriei determinanților contribuind la dezvoltarea susținută a acesteia.

- **Determinați de ordin doi 75**
- **Determinați de ordin trei 77**
- **Proprietăți ale determinanților 84**
- **Calculul inversei unei matrice 92**
- **Aplicații ale determinanților în geometria analitică 104**
- **Probleme propuse 111**
- **Teste de evaluare 118**

Fie $A=(a_{ij})\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice pătratică. Vom asocia acestei matrice un număr complex, notat $\det(A)$, numit **determinantul matricei** A. În acest fel am pus în evidență o funcție $\det:\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\to\mathbb{C}$, numită **funcția determinant de ordin** n.

Notație. În loc de $\det(A)$ vom scrie adesea $|A|$ sau $\left|a_{ij}\right|_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}}$, punând între două bare verticale elementele din matricea A. Elementele matricei A vor fi elemente ale determinantului $|A|$. Liniile (coloanele) matricei A se numesc liniile (coloanele) determinantului matricei A.
Vom defini această funcție **recurent**.

2.1. DETERMINANȚI DE ORDIN DOI

Are loc următoarea:

Definiție. 1) Dacă $A=(a_{11})\in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ este o matrice pătratică de ordinul întâi, atunci $\det(A)=a_{11}$.

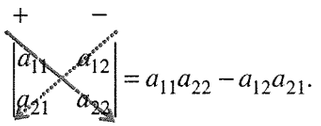
2) Fie $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. **Determinantul matricei** A sau **determinantul de ordinul doi** este numărul definit astfel:

$$\det(A)=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Termenii $a_{11}a_{22}, a_{12}a_{21}$ se numesc **termenii dezvoltării determinantului de ordin doi.**

Observații : **1)** În acest caz $\det:\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\to\mathbb{C}$, $A\to\det(A)$.

2)Deci, pentru o matrice pătratică de ordinul doi deteminantul ei este suma a doi termeni, unul cu plus (produsul elementelor de pe diagonala principală) și altul cu minus (produsul elementelor de pe diagonala secundară).
Ca în schema de mai jos:



$=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Fiecare termen din dezvoltarea determinantului **conține elemente de pe linii și coloane diferite.**

În fiecare produs, indicii de pe locul al doilea sunt o permutare a indicilor de pe locul întâi. În acest fel fiecărui termen al dezvoltării determinantului îi asociem o permutare astfel:

$a_1^1 a_2^2 \to \sigma_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $a_1^2 a_2^1 \to \sigma_2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

În plus, signaturile acestor permutări sunt $\varepsilon(\sigma_1)=1, \varepsilon(\sigma_2)=-1$ (deci σ_1 este pară, iar σ_2 este impară). Termenului $a_{11}a_{22}$, care are semnul plus îi corespunde permutarea pară σ_1, iar termenului $a_{12}a_{21}$ care are semnul minus îi corespunde permutarea impară σ_2. Deci, $\det(A)=\sum_{\sigma\in S_2}\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}$, unde $S_2=\{\sigma_1,\sigma_2\}$.

3) Dacă $A\in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})\left(\text{sau}\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})\text{sau}\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\right)$, atunci $\det(A)\in\mathbb{Z}(\text{sau}\mathbb{Q}\text{ sau }\mathbb{R})$.

Exemplu. Să se calculeze determinanții:

1) $D_1=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}$; 2) $D_2=\begin{vmatrix}C_4^1 & C_4^2\\ C_4^3 & C_4^4\end{vmatrix}$; 3) $D_3=\begin{vmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix}$, $\alpha\in R$.

R. 1) $D_1=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1\cdot 4-2\cdot 3=-2$; 2) Din $C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$ deducem $C_4^1=4$, $C_4^2=6$, $C_4^3=4$, $C_4^4=1$. Așadar $D_2=\begin{vmatrix}4 & 6\\ 4 & 1\end{vmatrix}=4\cdot 1-6\cdot 4=-20$;

3) $D_3=\begin{vmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix}=\cos\alpha\cdot\cos\alpha-(-\sin\alpha)\sin\alpha=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$.

4) Determinanții de ordin doi și rezolvarea sistemelor liniare

Am rezolvat în clasa a IX-a sistemul liniar de două ecuații cu două necunoscute $\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y=b_1\\ a_{21}x+a_{22}y=b_2\end{cases}$, prin metoda reducerii sau prin metoda substituției. Vom ilustra aici rezolvarea acestui sistem utilizând determinanții de ordin doi.

Asociem sistemului matricea care are ca elemente coeficienții necunoscutelor din cele două ecuații. Aceasta este $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$. (Linia întâi din A este formată de coeficienții necunoscutelor din prima ecuație. A doua linie din A este formată din coeficienții necunoscutelor din a doua ecuație a sistemului).

Completăm matricea A cu o coloană formată din termenii liberi ai sistemului (numerele b_1,b_2) și se obține matricea $\overline{A}$, numită **matricea extinsă a sistemului** $\overline{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\end{pmatrix}$.

Să observăm aici că linia întâi din $\overline{A}$ este formată cu numerele a_{11}, a_{12}, b_1 care figurează în prima ecuație a sistemului. Analog, pentru a doua linie din $\overline{A}$. Transformările elementare care se fac asupra ecuațiilor sistemului prin care acesta rămâne echivalent (1) schimbarea ordinii ecuațiilor în sistem; 2) înmulțirea ecuațiilor prin factori nenuli; 3) adunarea unei ecuații a sistemului la o altă ecuație a sistemului) se transferă asupra liniilor matricelor A, $\overline{A}$. Cele trei transformări se numesc **transformări elementare** asupra liniilor matricelor și acestea sunt:

01. Interschimbarea a două linii;
02. Înmulțirea unei linii printr-un număr real nenul;
03. Înlocuirea unei linii cu suma dintre ea și o altă linie.

Rezolvând sistemul prin metoda reducerii obținem:
$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x=b_1a_{22}-b_2a_{12}$, $(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})y=b_2a_{11}-b_1a_{21}$.

Observăm că dacă $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$, atunci sistemul este compatibil determinat cu soluția: $x=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$, $y=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$.

Remarcăm că numitorul fiecărei fracții este chiar determinantul sistemului, $\det(A)=\Delta$. De asemenea, numărătorii din scrierea lui x,y se pot exprima cu ajutorul determinanților de ordin doi. Fie $\Delta x,\Delta y$ aceste două numere. Atunci:

$\Delta x=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2$ și $\Delta y=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}$, care se obțin din Δ înlocuind coloana coeficienților lui x și respectiv y prin coloana termenilor liberi ca în schema de mai jos.

$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\rightarrow\Delta x=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}$; $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\rightarrow\Delta y=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}$

Cu acestea am găsit soluția sistemului:

$x=\frac{\Delta x}{\Delta}$, $y=\frac{\Delta y}{\Delta}$, dacă $\Delta\neq 0$, numite **formulele lui Cramer.**

Exemplu. Să se rezolve sistemul $\begin{cases}3x-5y=4\\ 2x+3y=-7\end{cases}$.

R. **Matricea asociată sistemului este:**
$A=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, **iar** $\Delta=\begin{vmatrix}3 & -5\\ 2 & 3\end{vmatrix}=9+10=19\neq 0$.

Deci se pot aplica formulele lui Cramer în rezolvarea sistemului. Avem:
$\Delta x=\begin{vmatrix}4 & -5\\ -7 & 3\end{vmatrix}=-23$, $\Delta y=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & -7\end{vmatrix}=-29$ **și deci** $x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{-23}{19}$, $y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{-29}{19}$.

2.2. DETERMINANȚI DE ORDIN TREI

Are loc următoarea:

Definiție. Fie $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Numărul

$\det(A)=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$

se numește **determinantul matricei** A sau **determinant de ordin trei.**

Termenii care apar în scrierea lui $\det(A)$, $a_{11}a_{22}a_{33},\ldots,a_{11}a_{23}a_{32}$ se numesc **termenii dezvoltării determinantului de ordin trei.**

Observații. 1) Aici $\det:\mathcal{M}_3(\mathbb{C})\rightarrow\mathbb{C}$, $A\rightarrow\det(A)$

2)Numărul definit mai sus, $\det(A)$ are 6 termeni dintre care trei sunt cu semnul plus, iar ceilalți trei cu semnul minus.

Fiecare termen din dezvolatrea determinantului **conține elemente situate pe linii și coloane diferite**.

Ca și în cazul determinantului de ordin doi, în fiecare produs indicii de pe locul al doilea sunt o permutare a indicilor de pe locul întâi. Fiecărui termen al dezvoltării determinantului îi asociem o permutare:

$$a_{11}a_{22}a_{33} \to \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad a_{13}a_{22}a_{31} \to \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$a_{13}a_{21}a_{32} \to \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad a_{12}a_{21}a_{33} \to \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$a_{12}a_{23}a_{31} \to \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad a_{11}a_{23}a_{32} \to \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

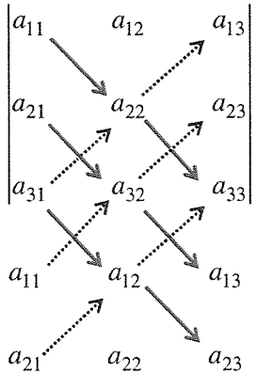
Signaturile acestor permutări sunt $\varepsilon(\sigma_1)=\varepsilon(\sigma_2)=\varepsilon(\sigma_3)=1$ (permutări pare) și corespund termenilor din dezvoltarea determinantului care au semnul plus, iar $\varepsilon(\sigma_4)=\varepsilon(\sigma_5)=\varepsilon(\sigma_6)=-1$ (permutări impare) și corespund termenilor care au semnul minus. Deci, $\det(A)=\sum_{\sigma\in S_3}\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}$, unde

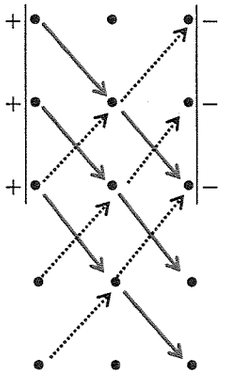
$S_3=\{\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_6\}$.

3)Expresia lui $\det(A)$ din definiție este greoaie. De aceea indicăm mai jos două tehnici mai simple pentru a obține $\det(A)$. Să reținem că aceste tehnici **se aplică numai pentru determinanți de ordin trei**.

1) Regula lui Sarrus

Fie determinantul de ordin trei, $d=\left|a_{ij}\right|_{i,j=\overline{1,3}}$. Pentru a găsi expresia lui d se scriu sub ultima linie din d primele două linii ale determinantului.





Se face produsul elementelor de pe diagonale. Produsul elementelor de pe o diagonală descendentă (indicată prin două săgeți roșii care unesc elementele care intră în produs) este cu semnul plus. Avem trei astfel de produse: $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{21}a_{32}a_{13}$, $a_{31}a_{12}a_{23}$.

Produsul elementelor pe o diagonală ascendentă (indicate prin două săgeți negre întrerupte care unesc elementele componente ale produsului) este cu semnul minus. Avem trei astfel de produse: $-a_{31}a_{22}a_{13}$, $-a_{11}a_{32}a_{23}$, $-a_{21}a_{12}a_{33}$. Suma celor șase produse dă valoarea determinantului d, de ordin trei.

Este o regulă asemănătoare celei de la definiția determinantului de ordin doi și anume se adună produsele de pe cele trei „diagonale principale" și se scad produsele de pe cele trei „diagonale secundare".

Acest procedeu de calcul se numește **regula lui Sarrus.**

Exemplu. Să se calculeze următorii determinanți:

1) $D_1=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; 2) $D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ (**determinant Vandermonde**).

R **1) Scriem sub determinant primele două linii și aplicăm regula lui Sarrus**

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{matrix} = 1\cdot0\cdot2+2\cdot1\cdot0+(-3)\cdot(-1)\cdot1-(-3)\cdot0\cdot0-1\cdot1\cdot1-2\cdot(-1)\cdot2=$$
$$=3-1+4=6.$$

2) Procedăm prin scrierea sub D_2 a primelor două linii ale lui D_2 și aplicăm regula lui Sarrus.

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ a & b \\ a^2 & b^2 \end{matrix} = 1\cdot b\cdot c^2+a\cdot b^2\cdot1+a^2\cdot1\cdot c-a^2\cdot b\cdot1-1\cdot b^2\cdot c-a\cdot1\cdot c^2=$$
$$=bc^2+ab^2+a^2c-a^2b-b^2c-ac^2=$$
$$=b\left(c^2-a^2\right)-b^2(c-a)-ac(c-a)=$$
$$=(c-a)\left(bc+ab-b^2-ac\right)=(c-a)\left[b(c-b)-a(c-b)\right]=$$
$$=(c-a)(c-b)(b-a).$$

Observație. Acest tip de determinant care conține pe fiecare linie puterile de același ordin se numește **determinant de tip Vandermonde.**

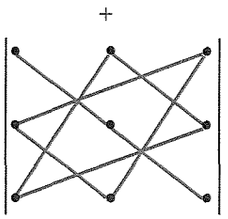
2) Regula triunghiului

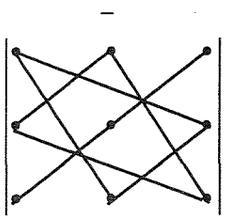
Am văzut că determinantul de ordin trei are în dezvoltarea sa șase termeni, trei cu semnul plus și alți trei cu semnul minus. Primul termen cu plus se găsește înmulțind elementele de pe diagonala principală, iar ceilalți doi, înmulțind elementele situate în vârfurile celor două triunghiuri care au o latură paralelă cu diagonala principală.

După aceeași regulă, referitor la diagonala secundară, se obțin termenii cu minus. Această descriere este arătată schematic mai jos:

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$





$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

Acest procedeu de calcul al determinantului de ordin 3 se numeşte **regula triunghiului**.

Exemplu. Să se calculeze utilizând regula triunghiului, următorii determinanţi de ordin 3:

$$1)\ D_1=\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix};\ 2)\ D_2=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix};\ 3)\ D_3=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{vmatrix}.$$

R. 1) Matricea din care provine D_1 este o matrice antisimetrică. Numim şi determinantul antisimetric. Avem, aplicând regula triunghiului:

$$D_1=0\cdot 0\cdot 0+b\cdot(-a)\cdot(-c)+(-b)\cdot a\cdot c-b\cdot 0\cdot(-b)-0\cdot c\cdot(-c)-a\cdot(-a)\cdot 0=0$$

2) Analog, avem: $D_2=a\cdot c\cdot b+c\cdot a\cdot b+c\cdot a\cdot b-c\cdot c\cdot c-a\cdot a\cdot a-b\cdot b\cdot b=3abc-a^3-b^3-c^3$

Determinatul D_2 se numeşte determinant circular de ordin 3.

3) D_3 este determinantul matricei triunghiulare. Găsim $D_3=a\cdot c\cdot f$ (adică produsul elementelor de pe diagonala principală). În particular $\det(I_3)=1$.

3) Metoda recurentă

Determinantul de ordin 3 îl putem calcula, prin recurenţă, cu ajutorul determinanţilor de ordin 2, prin aşa numita **regulă de dezvoltare după o linie (sau coloană).**

Pentru aceasta este necesară următoarea:

Definiţie. Fie matricea $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Se numeşte **minor asociat elementului** $a_{ij}, 1\le i,j\le n$, determinantul matricei obţinute din A prin eliminarea liniei i şi coloanei j. Se notează acest minor cu M_{ij}.

Se numeşte **complement algebric** (sau **cofactor**) al elementului a_{ij}, numărul $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$.

Exponentul $i+j$ al lui (-1) este suma dintre numărul liniei (i) şi numărul coloanei (j) pe care se află elementul a_{ij}.

Exemplu. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -3 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Să determinăm complementii algebrici ai elementelor $a_{12}=-1$ şi $a_{33}=1$.

Conform definiţiei $A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot M_{12}$, unde M_{12} este determinantul matricei care se obţine din A suprimând linia întâi şi coloana a doua.

Deci $M_{12}=\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}=3\cdot 1-6(-3)=21$ **şi** $A_{12}=-21$.

Analog, minorul elementului a_{33} este egal cu $M_{33}=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=3$ **(pentru obţinerea lui am suprimat linia a treia şi coloana a treia).**

Acum $A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot M_{33}=3$.

Pentru matricea de ordin trei, semnele corespunzătoare complementilor algebrici sunt: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$.

Are loc următoarea:

Teoremă.(Dezvoltarea determinantului după o linie sau o coloană)

Dacă $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, atunci

1) $\det(A)=a_{i1}\cdot A_{i1}+a_{i2}\cdot A_{i2}+a_{i3}\cdot A_{i3},\ \forall i=\overline{i,3}$

Formula dă dezvoltarea determinantului după linia *i*

2) $\det(A)=a_{1j}\cdot A_{1j}+a_{2j}\cdot A_{2j}+a_{3j}\cdot A_{3j}, \forall j=\overline{1,3}$

Formula dă dezvoltarea determinantului după coloana *j*

Demonstraţie. De regulă vom alege să dezvoltăm determinantul după acea linie sau coloană pe care se află cele mai multe zerouri!

Să facem verificarea formulei 1) din teoremă pentru $i=1$, adică să arătăm că are loc egalitatea:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

adică găsim acelaşi rezultat de la regula lui Sarrus sau regula triunghiului. ■

Observații. 1) Relațiile **1)** și **2)** din teoremă reduc calculul determinatului de ordin trei la trei determinanți de ordin inferior, 2. Din aceste motive ele se numesc **formule de recurență.**

2) Relația **1)** din teoremă, afirmă că determinantul matricei pătratice A este egal cu suma produselor dintre elementele unei linii și complemenții lor algebrici. O interpretare analoagă are relația **2)** din teoremă.

3) În general, dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci $\det(A)$ este un scalar asociat matricei A, definit recurent astfel: $\det(A) = \begin{cases} a_{11}, \text{daca } n=1 \\ a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + ... + a_{1n}A_{1n}, \text{daca } n>1 \end{cases}$

În plus are loc următoarea:

Teoremă.(Dezvoltarea determinantului după o linie sau o coloană)

1) $\det(A) = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + ... + a_{in} \cdot A_{in}$, $\forall i = \overline{1,n}$

Dezvoltarea determinantului după linia *i*

2) $\det(A) = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj}, \forall j = \overline{1,n}$

Dezvoltarea determinantului după coloana *j*

Formulele din teoremă sunt formule de recurență.

Exemple. 1) Să se calculeze determinanții:

1) $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; **2)** $D_2 = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{vmatrix}$; **3)** $D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; **4)** $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

R. Vom dezvolta determinanții după acea linie sau coloană care conține cât mai multe zerouri (dacă, bineînțeles, există), deoarece $0 \cdot A_{ij} = 0$, nemaifiind necesar calculul lui A_{ij}.

1) Pe coloana a doua avem cele mai multe zerouri. Deci vom dezvolta determinantul după coloana a doua. Avem: $D_1 = 0 \cdot A_{12} + 3 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{32} = 3 \cdot A_{22}$, **unde** $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22}$, **iar** $M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4$ **Deci** $A_{22} = 4$, **iar** $D_1 = 3 \cdot A_{22} = 12$.

2) Dezvoltăm după linia întâi, unde sunt două zerouri (la fel ca pe a treia coloană). Atunci: $D_2 = a \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} = a \cdot A_{11}$, **unde** $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = M_{11}$, **cu** $M_{11} = \begin{vmatrix} c & 0 \\ e & f \end{vmatrix} = cf$. **Deci** $D_2 = a \cdot c \cdot f$.

Observăm că matricea din care provine determinantul este una triunghiulară. Prin urmare, determinantul ei este egal cu produsul elementelor de pe diagonala principală.

3) - 4). Sunt doi determinanți în care o linie (întâi pentru D_3) și respectiv o coloană (a doua pentru D_4) este formată din zerouri. Dezvoltând determinantul după acea linie respectiv coloană găsim că acesta are valoarea zero. Deci, $D_3 = D_4 = 0$.

2) Să se calculeze determinatul de ordinul patru $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

R. Deoarece pe colana trei se află două zerouri, vom face dezvoltarea determinantului după această coloană. Avem:

$$D = (-1) \cdot A_{13} + 3 \cdot A_{33} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -12 + 3 \cdot 0 = -12.$$

Observație. Determinanții de ordin trei și rezolvarea sistemelor liniare.

Să considerăm sistemul liniar de trei ecuații cu trei necunoscute:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

Asociem acestui sistem două matrice:

1) **Matricea sistemului** (formată din coeficienții necunoscutelor din cele trei ecuații)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

2) **Matricea extinsă a sistemului** (se obține din A prin adăugarea coloanei formate din termenii liberi ai sistemului)

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}.$$

Liniile matricei $\overline{A}$ sunt formate cu elemente care provin din câte o ecuație a sistemului. Deci transformările elementare care se fac asupra ecuațiilor sistemului prin care acesta rămâne echivalent, se transferă asupra liniilor matricelor $A, \overline{A}$.

Aplicând aceeași metodă a reducerii și pentru acest sistem se găsește că dacă $\Delta = \det(A) \neq 0$ (adică, determinantul sistemului este nenul), atunci sistemul este compatibil determinat cu soluția dată de **formulele lui Cramer:**

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta},$$

unde, $\Delta x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$ se obțin din Δ înlocuind coloana coeficienților lui x, y și respectiv z prin coloana termenilor liberi.

Exemplu. Să se rezolve sistemul : $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x-y+z=2 \\ 4x+3y+z=3 \end{cases}$.

R. Matricea sistemului este $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, iar coloana termenilor liberi este $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Avem determinantul sistemului $\Delta=\det(A)=-12\neq 0$ şi se pot aplica formulele lui Cramer pentru determinarea soluţiei sistemului.

Avem:

$$\Delta x=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-12,\ \Delta y=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}=6,\ \Delta z=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix}=-6 \text{ şi deci}$$

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{-12}{-12}=1,\ x=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{6}{-12}=-\frac{1}{2},\ z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{-6}{-12}=\frac{1}{2}.$$

2.3. PROPRIETĂŢI ALE DETERMINANŢILOR

Definiţia determinantului prezentată mai sus este încă puţin eficientă. De aceea se impune stabilirea unor proprietăţi ale determinanţilor care să fie comode atât din punctul de vedere al teoriei cât şi din punct de vedere calculatoriu.

Ţinând seamă de exprimările explicite ale determinanţilor de ordin doi şi trei în funcţie de elementele sale şi permutările din S_2 şi respectiv S_3, putem extinde această caracterizare la determinantul de ordin n. Avem:

$\det(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$, unde S_n este mulţimea permutărilor de grad $n\left(|S_n|=n!\right)$. Lăsăm ca temă verificarea proprietăţilor de mai jos, utilizând această scriere pentru $\det(A)$.

Proprietăţile care urmează sunt demonstrate pentru determinanţi de ordinul $n\in\{2,3\}$, dar ele rămân valabile şi pentru $n\geq 3, n\in\mathbb{N}$.

P1. Determinantul unei matrice coincide cu determinantul matricei transpuse, adică dacă $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci $\det(A)=\det({}^tA)$.

Demonstraţie. 1) Dacă $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, atunci ${}^tA=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ şi deci

$\det(A)=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\det({}^tA)$.

2) Dacă $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, atunci ${}^tA=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Aplicaţi regula triunghiului sau regula lui Sarrus şi constataţi că $\det(A)=\det({}^tA)$.

Altfel dezvoltând $\det(A)$ după prima linie, iar $\det({}^tA)$ după prima coloană avem

$\det(A)=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}$

$\det({}^tA)=a_{11}{}^tA_{11}+a_{12}{}^tA_{21}+a_{13}{}^tA_{31}=a_{11}{}^tM_{11}-a_{12}{}^tM_{21}+a_{13}{}^tM_{31}$,

unde $M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, iar ${}^tM_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$, etc. şi se ţine seamă că pentru minorii de ordin doi au loc egalităţile

$M_{11}={}^tM_{11}$, $M_{12}={}^tM_{21}$, $M_{13}={}^tM_{31}$, conform cu **1)**. ■

Observaţie. Această proprietate arată că ori de câte ori avem o proprietate adevărată referitoare **la liniile unui determinant**, aceeaşi proprietate rămâne adevărată şi **pentru coloanele determinantului**.

P2. Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) dintr-o matrice sunt nule, atunci determinantul matricei este nul.

Demonstraţie. 1) Dacă $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, atunci $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix}=0\cdot d-c\cdot 0=0$ şi

$\begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}=0\cdot d-b\cdot 0=0$.

2) Dacă $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, are o linie (sau coloană) formată numai din zerouri, atunci se dezvoltă $\det(A)$ după acea linie (sau coloană) şi este clar că se obţine valoarea zero. Altfel, utilizând regula lui Sarrus sau regula triunghiului, fiecare termen din dezvoltare are în produs câte un element de pe fiecare linie (şi fiecare coloană). ■

Exerciţiu rezolvat. Dacă un determinant de ordin trei are cel puţin şapte elemente egale cu zero, atunci determinantul este nul.

R. Numărul de elemente al determinantului de ordin 3 este 9. Cum cele $9-7=2$ elemente sunt nenule, acestea se pot distribui pe cel mult două linii diferite. Deci o linie este cu toate elementele zero şi prin urmare determinantul este nul.

P3. Dacă într-o matrice schimbăm două linii (sau coloane) între ele, obţinem o matrice care are determinantul egal cu opusul determinantului matricei iniţiale.

Demonstraţie. 1) Prin schimbarea liniilor (sau coloanelor) să arătăm că avem egalităţile

$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ şi respectiv $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, adică

$a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ şi

respectiv $a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ ceea ce-i imediat.

2) Pentru determinantul de ordin trei aplicați regula lui Sarrus sau regula triunghiului și arătați că $\det(A) = \det(L_1, L_2, L_3) = -\det(L_3, L_2, L_1)$ și $\det(C_1, C_2, C_3) = -\det(C_2, C_1, C_3)$, unde prin scrierile $\det(A) = \det(L_1, L_2, L_3)$, $\det(A) = \det(C_1, C_2, C_3)$ am evidențiat cele trei linii și respectiv cele trei coloane ale determinantului în această ordine.

Avem $\det(L_1, L_2, L_3) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\det(L_3, L_2, L_1) = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$

$\det(A) = \det(C_1, C_2, C_3) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\det(C_2, C_1, C_3) = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$. ■

Observație . Un alt mod de abordare al acestei proprietăți se găsește la probleme propuse, prin utilizarea matricelor elementare.

Exemplu. **Exprimați determinanții D_2, D_3 cu ajutorul lui D_1:**

$D_1 = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} a'' & a' & a \\ b'' & b' & b \\ c'' & c' & c \end{vmatrix}$, $D_3 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a'' & b'' & c'' \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$.

R. **Determinatul D_2 se obține din D_1 schimbând coloanele 1 și 3 între ele. Deci $D_2 = -D_1$. Pentru a-l obține pe D_3 din D_1 facem transpusa matricei din D_1. Determinantul acestei matrice coincide cu D_1. În această matrice schimbăm liniile 2 și 3 între ele și luând determinantul dăm peste D_3. Deci, $D_3 = -D_1$.**

P4. Dacă o matrice are două linii (sau coloane) identice, atunci determinantul său este nul.

Demonstrație . **1)** Se verifică imediat egalitățile $\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = ab - ba = 0$.

2) Pentru determinantul de ordinul trei, care are două linii (sau coloane) egale prin schimbarea acestor linii (coloane) între ele, conform cu **P3**, avem egalitatea $\det(A) = -\det(A)$, adică $\det(A) = 0$. ■

Observație . Avem identitățile $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + a_{i3}A_{j3} = \begin{cases} \det(A), & \text{daca } i = j \\ 0, & \text{daca } i \neq j \end{cases}$

(dezvoltarea după linia i). Pentru $i \neq j$, aceste linii fiind egale, conform cu **P4**, valoarea determinantului este egală cu zero.

Exemplu. **Să se calculeze determinantul** $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

R. **Cum determinantul are două linii identice (prima și a treia) rezultă că valoarea lui este egală cu zero.**

P5. Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) ale unei matrice sunt înmulțite cu un număr α, obținem o matrice al cărei determinant este egal cu α înmulțit cu determinantul matricei inițiale.

Demonstrație . **1)** Proprietatea se verifică ușor pentru $n = 2$, și se scrie sub forma

$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & \alpha a_{22} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Se spune că am scos factor comun pe α între elementele liniei întâi, a doua, coloanei întâi și respectiv coloanei a doua a determinantului.

2) Pentru $n = 3$, se dezvoltă determinantul după acea linie (sau coloană) și se obține ușor că :

$\det(\alpha L_1, L_2, L_3) = \det(L_1, \alpha L_2, L_3) = \ldots = \det(C_1, C_2, \alpha C_3) = \alpha \det(A)$.

De exemplu , $\det(\alpha L_1, L_2, L_3) = \sum_{i=1}^{3} (\alpha a_{1i}) A_{1i} = \alpha \sum_{i=1}^{3} a_{1i} A_{1i} = \alpha \det(A)$. ■

Observații . **1)** Este o proprietate importantă care **permite să scoatem factor comun de pe linii și (sau) coloane.** Determinantul care rămâne de calculat **are elemente mai simple!**

2) $\det(\alpha A) = \alpha^2 \det(A), \forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ și $\det(\alpha A) = \alpha^3 \det(A), \forall A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Exemplu. **Să se calculeze determinanții:**

1) $D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 3 & 0 & 27 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$; **2)** $D_2 = \begin{vmatrix} 2a & -3 & 2b \\ 3a & 7 & 3b \\ 5a & 11 & 5b \end{vmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

R. **1) Dacă de pe prima linie se scoate factor comun 2, de pe a doua linie 3, iar de pe a treia linie 5, atunci determinantul D_1 este egal cu**

$D_1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 30 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 60$.

2) Se scoate factor comun de pe coloana întâi pe a, iar de pe coloana a treia pe b și se ține seama de P4 . Avem :

$D_2 = ab \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & 7 & 3 \\ 5 & 11 & 5 \end{vmatrix} = 0$.

P6. Dacă elementele a două linii (sau coloane) ale unei matrice sunt proporționale, atunci determinantul matricei este nul.

Demonstrație. 1) Prin calcul direct se arată că :

$$\begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha a & \alpha b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \alpha b \\ b & \alpha b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a & a \\ \alpha b & b \end{vmatrix} = 0 .$$

2) Pentru $n=3$, dacă $L_i = \alpha L_j, i \neq j$, adică $a_{ik} = \alpha a_{jk}, k = \overline{1,3}$, atunci se scoate factor comun α de pe linia i, iar determinantul care rămâne are două linii egale și deci este nul. ■

Exemplu. Determinantul $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ -5 & 0 & -10 \end{vmatrix}$ **, având două coloane proporționale,prima și a treia** $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{-5}{-10}$ **, are valoarea zero.**

Putem gândi elementele unei linii (sau coloane) ale unei matrice ca fiind componentele unui vector.

P7. Dacă linia i a unei matrice A este suma a doi vectori, atunci determinantul ei este egal cu suma a doi determinanți corespunzători matricelor care au aceleași linii ca A, cu excepția liniei i unde au câte unul din cei doi vectori.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2}\dots & a_{in}+b_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2}\dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2}\dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Demonstrație. 1) Avem de arătat că (pentru linia întâi):

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix} .$$

Într-adevăr membrul stâng este egal cu :

$(a+a')d - c(b+b') = ad + a'd - cb - cb'$, iar membrul drept este egal cu $ad - bc + a'd - b'c$ și egalitatea se verifică.

2) Pentru $n=3$ și linia întâi trebuie să arătăm că:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

Se dezvoltă determinantul din membrul stâng al egalității după linia întâi și avem

$S = (a_{11}+b_{11})A_{11} + (a_{12}+b_{12})A_{12} + (a_{13}+b_{13})A_{13} =$

$= (a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}) + (b_{11}A_{11} + b_{12}A_{12} + b_{13}A_{13}) = \det(A) + \det(B)$, unde $\det(A), \det(B)$ este primul și respectiv al doilea determinant din membrul drept al egalității. ■

Observații. 1) Din proprietățile **P5** și **P7** rezultă că determinantul este o funcție liniară de elementele fiecărei linii.

2) O proprietate analoagă are loc și pentru coloane (via **P1**).

3) Proprietățile **P3, P5, P7**, prezintă comportamentul determinanților când asupra matricelor din care provin s-au efectuat transformări elementare.

Exemplu. Să se calculeze determinantul $D = \begin{vmatrix} a+d & a & 1 \\ b+d & b & 1 \\ c+d & c & 1 \end{vmatrix}$.

R. Se scrie determinantul ca sumă a doi determinanți

$$D = \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ b & b & 1 \\ c & c & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & a & 1 \\ d & b & 1 \\ d & c & 1 \end{vmatrix} .$$

Primul determinant având primele două coloane identice este nul. Al doilea determinant are, de asemenea, valoarea zero deoarece are coloanele 1 și 3, proporționale.
Deci, $D = 0$ **.**

P8. Dacă o linie (sau coloană) a unei matrice pătratice este o combinație liniară de celelalte linii (sau coloane), atunci determinantul matricei este zero.

Demonstrație. 2) Facem verificarea pentru determinantul de ordin 3,

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, unde $L_1 = \alpha L_2 + \beta L_3$ (am notat cu L_i linia i).

Să arătăm că acest determinant este nul. Avem:

$$\begin{vmatrix} \alpha a_1 + \beta a_2 & \alpha b_1 + \beta b_2 & \alpha c_1 + \beta c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \underline{\underline{\text{P7}}} \begin{vmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 & \alpha c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta a_2 & \beta b_2 & \beta c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \underline{\underline{\text{P6}}}$$

$\underline{\underline{\text{P6}}}$ $0+0=0$, ultimii doi determinanți fiind nuli deoarece au câte două linii proporționale. ■

Exemplu. Să se calculeze determinanții: 1) $D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ **; 2)** $D_2 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

R. 1) Se vede ușor că $L_3 = L_1 + L_2$ **și deci determinantul este nul,** $D_1 = 0$ **.**

2) Cum $L_1=(-2)L_2+3L_3$, determinantul D_2 este egal cu zero.

P9. Dacă la o linie (sau coloană) a matricei A adunăm elementele altei linii (sau coloane) înmulțite cu același număr, atunci această matrice are același determinant ca și matricea A.

Demonstrație. 1)Vom aduna la linia întâi L_1 linia a doua înmulțită cu α. Vom nota acest fapt prin $L_1+\alpha L_2$. Avem:

$$\begin{vmatrix} a+\alpha a_1 & b+\alpha b_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \underset{=}{\overset{P7}{=}} \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \underset{=}{\overset{P6}{=}} \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + 0 = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}.$$

2) Vom aduna la coloana C_1, coloana a treia înmulțită cu α. Notăm acest fapt prin $C_1+\alpha C_3$. Avem succesiv:

$$\begin{vmatrix} a+\alpha c & b & c \\ a_1+\alpha c_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\alpha c_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \underset{=}{\overset{P7}{=}} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha c & b & c \\ \alpha c_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha c_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \underset{=}{\overset{P6}{=}} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}. \blacksquare$$

Observație. Această proprietate este deosebit de importantă deoarece prin această acțiune **se pot obține cât mai multe zerouri pe o linie** (sau **coloană**).

Exemple. 1) Să se calculeze determinantul de ordin 4: $D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

R. Vom face zerouri pe linia întâi. Se fixează, de obicei, elementul cel mai mic în valoare absolută de pe această linie și odată cu el coloana care-l conține. Vom înmulți convenabil această coloană și o vom aduna la celelalte coloane, astfel încât după această operație să facem zerouri pe linia întâi.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_2+2C_1 \\ = \\ C_3-3C_1 \\ C_4-4C_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 5 & -9 & -8 \\ -3 & -5 & 9 & 17 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 5 & -9 & -8 \\ -5 & 9 & 17 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{matrix} C_2+C_1 \\ = \\ C_3-5C_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & -33 \\ -5 & 4 & 42 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -4 & -33 \\ 4 & 42 \end{vmatrix} = 4\cdot 3 \begin{vmatrix} -1 & -11 \\ 1 & 14 \end{vmatrix} = -36,$$

unde prin C_2+2C_1 înțelegem că la coloana a doua se adună coloana întâi înmulțită cu 2, iar prin C_3-3C_1 se înțelege că la coloana a treia se adună coloana întâi înmulțită cu (-3) (sau din coloana a treia scădem coloana întâi înmulțită cu trei). La coloana (sau linia) scrisă prima se adună o altă coloană (sau linie) înmulțită cu un număr.

2) Numerele 204, 527, 255 sunt divizibile prin 17. Arătați că determinantul

$D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ **este divizibil prin 17. Generalizare.**

R. Notăm C_1,C_2,C_3 coloanele determinantului. La coloana C_3 adunăm o combinație liniară de coloanele C_1 și C_2 de forma $100C_1+10C_2$. Marcăm această transformare prin $C_3+10C_2+100C_1$. Se obține determinantul

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 204 \\ 5 & 2 & 527 \\ 2 & 5 & 255 \end{vmatrix} = 17\cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 12 \\ 5 & 2 & 31 \\ 2 & 5 & 15 \end{vmatrix}, \text{ adică } D\vdots 17.$$

3) Fie $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$, ale cărei elemente sunt egale cu -1 sau cu 1. Să se arate că $\det(A)$ se divide prin 4.

R. În $\det(A)$ se fac transformările L_2+L_1, L_3+L_1. În acest fel elementele liniilor doi și trei sunt egale cu $-2=-1-1$ sau cu $0=-1+1$ sau cu $2=1+1$.

Pe fiecare din aceste linii se dă factor comun 2 și $\det(A)=4\det(A')$, unde $A'\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ cu $\det(A')\in\mathbb{Z}$. Deci $\det(A)$ se divide prin 4.

P10. Dacă $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci $\det(AB)=\det(A)\det(B)$.

Determinantul produsului a două matrice pătratice este egal cu produsul determinanților acelor matrice.

Demonstrație. Demonstrăm proprietatea numai pentru $n=2$.
Fie matricele pătratice de ordin doi

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \text{ și } AB=\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix}.$$

De aici $\det(AB)=(ax+bz)(cy+dt)-(cx+dz)(ay+bt)=$

$=acxy+adxt+bczy+bdzt-acxy-bcxt-adzy-bdzt=$

$=adxt+bczy-bcxt-adzy=$

$=(ad-bc)(xt-yz)=\det(A)\det(B).\blacksquare$

Consecințe. 1) Dacă $A_1,A_2,\ldots,A_k\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci

$\det(A_1A_2\ldots A_k)=\det(A_1)\det(A_2)\ldots\det(A_k)$.

2) Dacă $A_1=A_2=\ldots=A_k=A$, atunci $\det(A^k)=(\det(A))^k$, $k\in\mathbb{N}^*$.

Exerciții rezolvate

1) Să se arate că nu există matricele $A,B,C\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $AB=BC=CA=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

2) Dacă $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, atunci $A^n\neq I_3,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

R. 1) **Dacă, prin absurd, ar exista matricele *A, B, C* atunci** $AB^2C^2A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 3\end{pmatrix}^3$

şi luând aici determinantul rezultă $\det\left(AB^2C^2A\right)=(-9)^3$ **sau**

$\left(\det(A)\det(B)\det(C)\right)^2=-729$ **, fals, pentru că membrul stâng este pozitiv.**

2) **Vom proceda tot, prin absurd. Presupunem că există** $k\in\mathbb{N}^*$ **astfel încât** $A^k=\mathrm{I}_3$.

Atunci de aici $\det\left(A^k\right)=1\Leftrightarrow\left(\det(A)\right)^k=1\Leftrightarrow(\det(A)=1$**, pentru *k* impar sau** $\det(A)=\pm1$**,**

pentru *k* par). Contradicţie deoarece $\det(A)=0$**. Deci nu există** $k\in\mathbb{N}^*$ **astfel încât** $A^k=\mathrm{I}_3$.

2.4. CALCULUL INVERSEI UNEI MATRICE

Reamintim că pentru un număr real $a\neq0$, inversul lui (în raport cu operaţia de înmulţire) este $\frac{1}{a}$ cu proprietatea $a\cdot\frac{1}{a}=1$. De exemplu, inversul lui $\frac{3}{5}$ este $\frac{5}{3}$ pentru care $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}=1$.

Pentru anumite matrice pătratice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se poate defini inversa matricei în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Are loc următoarea:

Definiţie Fie $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Matricea *A* se numeşte **inversabilă** dacă există matricea $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea

$$A\cdot B=B\cdot A=\mathrm{I}_n,\ \mathrm{I}_n \text{ fiind matricea unitate.}$$

Matricea *B* se numeşte **inversa matricei** *A* şi se notează cu $B=A^{-1}$ (citim „*A* la minus unu “).

Observaţii . **1)** Inversa unei matrice, dacă există, este unică.

Într-adevăr dacă $C\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este, de asemenea, inversa lui *A*, atunci

$AC=CA=\mathrm{I}_n$.

Utilizând relaţiile care definesc inversa şi asociativitatea înmulţirii matricelor avem: $B=BI_n=B(AC)=(BA)C=I_nC=C$.

2)Din definiţie A^{-1} este inversa lui *A* şi deci $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

3) Nu orice matrice pătratică are inversă.

Fie $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Aceasta nu are inversă. Dacă, prin absurd, ar exista $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ astfel încât $AB=I_2$, atunci s-ar obţine egalitatea de matrice

$\begin{pmatrix}c & d\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, ceea ce-i imposibil.

4)Matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ are inversă matricea $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

deoarece:

$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$ şi $A^{-1}A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$.

Prezentăm, în continuare, tehnici pentru a construi (în cazul când este posibil) inversa unei matrice.

Metoda 1. (Utilizând definiţia) Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$. Să se determine inversa lui *A*.

R. Dacă există $A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $a, b, c, d\in\mathbb{R}$, atunci trebuie să avem

$$AA^{-1}=I_2\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\ -a+3c & -b+3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}a+2c=1\\ -a+3c=0\end{cases}\text{ şi }\begin{cases}b+2d=0\\ -b+3d=1\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(a=\frac{3}{5},c=\frac{1}{5},b=-\frac{2}{5},d=\frac{1}{5}\right).$$

Deci, $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{2}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$ pentru care se verifică uşor că $AA^{-1}=I_2$.

Metoda 2. (Utilizând transformările elementare de linii asupra matricelor)

Considerăm aceeaşi matrice de la **metoda 1** , $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.

Am văzut acolo că determinarea inversei se reduce la rezolvarea a două sisteme de ecuaţii:

$\begin{cases}a+2c=1\\ -a+3c=0\end{cases}$ (1) şi $\begin{cases}b+2d=0\\ -b+3d=1\end{cases}$ (2).

Primului sistem îi asociem matricea sistemului şi respectiv matricea extinsă a sistemului (obţinută din matricea sistemului la care se adaugă coloana termenilor liberi).

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ şi $\overline{A}_1=\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 0\end{array}\right)$.

Celui de-al doilea sistem îi asociem, asemănător matricele

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ şi $\overline{A}_2=\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 1\end{array}\right)$.

Vom considera matricea M, extinsa lui A, prin adăugarea coloanelor termenilor liberi din cele două sisteme $M=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)$ (bara verticală separă matricele A şi I_2 .Cele două coloane definesc matricea unitate I_2. Deci $\mathrm{M}=\left(A|I_2\right)$.

Algoritmul după care se determină inversa unei matrice este următorul:

Algoritm pentru determinarea inversei matricei $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Pasul 1. Se formează matricea $\mathrm{M}=\left(A|I_n\right)$.

Pasul 2. Utilizând transformările elementare se aduce matricea M la forma $\left(I_n|B\right)$, dacă este posibil.

Pasul 3. $A^{-1}=B$.

Reamintim transformările elementare care se fac asupra liniilor unei matrice:

O1. Schimbarea a două linii între ele.
O2. Înmulţirea unei linii printr-un număr real nenul.
O3. Înlocuirea unei linii prin suma dintre această linie şi o altă linie înmulţită cu un număr.

Prezentăm în paralel transformările matricei M şi transformările sistemelor (1) şi (2).

Transformările asupra matricei A	Transformările echivalente ale sistemelor (1) şi (2)
$\left(\begin{array}{cc\|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{L_2+L_1}{\longleftrightarrow}\left(\begin{array}{cc\|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 1 & 1\end{array}\right)$	$\begin{cases}a+2c=1\\ 5c=1\end{cases};\ \begin{cases}b+2d=0\\ 5d=1\end{cases}$
$\left(\begin{array}{cc\|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 1 & 1\end{array}\right)\overset{\frac{1}{5}L_2}{\longleftrightarrow}\left(\begin{array}{cc\|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{array}\right)$	$\begin{cases}a+2c=1\\ c=\frac{1}{5}\end{cases};\ \begin{cases}b+2d=0\\ d=\frac{1}{5}\end{cases}$
$\left(\begin{array}{cc\|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{array}\right)\overset{L_1-2L_2}{\longleftrightarrow}\left(\begin{array}{cc\|cc}1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5}\\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{array}\right)$	$\begin{cases}a=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}\\ c=\frac{1}{5}\end{cases};\ \begin{cases}b=-\frac{2}{5}\\ d=\frac{1}{5}\end{cases}$

Deci inversa lui A există şi este matricea $B=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{2}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$.

Metoda 3. (Utilizând matricea adjunctă) Pentru început dăm următoarea

Definiţie. O matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, se numeşte **nesingulară,** dacă $\det(A)\neq 0$. În caz contrar matricea A se numeşte **singulară.**

În celelalte două metode nu am putut stabili de la început dacă o matrice pătratică este inversabilă. Rezultatul următor ne precizează de la început dacă matricea $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este sau nu inversabilă. Mai precis are loc următoarea:

Teoremă. Matricea $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ **este inversabilă** dacă şi numai dacă matricea A **este nesingulară.**

Deci, A **este inversabilă** $\Leftrightarrow \det(A)\neq 0$.

Demonstraţie. Presupunem că A este inversabilă şi să demonstrăm că $\det(A)\neq 0$. Avem $AA^{-1}=I_n$. Luând determinantul în această egalitate şi ţinând seamă de egalitatea $\det(AB)=\det(A)\det(B)$, $\forall A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ **(P10)** rezultă $\det(A)\det\left(A^{-1}\right)=\det(I_n)=1$, adică $\det(A)\neq 0$. Deci A este nesingulară. Reciproc, dacă A are proprietatea $d=\det(A)\neq 0$ (adică A este nesingulară) atunci să arătăm că A este inversabilă. Vom face acest lucru găsind inversa A^{-1}. Construcţia lui A^{-1} presupune următorii paşi:

Pasul 1. (Construcţia adjunctei matricei A, A*)
Definim matricea A^*, ale cărei elemente $A_{ij}^*=A_{ji}$ reprezintă complementii algebrici ai elementelor a_{ij} din matricea A, $\forall i=\overline{1,3}$, $\forall j=\overline{1,3}$, aşezaţi transpus.

Deci, $A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$.

Pentru calculul AA^* şi A^*A, utilizăm relaţiile din observaţia de la **P4**,

$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+a_{i3}A_{j3}=\begin{cases}\det(A), daca\ i=j\\ 0, daca\ i\neq j\end{cases}$.

Avem $A\cdot A^*=A^*\cdot A=\begin{pmatrix} d & 0 & 0\\ 0 & d & 0\\ 0 & 0 & d\end{pmatrix}=dI_3$.

De aici $A\left(\frac{1}{d}A^*\right)=\left(\frac{1}{d}A^*\right)A=I_3$, egalități care arată că $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}A^*$.

Pasul 2. Inversa matricei A este $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}A^*$. ■

Observații . 1) Pentru a obține A^* se calculează matricea A' care se obține din A, înlocuind fiecare element cu complementul său algebric și apoi se ia ${}^tA'$. Aceasta este A^*.

2) Dacă $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB=I_n$ atunci $BA=I_n$ și $B=A^{-1}$. Într adevăr din $AB=I_n$ rezultă $\det(A)\neq 0$, adică A este inversabilă.

Din $AB=I_n$, prin înmulțire la stânga cu A^{-1} rezultă $B=A^{-1}$ și evident $BA=A^{-1}A=I_n$.

3) Dacă $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ și $\det(A)\neq 0$, verificați că

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}.$$

Exemplu. **Să se determine inversa matricei** $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

R. **Observăm că** $\det(A)=5\neq 0$, **și deci** A **este nesingulară, adică inversabilă. Construim matricea** A', **obținută din** A, **înlocuindu-i elementele cu complemenții lor algebrici. Avem:** $A_{11}=1$, $A_{12}=-2$, $A_{13}=1$, $A_{21}=1$, $A_{22}=3$, $A_{23}=1$, $A_{31}=-3$, $A_{32}=6$, $A_{33}=2$.

Deci $A'=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ -3 & 6 & 2\end{pmatrix}$, **iar** $A^*={}^tA'$, **adică** $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3\\ -2 & 3 & 6\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

Inversa lui A **este matricea**

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}A^*=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3\\ -2 & 3 & 6\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-3}{5}\\ \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{6}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}.$$

Verificați prin calcul direct egalitățile: $AA^{-1}=A^{-1}A=I_3$.

Observații . 1) Dacă A este nesingulară, atunci și A^{-1} este nesigulară.

2) Dacă $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ sau $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A inversabilă, atunci $A^{-1}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ sau

$A^{-1}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dacă $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ și A inversabilă, atunci $A^{-1}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})\Leftrightarrow\det(A)\in\{\pm 1\}$.

3) Dacă A și B sunt inversabile, atunci $A\cdot B$ este inversabilă și $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

4) Dacă $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A inversabilă atunci $\left(A^n\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^n\overset{not.}{=}A^{-n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

De asemenea au loc următoarele proprietăți :

a) $\left({}^tA\right)^{-1}={}^t(A)^{-1}$, $\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A inversabilă.

b) $(\alpha A)^{-1}=\frac{1}{\alpha}(A)^{-1}$, $\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A inversabilă, $\alpha\neq 0$.

Aplicații ale inversei unei matrice

1) Ecuații matriceale **Vom prezenta în continuare o tehnică de rezolvare a unor ecuații de forma** $AX=C$, $XA=C$, $AXB=C$, **unde** A, B, C **sunt matrice cunoscute, iar** X **este matricea de aflat. Astfel de ecuații se numesc** ecuații matriceale
În acest paragraf rezolvăm astfel de ecuații când A, B **sunt matrice pătratice inversabile.**
Pentru rezolvarea ecuației $AX=C$ **înmulțim la stânga egalitatea cu** A^{-1} **și avem:**

$A^{-1}(AX)=A^{-1}C\Leftrightarrow\left(A^{-1}A\right)X=A^{-1}C\Leftrightarrow IX=A^{-1}C\Leftrightarrow X=A^{-1}C$.

Deci soluția ecuației date este $X=A^{-1}C$.

Pentru determinarea soluției ecuației $XA=C$ **vom înmulți la dreapta cu** A^{-1} **și analog vom găsi** $X=CA^{-1}$, **soluția ecuației matriceale.**

În fine, pentru găsirea soluției ecuației $AXB=C$ **înmulțim egalitatea la stânga cu** A^{-1}, **iar la dreapta cu** B^{-1} **și obținem** $X=A^{-1}CB^{-1}$.

Exemple. **1) Să se rezolve ecuația matriceală** $\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

R. **În acest caz** $A=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ **cu** $\det(A)=-1\neq 0$, **ceea ce arată că** A **este inversabilă. Găsim**

$A^{-1}=\begin{pmatrix} -3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ **și deci** $X=\begin{pmatrix} -3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ **sau** $X=\begin{pmatrix} 5 & 2\\ -3 & -1\end{pmatrix}$.

2) Să se rezolve ecuația matriceală $X\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$.

R. **Matricea** $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ **are** $\det(A)=2\neq 0$ **și deci este inversabilă.**

Inversa matricei A este matricea $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ -2 & 2 & -2\\ -3 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

Soluția ecuației matriceale este matricea $X = CA^{-1}$, unde C este matricea din membrul drept al ecuației. Găsim $X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

3) Să se rezolve ecuația matriceală $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

R. În acest caz maticele $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ având $\det(A) = -1 \neq 0$, $\det(B) = -1 \neq 0$ sunt inversabile. Soluția ecuației matriceale este matricea $X = A^{-1}CB^{-1}$, unde C este matricea din membrul drept al ecuației date. Găsim $X = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$.

2) Rezolvarea unor sisteme de ecuații liniare. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3x + 2y + z = 2 \\ 2x + y + 2z = -1 \end{cases}.$$

R. Considerăm următoarele matrice asociate acestui sistem

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ matricea sistemului ; $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ coloana termenilor liberi

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ matricea necunoscutelor sistemului

Sistemul se scrie sub formă matriceală $AX = B$.

Dacă matricea A este inversabilă, atunci se înmulțește la stânga cu A^{-1} egalitatea $AX = B$ și rezultă $X = A^{-1}B$.

Avem $\det(A) = 1 \neq 0$, adică A este inversabilă. Găsim $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Cu acestea $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, adică $x = 2, y = -1, z = -2$.

3) Criptografia și înmulțirea matricelor. Am văzut că un mesaj cifrat este mai greu de decodificat, în cazul în care tehnica de codificare este mai complexă.

Fie mesajul „ Apa lină este adâncă ", pe care îl codificăm cu ajutorul pătratului lui Polybe. Se obține mesajul cifrat (11 35 11)(31 24 33)(11 15 43)(44 15 11)
(14 24 33) (13 11 0). Am pus ultimul număr egal cu zero pentru a obține un grup de câte trei numere. Dacă lipsesc două litere se pun două zerouri. Punem aceste numere într-o matrice, considerând fiecare grup de trei numere o coloană a matricei. Avem:

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 31 & 11 & 44 & 14 & 13 \\ 35 & 24 & 15 & 15 & 24 & 11 \\ 11 & 33 & 43 & 11 & 33 & 0 \end{pmatrix}$$

Considerăm o matrice pătratică de ordin 3, cu elemente numere întregi, al cărei determinant este egal cu ± 1. Atunci există $A^{-1} = \pm A^*$ și are elemente numere întregi. Fie

aceasta $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ cu $\det(B) = 1 \neq 0$. Se face produsul:

$$P = BA = \begin{pmatrix} 57 & 88 & 69 & 70 & 71 & 24 \\ 46 & 57 & 58 & 26 & 57 & 11 \\ 11 & 33 & 43 & 11 & 33 & 0 \end{pmatrix}.$$

Numerele din matricea P reprezintă textul codificat. El va fi transmis destinatarului sub forma 57 46 11 88 57 33 69 58 43 70 26 11 71 57 33 24 11 0.

Destinatarul va pune câte trei termeni pe coloană și obține matricea P. Pentru a obține mesajul inițial din $P = BA$ se calculează $B^{-1}P = B^{-1}BA = A$, care este matricea mesajului inițial. Descifrarea acestuia se face utilizând pătratul lui Polybe. Pentru ușurința decodificării pătratul lui Polybe se poate completa cu alte linii și coloane corespunzătoare literelor mari ale alfabetului (A, $Ă$, B, C,...), cifrelor (0,1,...,9), semnelor speciale (. ; ?, ...).

4)Modelul economic al lui Leontiev

Una dintre cele mai importante aplicații ale teoriei matricelor în domeniul economic este studiul relației dintre producția industrială și cererea pieței(consumatorilor) . Răspunsul la această problemă a fost dat de Vasili Leontiev (1906-1999), economist rus, iar pentru modelul propus și contribuțiile sale în această direcție a primit Premiul Nobel în economie în anul 1973.

Vom prezenta aici metoda Leontiev considerând un exemplu mult simplificat, care este nerealist, dar ilustrează principiile de bază. Considerăm că economia unei țări are trei sectoare de activitate: agricultura (A), industria (I) și serviciile (S). În general, o parte din produsele unui sector este cumpărată de un alt sector, iar cele suplimentare sunt vândute altor clienți. Această relaționare o repartizăm prin matricea tehnologică a sistemului sau matricea intrări-ieșiri a sistemului:

Ieșire (cantitatea produsă)

$$\begin{array}{r} \\ \text{Intrare} \\ (\text{cantitate utilizată} \\ \text{în producție}) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & I & S \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} A \\ I \\ S \end{array} = T.$$

Care este semnificația acestor cifre ? Prima coloană (citită de sus în jos) ne spune că pentru producerea (producția) unei unități de produse agricole se utilizează 0,2 unități de produse agricole, 0,2 unități de bunuri industriale și 0,1 unități de servicii.

Interpretări analoage au și celelalte coloane (Printr-o unitate se poate înțelege o cantitate: tone, mii de tone, etc.) sau valoare (milioane, zeci de milioane, etc.).

Presupunem că totalul bunurilor cerute este de x,y,z unități de produse agricole, industriale și respectiv servicii. Care este valoarea produselor consumate (agricole, industriale, servicii) pentru a produce respectivele produse și servicii?

Observăm că 0,2 unități de produse agricole sunt necesare pentru a produce o unitate de produse agricole, iar pentru x unități de produse agricole se vor consuma $0{,}2 \cdot x$ (urmăriți elementele de pe linia întâi).

De asemenea, 0,2 unități de produse agricole sunt necesare pentru a produce o unitate de produse industriale și deci pentru a produce y unități industriale se consumă $0{,}2y$ unități produse agricole.

În fine pentru a produce o unitate de servicii sunt necesare 0,1 unități de produse agricole, deci pentru cele z unități de servicii se vor consuma $0{,}1z$ unități produse agricole.

Deci, cantitatea de unități de produse agricole pentru a produce cantitățile x, y, z este $0{,}2x + 0{,}2y + 0{,}1z$.

Analog, pentru a produce unitățile x, y, z sunt necesare $0,2x+0,4y+0,1z$ unități de produse industriale și respectiv $0,1x+0,2y+0,3z$ unități de servicii.

Atunci:

$x-(0,2x+0,2y+0,1z)=$ unități de produse agricole destinate cererii externe,

$y-(0,2x+0,4y+0,1z)=$ unități de produse industriale destinate cererii externe,

$z-(0,1x+0,2y+0,3z)=$ unități de servicii destinate cererii externe.

Să formalizăm matriceal aceste elemente.

Fie $P=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, matricea producție totală de bunuri.

Matricea TP reprezintă unitățile de produse agricole, industriale și servicii consumate în procesul de producție. Matricea TP se numește matricea consum intern. Matricea $P-TP$ dă producția de bunuri și servicii destinată cererii consumatorilor. Notăm cu D această matrice.

Deci $P-TP=D$ sau

Ecuația matriceală a modelului Leontiev		
P	$=$ TP	$+$ D
Total	Consum	Cererea
ieșiri	intern	externă

De aici $P-TP=D \Leftrightarrow (I_3-T)P=D \Leftrightarrow P=(I_3-T)^{-1}D$, dacă I_3-P este inversabilă.

Aplicație. Să se determine matricea producție totală de bunuri și servicii necesară satisfacerii unei cereri a consumatorilor (externi) în valoare de 100 milioane euro produse agricole, 80 milioane euro produse industriale și 50 milioane euro servicii.

R. Deci $D=\begin{pmatrix}100\\80\\50\end{pmatrix}$. Găsim $I_3-T=\begin{pmatrix}0,8&-0,2&-0,1\\-0,2&0,6&-0,1\\-0,1&-0,2&0,7\end{pmatrix}$ cu $\det(I_3-T)^{-1}\neq 0$,

iar $(I_3-T)^{-1}=\begin{pmatrix}1,43&0,57&0,29\\0,54&1,96&0,36\\0,36&0,64&1,57\end{pmatrix}$.

De aici $P=(I_3-T)^{-1}D=\begin{pmatrix}203,1\\228,8\\165,7\end{pmatrix}$,

ceea ce înseamnă că pentru a produce valoarea produselor din D ar trebui 203,1 milioane euro de produse agricole, 228,8 milioane euro de produse industriale și 165,7 milioane euro servicii. Valoarea de bunuri și servicii consumate în procesul intern de producție este

$P-D=\begin{pmatrix}103,1\\148,8\\115,7\end{pmatrix}$,

adică 103,1 milioane euro valoarea produselor agicole, 148,8 milione euro, valoarea produselor industriale și 115,7 milioane euro valoarea serviciilor.

Probleme rezolvate

1. Calculați determinanții de mai jos utilizând proprietățile determinanților:

1) $\Delta_1=\begin{vmatrix}a-b&b+c&c+a\\b-c&c+a&a+b\\c-a&a+b&b+c\end{vmatrix}$; 2) $\Delta_2=\begin{vmatrix}2&x-y&x-y\\x-y&-2xy&x^2+y^2\\x-y&x^2+y^2&-2xy\end{vmatrix}$;

3) $\Delta_3=\begin{vmatrix}b-c&c-a&a-b\\b+c&c+a&a+b\\b^2-c^2&c^2-a^2&a^2-b^2\end{vmatrix}$.

R. 1) Dacă la coloana întâi se adună coloana a doua, adică C_1+C_2, atunci

$\Delta_1=\begin{vmatrix}a+c&b+c&c+a\\b+a&c+a&a+b\\c+b&a+b&b+c\end{vmatrix}=0$, deoarece coloanele 1 și 3 sunt egale.

2) C_2+C_3 și obținem: $\Delta_2=\begin{vmatrix}2&2(x-y)&x-y\\x-y&(x-y)^2&x^2+y^2\\x-y&(x-y)^2&-2xy\end{vmatrix}=(x-y)\begin{vmatrix}2&2&x-y\\x-y&x-y&x^2+y^2\\x-y&x-y&-2xy\end{vmatrix}=0$,

având primele două coloane egale.

3) Să observăm că dacă adunăm elementele situate pe linia întâia se obține zero; la fel pentru linia a treia. Se adună coloanele 2 si 3 la 1, adică $C_1+C_2+C_3$ și rezultă

$\Delta_3=\begin{vmatrix}0&c-a&a-b\\2(a+b+c)&c+a&a+b\\0&c^2-a^2&a^2-b^2\end{vmatrix}=-2(a+b+c)\begin{vmatrix}c-a&a-b\\c^2-a^2&a^2-b^2\end{vmatrix}$.

Se scoate factor comun de pe coloana 1, $c-a$, iar de pe coloana 2, $a-b$ și avem:

$\Delta_3=-2(a+b+c)(c-a)(a-b)\begin{vmatrix}1&1\\c+a&a+b\end{vmatrix}=-2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$.

2. Să se calculeze determinanții de tip Vandermonde:

1) $\Delta_1=\begin{vmatrix}1&1&1\\a^2&b^2&c^2\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}$; 2) $\Delta_2=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}$; 3) $\Delta_3=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^4&b^4&c^4\end{vmatrix}$; 4) $\Delta_4=\begin{vmatrix}a^2&ab&b^2\\b^2&bc&c^2\\c^2&ac&a^2\end{vmatrix}$.

R. 1) Se efectuează transformările C_2-C_1, C_3-C_1 când avem: $\Delta_1=\begin{vmatrix}1&0&0\\a^2&b^2-a^2&c^2-a^2\\a^3&b^3-a^3&c^3-a^3\end{vmatrix}$.

Se scoate factor comun pe coloana 2, $b-a$, iar pe coloana 3, $c-a$ și rezultă:

$\Delta_1=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1&0&0\\a^2&b+a&c+a\\a^3&b^2+ab+a^2&c^2+ac+a^2\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)(ac+ab+bc)$.

2) Se efectuează operațiile următoare asupra coloanelor: C_2-C_1, C_3-C_1 și avem:

$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&0&0\\a&b-a&c-a\\a^3&b^3-a^3&c^3-a^3\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1&0&0\\a&1&1\\a^3&b^2+ab+a^2&c^2+ac+a^2\end{vmatrix}=$

$=(b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)$.

Observăm că găsirea determinantului conduce la un polinom omogen (fiecare monom al său are gradul patru) și simetric (permutând circular *a, b, c* polinomul rămâne același). Pe de altă parte dacă în determinant se face $b=a, c=a, c=b$, acesta este nul (având două coloane egale). Prin urmare polinomul ce se obține prin dezvoltarea determinantului se divide cu $(b-a)(c-a)(c-b)$. Cum acest produs este un polinom omgen și simetric de gradul trei, rezultă pentru cât un polinom omogen și simetric de gradul unu, deci de forma $k(a+b+c)$. Așadar $\Delta_2 = k(b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)$.

Pentru determinarea lui k se particularizează variabilele, punând de exemplu $a=0, b=1, c=-1$ când rezultă $k=1$.

3)Din nou facem zerouri pe linia 1 cu ajutorul transformărilor C_2-C_1, C_3-C_1:

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ a & b-a & c-a\\ a^4 & b^4-a^4 & c^4-a^4\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 1 & 1\\ a^4 & (b+a)(b^2+a^2) & (c+a)(c^2+a^2)\end{vmatrix}=$$

$$=(b-a)(c-a)(c-b)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac).$$

4) Dacă $a=0$, atunci găsim ușor $\Delta_4=-b^3c^3$. Analog dacă $b=0$ sau $c=0$ rezultă $\Delta_4=-(ac)^3$ și respectiv $\Delta_4=-(ab)^3$.

Presupunem că $abc\neq 0$. Atunci se scoate factor comun din fiecare linie a^2, b^2 și respectiv c^2. Se obține un determinant Vandermonde

$$\Delta_4=a^2b^2c^2\begin{vmatrix}1 & \left(\frac{b}{a}\right) & \left(\frac{b}{a}\right)^2\\ 1 & \left(\frac{c}{b}\right) & \left(\frac{c}{b}\right)^2\\ 1 & \left(\frac{a}{c}\right) & \left(\frac{a}{c}\right)^2\end{vmatrix}=a^2b^2c^2\left(\frac{c}{b}-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{c}-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{c}-\frac{c}{b}\right)=(a^2-bc)(b^2-ac)(c^2-ab).$$

3. Să se rezolve ecuațiile matriceale : a) $AX=C$; b) $XB=C$; c) $AXB=C$,

în cazul $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

R. Observăm că matricele *A, B* sunt inversabile $(\det(A)=1\neq 0, \det(B)=1\neq 0)$.

Pentru a rezolva a) se înmulțește ecuația la stânga cu A^{-1} și rezultă $A^{-1}AX=A^{-1}C$ sau $X=A^{-1}C$ (am ținut seamă că $A^{-1}A=AA^{-1}=I_3$).

Pentru rezolvarea ecuației b) înmulțim ecuația la dreapta cu B^{-1} și se obține $X=CB^{-1}$.

În fine, pentru rezolvarea lui c) înmulțim ecuația la stânga cu A^{-1}, iar la dreapta cu B^{-1} când avem $X=A^{-1}CB^{-1}$. În cazul nostru

$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$ când găsim pentru

a) $X=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$; b) $X=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$; c) $X=\begin{pmatrix}-8 & 6 & -2\\ 6 & -4 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

4. Arătați că funcția $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}, f(A)=\det(A)$ este surjectivă dar nu este injectivă.

R. Pentru orice $a\in\mathbb{R}$ există matricea $A=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ pentru care $f(A)=a$, ceea ce arată că *f* este surjectivă.

Funcția *f* nu este injectivă deoarece pentru

$A_1=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$, $A_1\neq A_2$ $(a\neq 1)$ avem $f(A_1)=f(A_2)=a$.

5. Dacă $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), iar\ \overline{A}=(\overline{a_{ij}})$, unde $\overline{a_{ij}}$ este conjugatul lui a_{ij}, atunci $\det(\overline{A})=\overline{\det(A)}$.

R. Calculând $\det(\overline{A})$ și ținând seama de proprietățile $\overline{x+y}=\overline{x}+\overline{y}$, $\overline{xy}=\overline{x}\cdot\overline{y}$ rezultatul este imediat.

6*. Dacă $A, B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ și $AB=BA$ (matricele comută), atunci $\det(A^2+B^2)\geq 0$.

R. Are loc egalitatea $(A+iB)(\overline{A+iB})=(A+iB)(A-iB)=A^2+B^2$,

iar de aici $\det(A^2+B^2)=\det[(A+iB)(A-iB)]=$

$=\det(A+iB)\cdot\det(A-iB)=\det(A+iB)\det(\overline{A+iB})=\det(A+iB)\cdot\overline{\det(A+iB)}=|\det(A+iB)|^2\geq 0$.

7*. Fie $A, B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $AB=BA$ și $\det(A^2+B^2)=0$.

Să se arate că $\det(A)=\det(B)$.

R. Se consideră funcția polinomială de tip determinant $f(x)=\det(A+xB)$, care este o funcție de grad cel mult doi. Termenul liber se obține pentru $x=0$ când $f(0)=\det(A)$.

Coeficientul lui x^2 este $\det(B)$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\det(A+xB)}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\det\left(\frac{1}{x}A+B\right)=\det(B)\right)$.

Așadar $f(x)=\det(B)x^2+ax+\det(A)$.

Din ipoteză $\det(A^2+B^2)=\det(A+iB)\det(A-iB)=f(i)f(-i)=0$.

Cum f are coeficienți reali rezultă $f(i)=0, f(-i)=0$. Deoarece $grad(f)=2$ se deduce $f(x)=m(x^2+1)$. Ținând cont de scrierea lui $f(x)$ rezultă $\det(A)=\det(B)=m$.

Observație. Dacă $B=I_2$, atunci $AI_2=I_2A$ și dacă $\det(A^2+I_2)=0$, atunci $\det(A)=1$.

8*. Fie $A=\begin{pmatrix}a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix}$, $a, b, c\in\mathbb{R}$, $a^2+b^2+c^2=1$. Arătați că $|\det(A)|\leq 1$.

R. Ținând seama că $\det({}^tA)=\det(A)$ avem:

$$(\det(A))^2 = \det(A^tA) = \begin{vmatrix} \sum a^2 & \sum ab & \sum ab \\ \sum ab & \sum a^2 & \sum ab \\ \sum ab & \sum ab & \sum a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix},$$

unde $x = \sum ab$ **. Dar** $\sum ab \le \sum a^2 = 1$ **şi deci** $x \le 1$**.**

În fine, de mai sus $(\det(A))^2 = 2x^3 - 3x^2 + 1 = x^2(2x-3)+1 \le 1$ **şi deci** $|\det(A)| \le 1$**.**

2.5. APLICAŢII ALE DETERMINANŢILOR ÎN GEOMETRIA ANALITICĂ

1)Ecuaţia dreptei sub formă de determinant

Fie $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ două puncte distincte (nesituate pe o paralelă cu axa Oy, $x_1 \neq x_2$) în reperul cartezian xOy. Aceste puncte determină o dreaptă. Am găsit anul precedent că ecuaţia acestei drepte este:

$(AB): y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ sau încă

$(AB): (y - y_1)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x - x_1) = 0$.

Această ultimă scriere sugerează utilizarea determinantului de ordin 2

$(AB): \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$, scriere care provine din determinantul de ordin 3

$(AB): \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ în care se scade linia 2 din celelalte şi se dezvoltă determinantul după coloana 3.

Deci am demonstrat următoarea:

Teoremă. Fie $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), x_1 \neq x_2$. Atunci ecuaţia dreptei AB dată sub formă de determinant este

$$(AB): \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Observaţii. 1) Să remarcăm că pe coloana corespunzătoare abscisei x se scriu abscisele celor două puncte, iar pe coloana corespunzătoare ordonatei y se scriu ordonatele celor două puncte în aceeaşi ordine.

2) Să observăm că expresia

$$E(x,y) = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$ conţine pe x, y la puterea întâi şi deci $E(x,y) = 0$ este ecuaţia unei drepte. Cum $E(x_1, y_1) = E(x_2, y_2) = 0$ (deoarece avem două linii egale), deducem că punctele A, B aparţin dreptei $E(x,y) = 0$. Deci $E(x,y) = 0$ este chiar ecuaţia dreptei AB.

Exemplu. Să se scrie ecuaţia dreptei determinată de punctele $A(2,3), B(-1,5)$ **sub formă de determinant.**

R.Avem $(AB): \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

2)Coliniaritatea a trei puncte

O problemă pe care am întâlnit-o şi în clasele precedente şi căreia i-am dat mai multe rezolvări.

În clasa a IX-a, pentru a proba coliniaritatea a trei puncte M, N, P am utilizat una din tehnicile următoare: 1) relaţia metrică $MN + NP = MP$; 2) axioma lui Euclid; 3) vectorul de poziţie $\vec{r_N} = \alpha \vec{r_M} + \beta \vec{r_P}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha + \beta = 1$; 4) reciproca teoremei lui Menelaos $(AM/MB)(BN/NC)(CP/PA) = 1$, cu ABC triunghi, iar $M \in AB, N \in BC, P \in AC$; 5) coliniaritatea vectorilor din una din perechile de vectori $(\vec{MN}, \vec{MP}), (\vec{MN}, \vec{NP}), (\vec{MP}, \vec{NP})$. În clasa a X-a, pentru aceeaşi problemă am folosit una din metodele: 1) vectorială, constând în a proba coliniaritatea, de exemplu, a vectorilor $\vec{MN}$ şi $\vec{NP}$ ($\exists \alpha \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\vec{MN} = \alpha \vec{NP}$); 2) analitică (utilizând panta dreptei) când arătăm că $m_{MN} = m_{MP}$;

3) cu numere complexe când trebuie dovedit că $(z_N - z_M)/(z_P - z_M) \in \mathbb{R}^*$.

Fie dreapta $(d): ax + by + c = 0$ $(a \neq 0 \text{ sau } b \neq 0)$. Punctul $C(x_0, y_0)$, este situat (aparţine) pe dreapta (d) dacă punând $x = x_0, y = y_0$ în ecuaţia dreptei aceasta se verifică, adică $ax_0 + by_0 + c = 0$.

Trei puncte A, B, C sunt coliniare dacă sunt situate pe aceeaşi dreaptă. Referitor la acest aspect are loc următoarea

Teoremă. Punctele $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ **sunt coliniare** dacă şi numai dacă $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Demonstraţie. Se scrie ecuaţia dreptei BC sub formă de determinant şi se impune condiţia ca punctul A să fie situat pe dreapta BC. ■

Exemplu. **Să se arate că punctele** $A(1,2), B(-5,-2), C(-2,0)$ **sunt coliniare.**

R. **Trebuie verificată condiția** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, **ceea ce-i imediat.**

3) Distanța de la un punct la o dreaptă

Considerăm dreapta $(d): y = mx + n$, neparalelă cu axele de coordonate (Fig.1) și $P(x_0, y_0)$ un punct dat pentru care vrem să determinăm distanța d de la P la dreapta (d).

Vom găsi o exprimare a distanței d în funcție de elementele dreptei m, n precum și coordonatele x_0, y_0 ale punctului P.

Analizăm două cazuri după cum punctul P se află în unul sau altul din cele

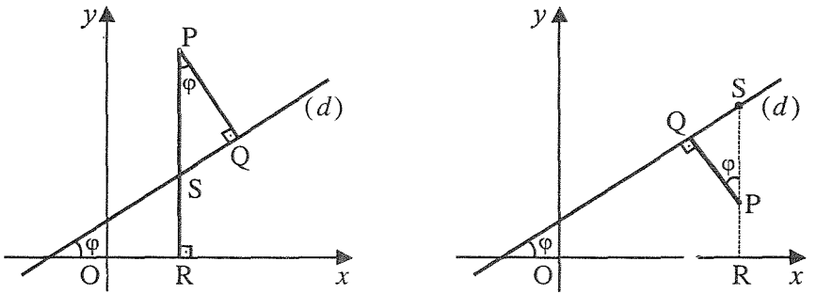


Fig. 1

două semiplane, determinate de dreapta (d).

Dacă P se află în situația din Fig. 1.a), atunci fie Q proiecția lui P pe dreapta (d), iar R proiecția lui P pe axa Ox și S intersecția dreptei (d) cu PR. Din triunghiul dreptunghic PQS avem $d = PQ = PS\cos\varphi = (PR - SR)\cos\varphi$.

Cum S aparține dreptei (d) și având abscisa x_0, atunci $SR = mx_0 + n$.

Deci $d = (y_0 - mx_0 - n)\cos\varphi = \dfrac{y_0 - mx_0 - n}{\sqrt{1 + tg^2\varphi}} = \dfrac{y_0 - mx_0 - n}{\sqrt{1 + m^2}}$.

Dacă P se află în celălalt semiplan determinat de dreapta (d) (Fig.1.b), atunci

$$d = (SR - PR)\cos\varphi = (mx_0 + n - y_0)\cos\varphi = -\frac{y_0 - mx_0 - n}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

În concluzie, oricare ar fi poziția punctului P față de dreapta (d), distanța lui la dreaptă se exprimă prin :

$$\boxed{d = \frac{|y_0 - mx_0 - n|}{\sqrt{1 + m^2}} \quad (*)}$$

Dacă ecuația dreptei (d) are forma generală $(d): ax + by + c = 0$

atunci $m = -\dfrac{a}{b}, n = -\dfrac{c}{b}$ și deci (*) devine $d = \dfrac{\left|y_0 + \frac{a}{b}x_0 + \frac{c}{b}\right|}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}} = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Deci în cazul ecuației generale a dreptei (d) avem exprimarea

$d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, tradusă prin:

> Distanța unui punct $P(x_0, y_0)$, la o dreaptă $(d): ax + by + c = 0$ se obține înlocuind în ecuația ei coordonatele curente prin acelea ale punctului dat, împărțind această cantitate prin rădăcina pătrată a sumei pătratelor coeficienților variabilelor și luând valoarea absolută a rezultatului astfel obținut:
>
> $$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (**)$$

Probleme rezolvate

1 **Să se calculeze distanța de la punctul** $P(-1,2)$ **la dreapta** $(d): 3x + 4y - 3 = 0$.

R. **Aplicăm formula (**) și obținem:** $d = \dfrac{|3(-1) + 4\cdot 2 - 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{2}{5}$.

2 **Să se afle lungimile înălțimilor triunghiului ale cărui laturi au ecuațiile** $(AB): 2x + 3y - 11 = 0, (BC): 2x - 5y - 3 = 0, (AC): 2x - y + 1 = 0$.

R. **Mai întâi determinăm coordonatele vârfurilor.**

Coordonatele punctului A, **se obțin rezolvând sistemul format cu ecuațiile dreptelor** $(AB), (AC)$, $\begin{cases} 2x + 3y - 11 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$, **când obținem** $A(1,3)$.

Coordonatele punctului B, **le determinăm rezolvând sistemul format din ecuațiile dreptelor** $(AB), (BC)$, $\begin{cases} 2x + 3y - 11 = 0 \\ 2x - 5y - 3 = 0 \end{cases}$. **Găsim** $B(4,1)$.

Coordonatele punctului C, **le determinăm rezolvând sistemul format din ecuațiile dreptelor** $(AC), (BC)$, $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2x - 5y - 3 = 0 \end{cases}$. **Se obține** $C(-1,-1)$.

Lungimea înălțimii din A **este egală cu distanța de la** A **la dreapta** $(BC): h_a = \dfrac{|2\cdot 1 - 5\cdot 3 - 3|}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = \dfrac{16}{\sqrt{29}}$.

Lungimea înălțimii din B este egală cu distanța de la B la dreapta $(AC): h_b = \frac{|2\cdot 4-1+1|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$.

În fine, lungimea înălțimii din C este egală cu distanța de la C la dreapta

$(AB): h_c = \frac{|2(-1)+3(-1)-11|}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{16}{\sqrt{13}}$.

3.Să se determine distanța între dreptele paralele $(d_1): 3x+4y-5=0, (d_2): 6x+8y+7=0$.

R.Să observăm mai întâi că dreptele sunt paralele, având aceeași pantă $m_1 = m_2 = -\frac{3}{4}$.

Distanța între două drepte paralele este distanța de la un punct al unei drepte la cealaltă dreaptă. Fie deci $P(3,-1)$ un punct de pe (d_1). Distanța de la P la (d_2),

$d = \frac{|6\cdot 3+8(-1)+7|}{\sqrt{6^2+8^2}} = \frac{17}{10}$, reprezintă distanța între cele două drepte.

4.Să se scrie ecuațiile dreptelor care trec prin punctul $A(1,2)$ și sunt egal depărtate de punctele $M(3,3), N(5,2)$.

R.Ecuația unei drepte care trece prin punctul A are forma

$y-2=m(x-1)$ sau $mx-y+2-m=0, (1)$. Parametrul m din (1) se va determina din cerința ca punctele M, N să aibă aceeași distanță față de dreapta (1), adică

$\frac{|3m-3+2-m|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{|5m-2+2-m|}{\sqrt{m^2+1}}$ sau $|2m-1| = |4m|$ sau $4m = \pm(2m-1)$.

De aici $m_1 = -\frac{1}{2}$, când (1) devine $x+2y-5=0$ și $m_2 = \frac{1}{6}$ când (1) ne dă dreapta $x-6y+11=0$.

4) Aria unui triunghi

Fie $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3.y_3)$ (Fig. 2) vârfurile triunghiului ABC.

Ne propunem să exprimăm aria acestui triunghi în funcție de coordonatele vârfurilor. Considerăm CC' înălțimea triunghiului dusă din C pe AB. Atunci aria triunghiului ABC

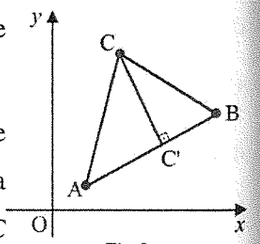


Fig.2

este egală cu $S_{ABC} = \frac{AB\cdot CC'}{2}$, unde $AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ și CC' reprezintă distanța de la C la dreapta (AB). Avem ecuația dreptei (AB) sub forma

$(AB): (y_2-y_1)(x-x_1)-(y-y_1)(x_2-x_1)=0$

și deci $CC' = \frac{|(y_2-y_1)(x_3-x_1)-(y_3-y_1)(x_2-x_1)|}{\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}}$.

Acum S_{ABC} devine: $S_{ABC} = \frac{1}{2}|(y_2-y_1)(x_3-x_1)-(y_3-y_1)(x_2-x_1)| =$

$= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$, unde $|\ |$ reprezintă modulul.

Așadar pentru aria triunghiului ABC avem formula $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$.

Observație. Dacă $C \in AB$, atunci $S_{ABC} = 0$ și se obține condiția ca trei puncte să fie coliniare.

Probleme rezolvate

1.Să se calculeze aria triunghiului având vârfurile în punctele $A(2,3), B(1,-6), C(0,3)$.

R.Conform formulei de mai sus vom calcula mai întâi determinantul:

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -18$. Acum $S_{ABC} = \frac{1}{2}|\Delta| = 9$.

2.Să se calculeze aria patrulaterului ale cărui vârfuri sunt punctele $A(1,2)$, $B(-3,4)$, $C(-1,-2)$, $D(3,-2)$.

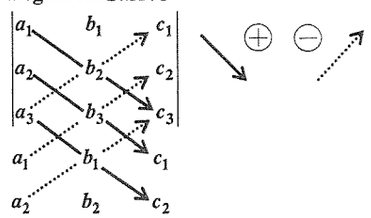
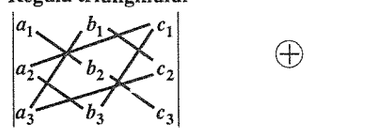
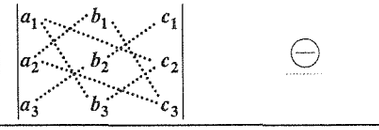
R.Descompunem patrulaterul în două triunghiuri și deci $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$. Avem

$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\Delta_1|$, unde $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 20$ și deci $S_{ABC} = 10$, iar

$S_{ACD} = \frac{1}{2}|\Delta_2|$, unde $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 16$ și deci $S_{ACD} = 8$.

Acum $S_{ABCD} = 10+8 = 18$.

REZUMATUL CAPITOLULUI

Noțiuni	Definiție	Notație. Denumiri
Determinant de ordin 2	$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ $\det(A)=a_1b_2-a_2b_1$	$\det(A)=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\lvert A\rvert$; a_1b_2, a_2b_1 se numesc termenii dezvoltării determinantului
Determinant de ordin 3	$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ $\det(A)=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ $\det(A)=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$	- dezvoltarea după prima linie - dezvoltarea după prima coloană
	Regula lui Sarrus 	$=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-$ $-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3$ ($a_1b_2c_3, a_2b_3c_1, a_3b_1c_2, a_3b_2c_1$, $a_1b_3c_2, a_2b_1c_3$ se numesc termenii dezvoltării determinantului)
	Regula triunghiului 	$a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2$
		$-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1$
Proprietățile determinanților	1) $\det(A)=\det({}^tA)$, $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ - (determinantul unei matrice este egal cu determinantul matricei transpuse)	
	2) $\det(A)=0$, dacă elementele unei linii (coloane) sunt zero	
	3) Schimbând două linii (coloane) între ele ale unei matrice se obține o matrice cu determinantul egal cu opusul determinantului matricei date	
	4) Determinantul unei matrice cu două linii (coloane) proporționale este zero	
	5) Forțare de factor comun $\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 \\ ka_2 & b_2 \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$	
	6) Dacă la o linie (coloană) a matricei A se adună elementele altei linii (coloane) înmulțite cu același număr, atunci matricea obținută are același determinant ca și matricea A	

Probleme propuse

Determinanți de ordin 2

1. Să se calculeze determinanții:

1) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{2} \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} A_3^1 & A_3^2 \\ C_4^2 & C_4^3 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} i & 1-i \\ 1+i & -i \end{vmatrix}$.

2. Fie $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Calculați $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(AB)$ și arătați că $\det(AB)=\det(A)\det(B)$.

3. Să se rezolve, utilizând regula lui Cramer, sistemele:

1) $\begin{cases} -x+3y=5 \\ 2x+5y=-2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 4x-2y=3 \\ 3x+5y=-2 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 6x-5y=-4 \\ 4x+3y=7 \end{cases}$.

4. Fie $A,B\in\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$. Care dintre egalități este adevărată:

1) $\det(A+B)=\det(A)+\det(B)$? 2) $\det(AB)=\det(A)\det(B)$? 3) $\det(AB)=\det(BA)$?

Justificați răspunsurile.

5. a) Dacă $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, atunci arătați că $\det(AB)=\det(A)\det(B)$.

b) Dacă $A_k\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $k=\overline{1,n}$, atunci $\det(A_1A_2...A_n)=\det(A_1)\det(A_2)...\det(A_n)$.

6. Dacă $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ și $\det(A)=3, \det(B)=4$, atunci calculați $\det(AB), \det(A^3), \det(B^4), \det(2A), \det(3B), \det(4AB)$.

Determinanți de ordin 3

1. Să se calculeze determinanții (prin regula lui Sarrus, regula triunghiului sau utilizând formula de recurență):

I. 1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$;

6) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$; 7) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} i & -1 & -i \\ 0 & i & 1 \\ 1 & -i & -1 \end{vmatrix}$; 9) $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \end{vmatrix}$, unde $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$.

II. 1) $\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix}$.

2. Pentru matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ determinați:

1) semnele produselor care apar în $\det(A)$: a) $(-2)\cdot4\cdot5$; b) $5\cdot(-1)\cdot3$; c) $1\cdot(-1)\cdot2$; d) $1\cdot(-3)\cdot4$.

2) dacă produsele: a) $1\cdot(-2)\cdot(-3)$; b) $(-1)\cdot3\cdot2$ 1; c) $1\cdot(-3)\cdot4$ sunt termeni ai lui $\det(A)$;

3) complementii algebrici ai elementelor: a) 3; b) 0; c) –3.

3.Fie matricele $A,B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&0&-1\\1&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-4&0\\1&-1&2\\0&2&1\end{pmatrix}$.

Calculați $\det(A),\det(B),\det(AB)$ și verificați egalitatea $\det(AB)=\det(A)\det(B)$.

4.Arătați că $\begin{vmatrix}0&0&a\\0&b&c\\d&e&f\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}f&c&a\\e&b&0\\d&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&0&0\\c&b&0\\f&e&d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&c&f\\0&b&e\\0&0&d\end{vmatrix}=abd$.

5.Să se rezolve, utilizând regula lui Cramer, sistemele:

1) $\begin{cases}x+y-z=8\\2x-y-2z=6\\5x+2y+z=4\end{cases}$; 2) $\begin{cases}-2x+y+z=1\\3x-2y+z=1\\3x+y-2z=1\end{cases}$; 3) $\begin{cases}x+y+z=1\\x-4y+z=0\\x-y-2z=3\end{cases}$.

Proprietăți ale determinanților

1.Arătați că: 1) $\begin{vmatrix}a&0&0\\b&c&0\\d&e&f\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b&d\\0&c&e\\0&0&f\end{vmatrix}=acf$; 2) $\begin{vmatrix}0&0&a\\0&b&c\\d&e&f\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&d\\0&b&e\\a&c&f\end{vmatrix}=abd$.

2.Dacă un determinant de ordin 4 are cel puțin 13 elemente egale cu zero, atunci determinantul este nul. Generalizați.

3.Să se arate că (fără a calcula efectiv determinanții):

1) $\begin{vmatrix}1&-2&3\\0&1&-1\\3&-4&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0&1&-1\\1&-2&3\\3&-4&0\end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix}3&-2&1\\-1&1&0\\0&-4&3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-2&3\\0&1&-1\\3&-4&0\end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix}-1&1&2\\0&3&5\\-1&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&2\\0&-1&-1\\-1&4&4\end{vmatrix}=0$; 4) $\begin{vmatrix}2&0&4\\-3&-1&-6\\1&2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&2\\3&-3&6\\1&0&-1\end{vmatrix}=0$;

5) $\begin{vmatrix}1&-2&3\\2&-1&0\\0&4&-5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1&3&-2\\2&-1&0\\0&4&-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&1\\2&-1&0\\0&4&-5\end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix}2a+3d&2b+3d&2c+3d\\a&b&c\\1&1&1\end{vmatrix}=0$;

7) $\begin{vmatrix}-1&0&-1\\2&-1&1\\-3&4&1\end{vmatrix}=0$; 8) $\begin{vmatrix}2&-3&5\\1&0&-1\\3&-3&4\end{vmatrix}=0$; 9) $\begin{vmatrix}100&27&13\\10&18&3\\20&9&3\end{vmatrix}=0$.

4.Exprimați determinanții D_2,D_3,D_4 în funcție de D_1:

$D_1=\begin{vmatrix}a&a'&a''\\b&b'&b''\\c&c'&c''\end{vmatrix}$, $D_2=\begin{vmatrix}c&c'&c''\\b&b'&b''\\a&a'&a''\end{vmatrix}$, $D_3=\begin{vmatrix}b&b'&b''\\c&c'&c''\\a&a'&a''\end{vmatrix}$, $D_4=\begin{vmatrix}a'&b'&c'\\a''&b''&c''\\a&b&c\end{vmatrix}$.

5.Exprimați determinanții D_2,D_3,D_4,D_5,D_6 în funcție de D_1:

$D_1=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$; $D_2=\begin{vmatrix}a_1&a_2&\lambda a_3\\b_1&b_2&\lambda b_3\\c_1&c_2&\lambda c_3\end{vmatrix}$; $D_3=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\\lambda b_1&\lambda b_2&\lambda b_3\\\lambda c_1&\lambda c_2&\lambda c_3\end{vmatrix}$; $D_4=\begin{vmatrix}2a_1&2a_2&2a_3\\-2b_1&-2b_2&-2b_3\\-c_1&-c_2&-c_3\end{vmatrix}$;

$D_5=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\-a_3&-b_3&-c_3\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}$; $D_6=\begin{vmatrix}c_1&-a_1&b_1\\-c_2&a_2&-b_2\\c_3&-a_3&b_3\end{vmatrix}$.

6.Fie $A,B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ astfel încât $\det(A)=2,\det(B)=5$. Să se calculeze: $\det(AB)$, $\det(A^3),\det(3A),\det(4B),\det(2AB)$.

7.O matrice obținută din matricea identică prin una din transformările elementare se numește matrice elementară. Celor trei tipuri de operații elementare le corespund trei tipuri de matrice elementare.

Tipul I. O matrice de tipul I este o matrice obținută din I_3 prin interschimbarea a două linii. De exemplu, $E_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ se obține din I_3 prin schimbarea primelor două linii.

Ce semnifică AE_1, E_1A, $\forall A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? (Efectuați produsul de matrice și precizați cum se obțin matricele AE_1, E_1A din A). Calculați $\det(AE_1)$, $\det(E_1A)$ în funcție de $\det(A)$ (Utilizați formula $\det(AB)=\det(A)\det(B)$).

Tipul II. O matrice elementară este de tipul II dacă este obținută din I_3 prin înmulțirea unei linii cu o constantă nenulă.

De exemplu, $E_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$ se obține din I_3 prin înmulțirea liniei 3 din I_3 cu factorul 5.

Ce semnifică AE_2, E_2A, $\forall A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? Calculați $\det(AE_2)$, $\det(E_2A)$ în funcție de $\det(A)$.

Tipul III. O matrice elementară este de tipul III, dacă se obține din I_3, prin adunarea la o linie a altei linii înmulțită cu o constantă nenulă.

De exemplu, $E_3=\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ se obține din I_3 prin adunarea la linia întâi a liniei 3, înmulțită cu factorul 4.

Ce semnifică AE_3, E_3A, $\forall A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? Calculați $\det(AE_3)$, $\det(E_3A)$ în funcție de $\det(A)$.

8.Dacă $E_1,E_2,E_3\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ sunt matrice elementare de tipurile I, II, și respectiv III iar $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $\det(A)=5$, iar E_2 se formează din I_3 înmulțind linia a doua cu 3, atunci calculați: a) $\det(E_1A)$; b)$\det(E_2A)$; c) $\det(E_3A)$; d) $\det(AE_1)$; e) $\det(E_1^2)$; f)$\det(E_1E_2E_3)$.

9.Să se arate egalitățile de mai jos (utilizând proprietățile determinanților):

1) $\begin{vmatrix}2&1&-1\\3&4&2\\-2&-5&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&0\\-5&4&6\\8&-5&-2\end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&2\\4&1&2\\7&1&2\end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&1\\1&3&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-1&1\\0&-1&-1\\1&3&2\end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix}1&1&1\\15&14&16\\0&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&1\\1&-2&16\\1&-2&1\end{vmatrix}$.

10.Arătați că următorii determinanți au valoarea zero, fără a-i dezvolta:

1) $\begin{vmatrix}a+b&1&c\\b+c&1&a\\c+a&1&b\end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix}a-b&x-y&\alpha-\beta\\b-c&y-z&\beta-\gamma\\c-a&z-x&\gamma-\alpha\end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix}a&a+u&a+\lambda u\\b&b+v&b+\lambda v\\c&c+w&c+\lambda w\end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix}a&b&c\\a^2-bc&b^2-ca&c^2-ab\\2a+b+c&a+2b+c&a+b+2c\end{vmatrix}$.

11. Calculați determinanții următori (de tip Vandermonde sau reductibili la tipul Vandermonde):

1) $\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} a^3 & a & a^2 \\ b^3 & b & b^2 \\ c^3 & c & c^2 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & y & 3z \\ 4x^2 & y^2 & 9z^2 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} x+y^2 & y+z^2 & z+x^2 \\ x^2+y^3 & y^2+z^3 & z^2+x^3 \\ x^3+y^4 & y^3+z^4 & z^3+x^4 \end{vmatrix}$.

12. Să se calculeze determinanții:

1) $\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} \sin a & \sin 2a & \sin 3a \\ \sin b & \sin 2b & \sin 3b \\ \sin c & \sin 2c & \sin 3c \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} \sin^2 a & \cos^2 a & \sin a \cos a \\ \sin^2 b & \cos^2 b & \sin b \cos b \\ \sin^2 c & \cos^2 c & \sin c \cos c \end{vmatrix}$.

13. Să se scrie sub formă de produs determinanții (utilizând proprietățile determinanților):

1) $\begin{vmatrix} 1-x-y & z & z \\ x & 1-y-z & x \\ y & y & 1-x-z \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} (y+z)^2 & x^2 & x^2 \\ y^2 & (x+z)^2 & y^2 \\ z^2 & z^2 & (x+y)^2 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$. Calculând în două moduri deduceți identitatea:

$$\sum a^3 - 3abc = \left(\sum a\right)\left(\sum a^2 - \sum ab\right).$$

14. Să se rezolve ecuațiile și inecuațiile:

1) $\begin{vmatrix} x & 2 & 2 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 0$; 4) $\begin{vmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 1-2x & 0 \\ x & 0 & 1-3x \end{vmatrix} = 0$;

5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & x+1 & 2x+1 \\ 3 & 2x+1 & 3x+1 \end{vmatrix} = -1$; 6) $\begin{vmatrix} x & -14 & 5 \\ 1 & x & x+1 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} \geq 0$; 7) $\begin{vmatrix} e^{2x^2} & e^2 & e^{-x} \\ e^2 & e^{2x} & e^{-x^2} \\ e^{-x} & e^{-x^2} & e^{2x} \end{vmatrix} < 0$.

15. Să se rezolve ecuațiile și inecuațiile:

1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & x \\ x & 0 & 1 & 1 \\ 1 & x & 0 & 1 \\ 1 & 1 & x & 0 \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = 0$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = 0$;

4) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$; 5) $\begin{vmatrix} x^2 & 3x^2 & 3x & 1 \\ x^2 & x^2+2x & 2x+1 & 1 \\ x & 2x+1 & x+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \leq 0$; 6) $\begin{vmatrix} \ln x & \ln 2 & \ln 3 & \ln 5 \\ \ln 2 & \ln x & \ln 5 & \ln 3 \\ \ln 3 & \ln 5 & \ln x & \ln 2 \\ \ln 5 & \ln 3 & \ln 2 & \ln x \end{vmatrix} > 0$.

16. Să se calculeze determinanții de ordin n:

I. 1) $d_n = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x+1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & x+1 \end{vmatrix}$; 2) $d_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$; 3) $d_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$;

4) $d_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{vmatrix}$; 5) $d_n = \begin{vmatrix} 0 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ \frac{1}{x} & 0 & x & \dots & x^{n-2} \\ \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x} & 0 & \dots & x^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{x^{n-1}} & \frac{1}{x^{n-2}} & \frac{1}{x^{n-3}} & \dots & 0 \end{vmatrix}$;

6) $d_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}$.

II. Pentru determinanții de ordin n arătați că au loc relațiile de recurență:

1) $d_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}$, $a_i \in \mathbb{R}, d_n = a_n d_{n-1} + a_1 a_2 \dots a_{n-1}, n \geq 3$;

2) $d_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}$, $d_n = 2^{n-1} + d_{n-1}, n \geq 3$;

3) $d_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}$, $d_n = 3d_{n-1} - 2d_{n-2}, n \geq 3, d_1 = 3, d_2 = 7$;

4) $d_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$, $d_n = (\alpha+\beta)d_{n-1} - \alpha\beta d_{n-2}, n \geq 3,$
$d_1 = \alpha+\beta, d_2 = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2.$

Inversa unei matrice

1.Verificați că matricele A și A^{-1} sunt una inversa celeilalte:

1) $A=\begin{pmatrix}2&4\\3&1\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{10}&\frac{2}{5}\\\frac{3}{10}&-\frac{1}{5}\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&5\\0&1&-4\\0&0&1\end{pmatrix}$.

2.Determinați inversele matricelor (dacă există):

I. 1)$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$; 2)$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$; 3)$\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$; 4)$\begin{pmatrix}2&3\\-1&5\end{pmatrix}$; 5)$\begin{pmatrix}i&1\\1&i\end{pmatrix}$; 6)$\begin{pmatrix}1&1-i\\1+i&1\end{pmatrix}$.

II. 1)$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$; 2)$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$; 3)$\begin{pmatrix}2&1&-1\\-3&2&1\\-1&3&0\end{pmatrix}$; 4)$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\-1&2&1\end{pmatrix}$; 5)$\begin{pmatrix}1&\varepsilon&\varepsilon^2\\\varepsilon&0&1\\0&1&\varepsilon^2\end{pmatrix}$, $\varepsilon^3=1$.

3.Să se determine parametrul real m astfel încât următoarele matrice să fie nesingulare:

I. 1)$\begin{pmatrix}m+\sqrt{3}&1\\1&m-\sqrt{3}\end{pmatrix}$; 2)$\begin{pmatrix}3&m\\m&3\end{pmatrix}$; 3)$\begin{pmatrix}1-m&1+m\\m&1\end{pmatrix}$.

II. 1)$\begin{pmatrix}1&m&1\\1&1&m\\m&1&1\end{pmatrix}$; 2)$\begin{pmatrix}0&1&m\\-1&m&2\\3&1&-4\end{pmatrix}$; 3)$\begin{pmatrix}1&m&m^2\\m^2&1&m\\m^2&m&1\end{pmatrix}$.

III. 1)$\begin{pmatrix}5&x&3\\2x&-1&x\\m+1&2&m\end{pmatrix}$, $\forall x\in\mathbb{R}$; 2)$\begin{pmatrix}1&x&-3\\x&-1&x\\1&0&m\end{pmatrix}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

4.Fie $A=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$. Dacă A este inversabilă fie S suma elementelor matricei A^{-1}.

Determinați a pentru care $S>1$.

5.Să se rezolve ecuațiile matriceale: a) $AX=C$; b)$XB=C$; c)$AXB=C$, unde:

1) $A=\begin{pmatrix}5&-4\\-8&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix}-2&3&1\\3&6&2\\1&2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&2&3\\1&-2&3\end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&-3\\-4&1&3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&2&3\end{pmatrix}$;

4) $A=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2&0\\0&-1\\1&2\end{pmatrix}$.

6.Să se rezolve sistemele de ecuații, utilizând inversa unei matrice:

1)$\begin{cases}2x+5y=3\\x-3y=2\end{cases}$; 2)$\begin{cases}3x+4y=5\\2x-5y=8\end{cases}$; 3)$\begin{cases}x_1-x_2+3x_3=2\\2x_1+x_2+2x_3=2\\-2x_1-2x_2+x_3=3\end{cases}$; 4)$\begin{cases}2x-3y-4z=4\\-z=3\\x-2y+z=-8\end{cases}$;

5)$\begin{cases}x+4y-z=3\\2x+3y-2z=1\\-x+2y+3z=7\end{cases}$.

7.Asociați fiecărei litere poziția ei în alfabet: $\underset{1}{a(\breve{a})},\ \underset{2}{b},\ \underset{3}{c},\ \underset{4}{d},\ \underset{5}{e},\ \underset{6}{f},\ \underset{7}{g},\ \underset{8}{h},\underset{9}{i(\hat{a})},\ \underset{10}{j},...$

și codificați mesajul : „Aștept răspuns". Aranjați câte trei numere din mesajul cifrat în câte o coloană a matricei A. Codificați în continuare acest mesaj folosind matricea $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$. Transmiteți mesajul colegului de bancă sub formă de șir de numere, împreună cu matricea B și prima codificare, cerându-i să justifice decodificarea mesajului.

8.(Modelul Leontiev) Economia unei țări produce cărbune și oțel. Pentru producerea fiecărei tone de oțel sunt necesare 0,3 tone oțel și 0,5 tone cărbune. Pentru extragerea unei tone de cărbune sunt necesare 0,2 tone oțel și 0,5 tone cărbune. Dacă cererea externă este de 25 tone oțel și 50 tone cărbune, cât ar trebui produs din fiecare ?

9.(Modelul Leontiev) O fermă este specializată pe producția de carne și producția agricolă. Pentru a produce 1 kg de carne se utilizează 0,3 kg carne și 0,1 kg produse agricole. Pentru a produce 1 kg de produse agricole sunt necesare 0,2 kg carne și 0,4 kg produse agricole. Știind că cererea externă este de 24.000 kg carne și 16.000 kg produse agricole, cât ar trebui să producă ferma ?

10.Dacă $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A^3=O_n$, atunci $\det(A+I_n)\geq 0$.

11.Dacă $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(A)>0$, atunci $\det\left(A+A^{-1}\right)\geq 0$, $\det\left(A+I_n+A^{-1}\right)\geq 0$.

12.Fie Δ_n un determinant de ordinul n cu elemente numere întregi impare.

Arătați că Δ_n se divide cu 2^{n-1}.

13.Fie $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A^3=I_n$, $\det(A-I_n)\neq 0$. Să se calculeze $\det(A+I_n)$.

14.Fie $A,B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $\det(A)=\det(B)=\det(A+B)=\det(A-B)=0$.

Să se arate că $\det(xA+yB)=0$, $(\forall)x,y\in\mathbb{R}$.

15.Fie matricea $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ astfel încât $\det\left(A^2-2I_2\right)=0$. Să se arate că $A^2=2I_2$.

Ecuația unei drepte. Coliniaritatea a trei puncte

1.Scrieți ecuația dreptei AB sub formă de determinant și sub formă generală în cazurile:
1) $A(2,0)$, $B(0,3)$; 2) $A(-3,5)$, $B(2,-1)$.

2.Stabiliți care din punctele C, D, E se află pe dreapta AB în cazurile:

1) $A(1,3)$, $B(-1,9)$, $C\left(\frac{1}{3},5\right)$, $D(0,5)$, $E(0,6)$;

2) $A\left(0,\frac{3}{4}\right)$, $B\left(-\frac{3}{2},0\right)$, $C(1,1)$, $D\left(1,\frac{5}{4}\right)$, $E\left(-1,\frac{1}{4}\right)$;

3) $A(1,4)$, $B(-1,6)$, $C(0,5)$, $D(-1,6)$, $E(6,-1)$.

3.Să se determine parametrul real m astfel încât punctele A, B, C să fie coliniare:

1) $A(-m,1)$, $B(1,m)$, $C(0,1)$; 2) $A(1-m,2)$, $B(m,0)$, $C(1,2m)$.

4.Se consideră punctele $A(5,0)$, $B(0,4)$ şi M un punct arbitrar pe AB. Arătaţi că simetricele lui M în raport cu OA, OB şi O sunt trei puncte coliniare.

5.Se consideră triunghiul ABC, $A(2,3)$, $B(4,-1)$, $C(5,2)$ şi $D(1,2)$. Arătaţi că proiecţiile lui D pe laturile triunghiului ABC sunt trei puncte coliniare.

6.Fie patrulaterul $ABCD$, $A(1,1)$, $B(5,-3)$, $C(4,6)$, $D(2,5)$. Punctele M, N, P sunt mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$ şi respectiv $[CD]$, Q este mijlocul lui $[MP]$, R este mijlocul lui $[AQ]$, iar S mijlocul lui $[RN]$. Arătaţi că punctele S, Q, D sunt coliniare.

Aria unui triunghi

1.Se consideră un dreptunghi având două laturi de ecuaţii $3x-2y-5=0$, $2x+3y+7=0$ şi un vârf $A(-2,1)$. Să se determine aria dreptunghiului.

2.Se consideră vârfurile unui triunghi $A(-10,-13)$, $B(-2,3)$, $C(2,1)$. Să se calculeze lungimea perpendicularei din B pe mediana triunghiului dusă din C.

3.Laturile $[AB]$, $[BC]$ şi $[AC]$ ale triunghiului ABC sunt date prin ecuaţiile: $x+21y-22=0$, $5x-12y+7=0$, $4x-33y+146=0$. Să se calculeze distanţa de la centrul de greutate al triunghiului la latura BC.

4.Două laturi ale unui pătrat au ecuaţiile: $5x-12y-65=0$, $5x-12y+26=0$. Să se calculeze aria pătratului.

5.Să se arate că există două drepte care trec punctul $P(2,5)$, cu proprietatea că distanţa de la $Q(5,1)$ la cele două drepte este egală cu 3. Să se scrie ecuaţiile celor două drepte.

6.Să se arate că există o singură dreaptă care trece prin punctul $B(7,-2)$ şi pentru care distanţa de la punctul $A(4,-6)$ la această dreaptă să fie egală cu 5. Se cere ecuaţia dreptei.

7.Să se scrie ecuaţiile dreptelor paralele cu dreapta $3x-4y-10=0$ şi situate la distanţa de 3 unităţi de ea.

8.Se consideră $A(2,0)$, $B(-1,4)$ două vârfuri consecutive ale unui pătrat. Să se scrie ecuaţiile laturilor pătratului.

9.Se consideră ecuaţiile a două laturi ale unui pătrat: $4x-3y+3=0$, $4x-3y-17=0$, şi unul din vârfurile sale $A(2,-3)$. Să se scrie ecuaţiile celorlalte două laturi.

10.Să se scrie ecuaţia unei drepte care trece prin punctul $A(-2,3)$ şi este la distanţe egale de punctele $M(5,-1)$, $N(3,7)$.

11.Să se scrie ecuaţia dreptei paralelă şi echidistantă dreptelor $3x-y+7=0$, $3x-y-3=0$.

12.Fie triunghiul ABC, $A(-1,-2)$, $B(2,3)$, $C(-1,4)$. Determinaţi punctele M din interiorul triunghiului pentru care $S_{AMB}=S_{BMC}=S_{AMC}$.

Teste de evaluare

Testul 1

1.Să se arate că:

a) $\begin{vmatrix} a-2b & a-b & 2a-b \\ a+2b & a+b & a+b \\ 2b-a & b-a & b-2a \end{vmatrix}=0$; b) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

2.Se consideră determinantul $D(x)=\begin{vmatrix} 3 & x & x \\ x & 3 & x \\ x & x & 3 \end{vmatrix}$. a) Calculaţi $D\left(-\frac{3}{2}\right)$. b) Rezolvaţi ecuaţia $D(x)=0$.

3.a) Să se rezolve ecuaţia matriceală: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

b) Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} 3x-y+z=4 \\ x+y-2z=-2 \\ -x+y+z=2 \end{cases}$.

4.a) Se consideră punctele $A(0,x)$, $B(1+x,x)$, $C(1,-1)$. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $S_{ABC}=2$.

b) Se consideră patrulaterul $ABCD$, cu $A(1,1)$, $B(3,-2)$, $C(5,3)$, $D(2,2)$. Notăm $AB\cap CD=\{E\}$, $BC\cap AD=\{F\}$. Patrulaterul $ABCDEF$ se numeşte patrulater complet cu diagonalele $[AC]$, $[BD]$, $[EF]$. Arătaţi că mijloacele acestor trei diagonale sunt trei puncte coliniare (dreapta Newton-Gauss a patrulaterului).

5.Am un prieten ciudat care, din când în când, îmi trimite mesaje cifrate utilizând pătratul lui Polybe şi operaţia de înmulţire cu matricea $A=\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Ultimul mesaj, transmis prin e-mail, a fost:301 135 378 173 367 168 238 107 345 156. Ştiţi ce mi-a transmis ? Decodificaţi mesajul.

Testul 2 (grilă)

1.1) Fie determinantul $D(x)=\begin{vmatrix} 6-x & 2 & 2 \\ 2 & 3-x & -4 \\ 2 & -4 & 3-x \end{vmatrix}$.

Atunci: i) $D(7)$ este egal cu: a)1; b)-1; c)0; d)3; e)-5.

ii) Soluţiile ecuaţiei $D(x)=0$ sunt: a)$x_1=x_2=7$, $x_3=-2$; b)$x_1=7$, $x_2=x_3=-2$; c)$x_1=7$, $x_2=-2$, $x_3=2$.

2) Fie determinantul $D(a)=\begin{vmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a \\ a^2 & a^2+2a & 2a+1 \\ a & 2a+1 & a+2 \end{vmatrix}$.

Atunci:

i) cea mai mare putere k a lui a pentru care a^k divide D(a) este: a)k=2; b)k=3; c)k=4; d)k=1; e)k=0.

ii) cea mai mare putere l a lui (1-a) pentru care $(1-a)^l$ divide $D(a)$ este:

a) l=1; b)l=3; c)l=2; d)l=4; e)l=0.

2.Valorile parametrului $m\in\mathbb{R}$ pentru care matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ m & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$ este inversabilă pentru orice $x\in\mathbb{R}$, sunt: a) $(-\infty,1)$; b) $\left(\frac{2}{3},1\right)$; c) $\left(\frac{2}{3},\infty\right)$; d) $\left(\frac{2}{3},3\right)$; e) $\mathbb{R}$.

3.Fie polinomul $P(x)=\begin{vmatrix} x+a & x & x \\ x & x+b & x \\ x & x & x+c \end{vmatrix}$, iar S suma coeficienţilor lui x^3, x^2.

Atunci: a)S=-1; b)S=1; c)S=6; d)S=0; e)S=4.

4 .Soluția ecuației matriceale: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ este:

a) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -5 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5 . Dacă $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, cu $\det(A) = -3, \det(B) = 5$, atunci:

i) $\det(A^3)$ este egal cu: a)-9; b)-27; c)6.

ii) $\det(2A)$ este egal cu: a)-12; b)-6; c)6.

iii) $\det(3AB)$ este egal cu: a)135; b)-135; c) nu se poate calcula.

6 .Codificarea mesajului „salut" utilizând pătratul lui Polybe și matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ este:

a) 43 54 31 76 44 44; b) 43 31 54 44 76 44; c) 43 51 34 74 64 64.

3. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

În acest capitol este descrisă forma generală a unui sistem liniar de m ecuații cu n necunoscute. Sunt abordate probleme privind compatibilitatea acestor sisteme, iar în caz de compatibilitate se indică metode pentru determinarea soluțiilor lor. Metodele de abordare ale sistemelor se referă la două situații. Prima când $m = n$ și determinantul sistemului este diferit de zero, caz în care sunt prezentate metoda matriceală și metoda lui Cramer pentru rezolvarea sistemelor. A doua situație corespunde cu m, n oarecare, iar sistemele liniare se investighează fie cu metoda lui Gauss, fie cu metoda determinanților caracteristici (Rouché).

Probelemele practice vin să ilustreze diversitatea domeniilor în care se întâlnesc sisteme liniare.

- **Forma generală a unui sistem de ecuații liniare 122**
- **Metode de rezolvare a sistemelor liniare 130**
- **Discuția unui sistem de ecuații liniare 140**
- **Probleme propuse 157**
- **Teste de evaluare 163**

3.1. INTRODUCERE

Una din cele mai importante probleme în matematică este aceea a rezolvării unui sistem de ecuații liniare. Mai mult de 75 la sută dintre problemele de matematică întâlnite în aplicațiile științifice sau industriale conțin rezolvarea unui sistem de ecuații liniare. Probleme din diferite domenii de activitate: economie, afaceri, genetică, fizică, conduc la rezolvarea unui sistem de ecuații liniare.

3.2. PROBLEME PRACTICE CARE CONDUC LA SISTEME DE ECUAȚII

1Un canoist a parcurs distanța de 12 km în sensul curentului râului în 2 ore. Vâslind împotriva curentului, a parcurs aceeași distanță în 4 ore. Determinați viteza canoistului pe apă stătătoare și viteza de curgere a apei.

RNotăm cu v, viteza canoistului în apă stătătoare, iar cu v_0 viteza de curgere a apei râului. Atunci viteza canoistului în sensul curentului apei este egală cu $v + v_0$, iar viteza lui împotriva curentului apei este egală cu $v - v_0$. Din enunț avem ecuațiile: $(v + v_0)2 = 12$, $(v - v_0)4 = 12$ sau $v + v_0 = 6$, $v - v_0 = 3$. Pentru a determina necunoscutele v și v_0 trebuie rezolvat sistemul: $\begin{cases} v + v_0 = 6 \\ v - v_0 = 3 \end{cases}$.Găsim ușor soluția $v = 4,5$ km/h, $v_0 = 1,5$ km/h.

Observație. Rezolvarea problemei a condus la un sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute cu soluție unică.

2. O pizzerie produce trei feluri de pizza la prețurile de 3 €, 4 € și respectiv 6 €. Într-o zi dublul numărului de pizza de 4 Euro vândute a fost egal cu suma numerelor celorlalte feluri de pizza vândute, iar tipul numărului de pizza de 6 € vândute a fost egal cu suma numerelor celorlalte feluri de pizza vândute în acea zi. Știind că în acea zi la pizzerie s-au încasat 490 €, determinați câte pizza din fiecare fel au fost vândute.

R. Notăm cu x, y, z numărul de pizza de 3 €, 4 € și respectiv 6 € vândute în acea zi la pizzerie. Din enunț avem ecuațiile $2y = x+z$, $3z = x+y$, $3x+4y+6z = 490$, care formează sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x+z=2y \\ x+y=3z \\ 3x+4y+6z=490 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x-2y+z=0 \\ x+y-3z=0 \\ 3x+4y+6z=490 \end{cases}.$$

Se obține soluția: $x=50$, $y=40$, $z=30$.

Observație. Rezolvarea problemei ne-a condus la rezolvarea unui sistem de trei ecuații liniare cu trei necunoscute.

3. Să se determine funcția de gradul al doilea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$, dacă graficul acesteia conține punctele $A(1,4)$, $B(-1,6)$, $C(2,9)$.

R. Condițiile ca punctele să fie situate pe graficul funcției conduc la sistemul de trei ecuații liniare cu trei necunoscute a, b, c.

$$\begin{cases} f(1)=4 \\ f(-1)=6 \\ f(2)=9 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} a+b+c=4 \\ a-b+c=6 \\ 4a+2b+c=9 \end{cases}.$$

Sistemul are soluția $a=2$, $b=-1$, $c=3$ și deci $f(x)=2x^2-x+3$.

3.3. FORMA GENERALĂ A UNUI SISTEM DE ECUAȚII LINIARE

Definiție. O ecuație liniară cu n **necunoscute** $x_1, x_2, ..., x_n$ are forma:

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=b,\ a_1,...,a_n,b\in\mathbb{C}. \quad (1)$$

Numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se numesc **coeficienții necunoscutelor** $x_1, x_2, \ldots x_n$, iar b se numește **termenul liber** al ecuației (1).

Exemple. 1) $2x-3y=5$ este o ecuație liniară în x și y, având coeficienții necunoscutelor $a_1=2$, $a_2=-3$, iar termenul liber $b=5$.

2) $\sqrt{2}x-y+3z=-1$ este o ecuație liniară cu trei necunoscute x, y, z, având coeficienții necunoscutelor $a_1=\sqrt{2}$, $a_2=-1$, $a_3=3$, iar termenul liber $b=-1$.

Definiție. Se numește **soluție** pentru ecuația liniară (1) orice n-uplu $(s_1,s_2,\ldots,s_n)\in\mathbb{C}^n$, care verifică egalitatea: $a_1s_1+a_2s_2+\ldots+a_ns_n=b$.

Vom folosi pentru soluție a ecuației scrierea $x_1=s_1$, $x_2=s_2$, ..., $x_n=s_n$.

A rezolva ecuația (1) înseamnă a-i determina toate soluțiile. Mulțimea tuturor soluțiilor unei ecuații liniare se numește **soluția generală** a ecuației.

Exemple. 1) **Ecuația $3x-y=5$ are o soluție particulară $x=2$, $y=1$, deoarece $3\cdot 2-1=5$ este adevărată. Dar $x=1$, $y=1$ nu este soluție a ecuației pentru că relația $3\cdot 1-1=5$ este falsă. Pentru $x=\alpha$, $y=3\alpha-5$, $\alpha\in\mathbb{R}$ se obține o soluție oarecare a ecuației, deoarece $3\cdot\alpha-(3\alpha-5)=5$, este o relație adevărată.**

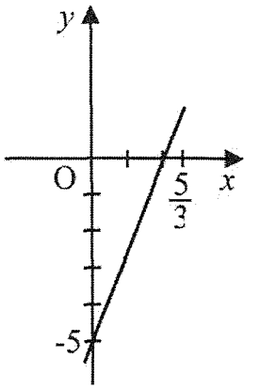


Fig.1

Observație. **Se știe că ecuația $ax+by+c=0$, $a^2+b^2\neq 0$ reprezintă în planul xOy o dreaptă. Dacă se asociază fiecărei soluții (x,y) a ecuației punctul $M(x,y)$ din plan, atunci imaginea soluțiilor este o dreaptă. În Fig.1, am reprezentat dreapta de ecuație $3x-y=5$.**

2) **Ecuația $2x+y-z=-10$ are o soluție particulară $x=-3$, $y=1$, $z=5$ pentru că $2(-3)+1-5=-10$ este adevărată.**

Dacă $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=2\alpha+\beta+10$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, atunci $2\alpha+\beta-(2\alpha+\beta+10)=-10$ este adevărată. Deci, tripletul $(\alpha,\beta,2\alpha+\beta+10)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ este soluția generală a ecuației.

Definiție. Se numește **sistem** de m **ecuații liniare** cu n **necunoscute**, un sistem de forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \quad (2)$$

$a_{ij}\in\mathbb{C}$, $\forall i=\overline{1,m}$, $\forall j=\overline{1,n}$, $b_i\in\mathbb{C}$, $\forall i=\overline{1,m}$.

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se numesc **necunoscutele sistemului**.
- a_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, se numesc **coeficienții necunoscutelor** sau **coeficienții sistemului** (2).
- b_i, $i=\overline{1,m}$, se numesc **termenii liberi ai ecuațiilor** sau **termenii liberi ai sistemului**.

Așadar un sistem de ecuații liniare (sau simplu **sistem liniar**) este o mulțime finită de ecuații liniare.

Numărul a_{ij} (se citește $a-i-j$; de exemplu a_{23} se citește a – doi – trei și nu a douăzeci și trei) se află în ecuația cu numărul i în fața necunoscutei x_j și reprezintă în această ecuație **coeficientul** acestei necunoscute.

Sistemul (2) se scrie condensat sub forma: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $i=\overline{1,m}$ (2').

Definiție. Sistemul (2) se numește **omogen** dacă toți termenii liberi b_i, $i=\overline{1,m}$ sunt egali cu zero.

Sistemul astfel obținut:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$ sau condensat: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$, $i=\overline{1,m}$

se numește **sistemul omogen asociat sistemului** (2).

Definiție. Se numește **soluție a sistemului** (2) orice n-uplu $(s_1,s_2,\ldots,s_n)\in\mathbb{C}^n$ care este o soluție pentru fiecare din ecuațiile sistemului.

A rezolva sistemul (2) înseamnă a-i determina toate soluțiile.

Observație. Să remarcăm că sistemul liniar omogen are întotdeauna cel puțin soluția $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$ numită soluția banală.

Exemple. **Să se precizeze tipul sistemului de ecuații liniare:**

1) $\begin{cases} 3x+5y=-2 \\ x-4y=3 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=5 \\ -2x_1+x_2=-4 \\ 3x_1-5x_3=0 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=0 \\ 2x_1-5x_2-3x_3=0 \\ -x_1+x_2-2x_3=0 \end{cases}$.

R. 1) **Este sistem liniar de două ecuații cu două necunoscute;**
2) **Este sistem liniar de trei ecuații cu trei necunoscute;**
3) **Este sistem liniar omogen de trei ecuații cu trei necunoscute.**

Scrierea matriceală a unui sistem liniar

Sistemului liniar (2) îi asociem următoarele matrice:

1) $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$, numită **matricea sistemului**, notată și $A=(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$.

Linia i a matricei A conține coeficienții necunoscutelor din ecuația i a sistemului, iar coloana j a matricei conține coeficienții necunoscutei x_j din cele m ecuații ale sistemului.

2) $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, numită **matricea termenilor liberi** (matrice coloană);

3) $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, numită **matricea necunoscutelor** (matrice coloană);

4) $\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$, numită **matricea extinsă a sistemului**.

Observăm că $\overline{A}$ se obține din A prin adăugarea coloanei termenilor liberi ai sistemului. Este eficient să notăm această matrice $\overline{A}=(A|B)$ unde în stânga barei verticale se scrie matricea sistemului, iar în dreapta ei coloana termenilor liberi.

Cu aceste notații sistemul (2) se scrie $AX=B$ (3) și reprezintă **forma matriceală a sistemului liniar** (2).

Exemplu. **Să se scrie sub formă matriceală sistemele:**

1) $\begin{cases} -x+3y=0 \\ 2x+5=-3 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x_1+3x_3=5 \\ -2x_1+x_2=-2 \\ 3x_1-4x_3=0 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} 2x_1-3x_3+x_3=0 \\ x_1+2x_2-5x_3=0 \\ -3x_1+x_3=0 \end{cases}$.

R.1) **Matricea sistemului este** $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, **matricea necunoscutelor este** $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, **iar matricea termenilor liberi** $B=\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. **Forma matriceală a sistemului este:** $AX=B$.

2) **Cele trei matrice sunt:**

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(matricea sistemului) (matricea necunoscutelor) (matricea termenilor liberi)

iar forma matriceală a sistemului este: $AX=B$.

3) **Matricele care definesc sistemul sunt:** $A=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&2&-5\\-3&0&1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$,

iar forma matriceală a sistemului este: $AX=B$.

Studiul soluțiilor unui sistem de ecuații liniare conduce la trei probleme:

1) Existența soluțiilor (condițiile în care un sistem admite soluții – problema compatibilității sistemului (2)).

2) Găsirea unei metode de obținere a soluțiilor.

3) Determinarea tuturor soluțiilor în caz de compatibilitate.

Vom aborda pe rând aceste probleme.

1) Existența soluțiilor

Un sistem care nu are nici o soluție se numește **sistem incompatibil**. Dacă sistemul posedă soluții se spune că este **compatibil**. Spunem că sistemul este **compatibil determinat** dacă are exact o soluție și este **compatibil nedeterminat** dacă are mai mult de o soluție.

Exemplu. Să se rezolve sistemele:

1) $\begin{cases}x-2y=3\\x-2y=0\end{cases}$; 2) $\begin{cases}3x+2y=12\\2x-y=1\end{cases}$; 3) $\begin{cases}x+5y=3\\2x+10y=6\end{cases}$.

R. 1) Dacă (s_1,s_2) este o soluție a sistemului, atunci am obține $3=0$, fals.

În acest caz sistemul este incompatibil.

Interpretarea geometrică . Cele două ecuații ale sistemului definesc două drepte în planul xOy, $(d_1):x-2y=3, (d_2):x-2y=0$, care au aceeași pantă $m=\frac{1}{2}$. Deci, dreptele sunt paralele (Fig.2).

2) Sistemul are soluția unică $x=2$, $y=3$. Deci, sistemul este compatibil determinat.

Interpretarea geometrică . Asociem în planul xOy celor două ecuații dreptele $(d_1): 3x+2y=12$, $(d_2): 2x-y=1$. Soluția $x=2$, $y=3$ arată că punctul $A(2,3)$ (Fig.3) este punctul de intersecție al celor două drepte (coordonatele lui verifică ecuația fiecărei drepte).

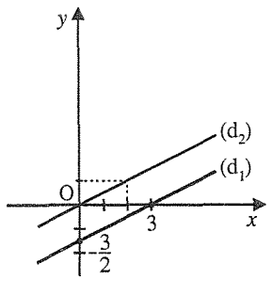


Fig.2

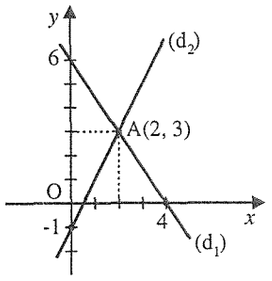


Fig.3

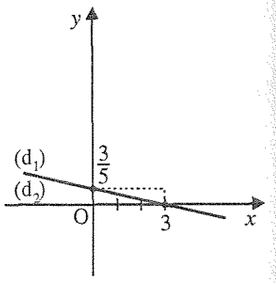


Fig.4

3) Observăm că ecuația a doua a sistemului prin împărțirea cu 2 se reduce la prima ecuație, iar pentru aceasta cuplul $(3-5\alpha, \alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}$ este soluție. În acest caz sistemul este compatibil nedeterminat.

Interpretarea geometrică .În acest caz cele două drepte asociate celor două ecuații coincid (Fig. 4).

Definiție. Două sisteme liniare **sunt echivalente** dacă sunt amândouă incompatibile sau amândouă compatibile și au aceleași soluții.

Metodele de rezolvare a sistemelor liniare pe care le vom prezenta operează cu sisteme liniare echivalente și constau în a înlocui sistemul dat (S) printr-un nou sistem (S') care este echivalent cu primul, dar care poate fi rezolvat mai ușor. Faptul că sistemul (S) este echivalent cu sistemul (S') se notează prin $(S)\Leftrightarrow(S')$. Este clar că: $(S)\Leftrightarrow(S)$; dacă $(S)\Leftrightarrow(S')$, atunci $(S')\Leftrightarrow(S)$; dacă $(S)\Leftrightarrow(S')$ și $(S')\Leftrightarrow(S")$, atunci $(S)\Leftrightarrow(S")$.

Transformări elementare asupra ecuațiilor unui sistem

În ideea de a aduce un sistem la altul echivalent, mai simplu de rezolvat, se efectuează asupra ecuațiilor o serie de transformări, numite **transformări elementare.**

Acestea sunt:

E1. Schimbarea ordinii ecuațiilor în sistem.

Dacă schimbăm ecuația i cu ecuația j și reciproc, această transformare o notăm prin $L_i\leftrightarrow L_j$. Se spune că s-au interschimbat cele două ecuații. Evident sistemul obținut este echivalent cu sistemul dat.

E2. Înmulțirea oricărei ecuații a sistemului prin factori nenuli.

Fie sistemul $(S):\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1 & (L_1)\\a_2x+b_2y=c_2 & (L_2)\end{cases}$,

în care am notat prin (L_1), (L_2), respectiv prima și a doua ecuație a sistemului. Înmulțind ecuația (L_1) prin $\alpha\neq0$ se obține ecuația notată (αL_1): $\alpha a_1x+\alpha b_1y=\alpha c_1$. **Orice soluție (s_1,s_2) a sistemului (S) este soluție și pentru ecuația (αL_1).** Avem: $\alpha a_1s_1+\alpha b_1s_2=\alpha(a_1s_1+b_1s_2)=\alpha c_1$. Sistemul (S') format din ecuațiile (αL_1) și (L_2) este verificat de orice soluție a lui (S). Reciproc, orice soluție a lui (S') este soluție a lui (S), deoarece din $\alpha a_1s_1+\alpha b_1s_2=\alpha c_1$ rezultă $a_1s_1+b_1s_2=c_1$. Deci, sistemele (S) și (S') sunt echivalente.

Faptul că ecuația (L_1) se înlocuiește cu ecuația (αL_1) îl notăm prin $\alpha L_1 \to L_1$.

E3. Înlocuirea oricărei ecuații a sistemului prin suma dintre această ecuație și produsul dintre o constantă și o altă ecuație a sistemului.

Dacă la ecuația (L_1) se adună ecuația (L_2) înmulțită cu o constantă α, atunci acest fapt îl marcăm prin $L_1 + \alpha L_2 \to L_1$. Cum sistemul de ecuații liniare este bine caracterizat de matricea extinsă a sistemului, în sensul că un sistem liniar are o unică matrice extinsă și reciproc o matrice extinsă definește bine un sistem liniar, transformările elementare se transferă și asupra liniilor acestei matrice. Are loc următorul rezultat important:

Teoremă. Presupunem că $\overline{A}$ este matricea extinsă asociată sistemului (2), iar $\overline{A_1}$ este obținută din $\overline{A}$ printr-un șir de transformări elementare. Atunci sistemul liniar asociat lui $\overline{A_1}$ este echivalent cu sistemul liniar corespunzător lui $\overline{A}$, adică cu (2).

Spunem că matricea $\overline{A_1}$ este echivalentă cu matricea $\overline{A}$ și notăm $\overline{A} \leftrightarrow \overline{A_1}$.

Exemple.

1) **Schimbarea ordinii în sistem**

Sistemul inițial $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 4x+5y=13 \end{cases}$ Matricea extinsă $\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 13 \end{array}\right)$ Transformarea $L_1 \leftrightarrow L_2$

Soluția este: $x=2,\ y=1$

Noul sistem $\begin{cases} 4x+5y=13 \\ x-3y=1 \end{cases}$ Matricea extinsă $\overline{A_1}=\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 13 \\ 2 & -3 & 1 \end{array}\right)$.

Soluția este: $x=2,\ y=1$

2) **Înmulțirea oricărei ecuații cu o constantă nenulă**

Sistemul inițial $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 4x+5y=13 \end{cases}$ Matricea extinsă $\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 13 \end{array}\right)$ Transformarea $2L_2 \to L_2$

Soluția este: $x=2,\ y=1$

Noul sistem $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 8x+10y=26 \end{cases}$ Matricea extinsă $\overline{A_1}=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ 8 & 10 & 26 \end{array}\right)$.

Soluția este: $x=2,\ y=1$.

3) **Înlocuirea unei ecuații a sistemului prin suma dintre această ecuație și produsul dintre o constantă și o altă ecuație a sistemului**

Sistemul inițial $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 4x+5y=13 \end{cases}$ Matricea extinsă $\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 13 \end{array}\right)$ Transformarea $-2L_1+L_2 \to L_2$

Soluția este: $x=2,\ y=1$

Noul sistem $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 11y=11 \end{cases}$ Matricea extinsă $\overline{A_1}=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 11 & 11 \end{array}\right)$.

Soluția este: $x=2,\ y=1$.

Observație. Pentru transformările E_2 și E_3, în vederea simplificării scrierii în loc de $\alpha L \to L$ vom scrie simplu αL, înțelegând că linia L se înlocuiește cu linia αL, iar în loc de $L_i + \alpha L_j \to L_i$ scriem $L_i + \alpha L_j$ și înțelegem că la linia L_i se adună linia L_j înmulțită cu α.

Se verifică imediat că dacă sistemul liniar omogen $AX = O$ are mulțimea de soluții S_0, atunci:

1) $\forall X_1, X_2 \in S_0 \Rightarrow X_1 + X_2 \in S_0$ și 2) $\forall X \in S_0, \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha X \in S_0$

(într-adevăr, din $AX_1 = O$, $AX_2 = O \Rightarrow A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = O$, iar din $AX = O \Rightarrow A(\alpha X) = \alpha(AX) = \alpha \cdot O = O$).

Fie $AX = B$, sistem liniar neomogen, cu mulțimea de soluții S și sistemul liniar omogen asociat $AX = 0$, cu mulțimea de soluții S_0. Atunci, între cele două sisteme există o legătură fundamentală dată de următoarea:

Teoremă. 1) Dacă $X_1, X_2 \in S$, atunci $X_1 - X_2 \in S_0$ (diferența a două soluții ale sistemului neomogen este soluție pentru sistemul omogen).

2) Dacă $X \in S$ și $X_0 \in S_0$, atunci $X + X_0 \in S$ și orice soluție $Y \in S$ se scrie sub forma $Y = X + X_0$, $X_0 \in S_0$ (Suma dintre o soluție a sistemului neomogen și una a sistemului omogen este soluție a sistemului neomogen. Mulțimea soluțiilor sistemului neomogen se obține prin adunarea unei soluții particulare (X) a sistemului neomogen cu toate soluțiile X_0 ale sistemului omogen).

Exemplu. **Să se exprime soluția sistemului** $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 3x+3y-z=2 \\ 2x+4y=2 \end{cases}$ **cu ajutorul soluțiilor sistemului omogen.**

Rezolvare. **Să observăm că** $x=1,\ y=0,\ z=1$ **este o soluție particulară a sistemului neomogen, iar** $x=-2\alpha,\ y=\alpha,\ z=-3\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$ **este soluția sistemului omogen. Atunci soluția generală a sistemului neomogen, conform teoremei, este dată de** $(x,y,z)=(1,0,1)+(-2\alpha,\alpha,-3\alpha)=(1-2\alpha,\alpha,1-3\alpha),\alpha \in \mathbb{R}$, **adică** $x=1-2\alpha,\ y=\alpha,\ z=1-3\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

3.4. METODE DE REZOLVARE A SISTEMELOR LINIARE

În continuare vom prezenta două metode de rezolvare a sistemelor liniare (Metoda matriceală şi Metoda lui Cramer) în cazul în care numărul de ecuaţii este egal cu numărul de necunoscute, iar determinantul matricei sistemului este diferit de zero (matricea sistemului este nesingulară). Alte două metode ne permit, în cazul sistemelor compatibile, să rezolvăm sisteme liniare de m ecuaţii cu n necunoscute cu $m \neq n$ (Metoda lui Gaus şi Metoda determinanţilor caracteristici).

Metoda matriceală

Fie sistemul liniar format din n ecuaţii cu n necunoscute scris sub forma matriceală: $AX = B$, cu $\det(A) \neq 0$ (matricea sistemului este nesingulară). Numărul $\det(A)$ îl vom numi **determinantul sistemului**. În acest caz matricea A este inversabilă. Înmulţim egalitatea de mai sus, la stânga, cu A^{-1} şi obţinem $X = A^{-1}B$, soluţia sistemului. Spunem că sistemul este compatibil determinat. Dacă sistemul este liniar omogen, adică $B = O$, atunci sistemul admite numai soluţia banală, $X = O$, adică $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Procedeu practic. **1)** Dacă sistemul liniar are n ecuaţii cu n necunoscute, atunci se scrie sistemul sub forma $AX = B$ şi se calculează $\det(A)$.

2) Dacă $\det(A) \neq 0$, se calculează A^{-1}.

3) Soluţia sistemului este $X = A^{-1}B$.

Observaţie. Această metodă precizează în ce condiţii sistemul este compatibil determinat şi cum i se determină soluţia.

Exemplu. **Să se rezolve sistemele de ecuaţii liniare:**

1) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 3x-y=1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x-5y+4z=0 \\ -3x+y+z=-1 \\ 2x-z=0 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 3x+y-2z=0 \\ -x+3y+4z=0 \end{cases}$.

R.1) **Matricele care definesc sistemul sunt:**

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ **şi sistemul se scrie matriceal** $AX = B$.

Deoarece $\det(A) = -5 \neq 0$, **matricea** A **este inversabilă şi deci** $X = A^{-1}B$ **.Calculând inversa matricei** A, **găsim** $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$ **şi deci** $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}$, **adică** $x = \frac{4}{5}, y = \frac{7}{5}$.

2) **În acest caz** $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $AX = B$.

Cum $\det(A) = -5 \neq 0$, **deducem** $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, **adică** $x = -1, y = -2, z = -2$.

3) **Sistemul fiind omogen are cel puţin soluţia banală** $x = y = z = 0$.

Avem $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **cu** $\det(A) = 60 \neq 0$.

Deci sistemul are numai soluţia banală.

Problemă rezolvată

Să se rezolve şi discute sistemul: $\begin{cases} x+y-(m-1)z=0 \\ x+(m-1)y-z=0 \\ x+my+z=0 \end{cases}$, **după valorile parametrului real** m.

R. **Sistemul liniar este omogen. Prin urmare el este compatibil, având cel puţin o soluţie, cea banală** $x = y = z = 0$.

Determinantul sistemului este: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1 & m-1 & -1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = m-2$.

Se disting următoarele cazuri de discuţie:

a) Dacă $\Delta \neq 0$, **adică** $m \neq 2$, **atunci** $X = A^{-1}B = O$. **Deci, în acest caz sistemul are numai soluţia banală** $x = y = z = 0$.

b) Dacă $\Delta = 0$, **adică** $m = 2$, **atunci sistemul devine:** $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y-z=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$.

Observăm că primele două ecuaţii coincid. Sistemul este echivalent cu sistemul format de ultimele două ecuaţii. Punem aici $z = \lambda \in \mathbb{R}$, **variabil şi obţinem** $x = 3\lambda$, $y = -2\lambda$. **Deci, soluţia sistemului este:** $x = 3\lambda$, $y = -2\lambda$, $z = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. **Deoarece componentele soluţiei se exprimă în funcţie de un parametru,** λ, **se mai spune că sistemul liniar este compatibil simplu nedeterminat.**

Metoda lui Cramer

Este aplicabilă unui sistem de n ecuaţii liniare cu n necunoscute de forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (3)$$

sau în scriere matriceală $AX = B$, când determinantul sistemului este nenul, adică $\det(A) \neq 0$.

În aceste condiții sistemul este compatibil determinat (din cerința $\det(A)\neq 0$, rezultă A este matrice inversabilă și funcționează metoda precedentă de determinare a soluției sistemului) și soluția unică este dată de următoarea:

Teoremă. Orice sistem liniar (3) pentru care determinantul sistemului, $\det(A)$ este nenul, este compatibil determinat cu soluția dată de formulele $x_1=\frac{\Delta x_1}{\Delta}$, $x_2=\frac{\Delta x_2}{\Delta}$, ..., $x_n=\frac{\Delta x_n}{\Delta}$ (4) unde $\Delta=\det(A)$, Δx_k se obține din Δ înlocuind coloana coeficienților lui x_k prin coloana termenilor liberi, $k=\overline{1,n}$.

Formulele (4), care dau soluția sistemului se numesc **formulele lui Cramer**. Un sistem liniar de formă (3) cu $\det(A)\neq 0$ se numește **sistem Cramer**.

Demonstrație. Pentru stabilirea formulelor din (4), utilizăm scrierea matriceală a soluției, construcția inversei A^{-1} și dezvoltarea unui determinant de ordin n după elementele unei coloane.

Într-adevăr din $AX=B$, deducem $X=A^{-1}B$ sau $X=\frac{1}{\Delta}A^{*}B$ sau desfășurat

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\dots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\dots&A_{n2}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\A_{1n}&A_{2n}&\dots&A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

sau

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11}b_1+A_{21}b_2+\dots+A_{n1}b_n\\A_{12}b_1+A_{22}b_2+\dots+A_{n2}b_n\\\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\A_{1n}b_1+A_{2n}b_2+\dots+A_{nn}b_n\end{pmatrix},$$

unde $A_{ij}=(-1)^{1+j}M_{ij}$ este complementul algebric al elementului a_{ij}, iar M_{ij} este minorul corespunzător elementului a_{ij}, $i,j=\overline{1,n}$. De aici

$$x_1=\frac{1}{\Delta}(b_1A_{11}+b_2A_{21}+\dots+b_nA_{n1})=\frac{\Delta x_1}{\Delta},\text{ unde }\Delta x_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&\dots&a_{1n}\\b_2&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\b_n&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$x_2=\frac{1}{\Delta}(b_1A_{12}+b_2A_{22}+\dots+b_nA_{n2})=\frac{\Delta x_2}{\Delta},\text{unde }\Delta x_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&b_2&a_{23}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&b_n&a_{n3}&\dots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

.....

$$x_n=\frac{1}{\Delta}(b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\dots+b_nA_{nn}),\quad\text{unde}\quad\Delta x_n=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n-1}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n-1}&b_2\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn-1}&b_n\end{vmatrix}.$$

În ultimele exprimări ale necunoscutelor am ținut seama de dezvoltarea determinantului după elementele unei coloane funcție de complemenții lor algebrici. ■

Pentru rezolvarea unui sistem Cramer se recomandă următorul:

Procedeu practic. **1)** Se calculează Δ și se observă că $\Delta\neq 0$.
2) Se calculează determinanții Δx_k, $k=\overline{1,n}$, obținuți din Δ prin înlocuirea coloanei k prin coloana termenilor liberi.
3) Soluția sistemului este dată de formulele lui Cramer:
$x_1=\frac{\Delta x_1}{\Delta}$, $x_2=\frac{\Delta x_2}{\Delta}$, ..., $x_n=\frac{\Delta x_n}{\Delta}$.

Exemplu. **Să se rezolve sistemele liniare:**

1) $\begin{cases}x+y+2z=-1\\2x-y+4z=-4\\4x+y+4z=-2\end{cases}$; 2) $\begin{cases}2x+y-5z+t=8\\x-3y-6t=9\\2y-z+2t=-5\\x+4y-7z+6t=0\end{cases}$; 3) $\begin{cases}2x-3y+3z=0\\3x-4y+5z=0\\5x+y+2z=0\end{cases}$.

R.1) **Determinantul sistemului este:** $\Delta=\begin{vmatrix}1&1&2\\2&-1&4\\4&1&4\end{vmatrix}=12\neq 0$, **și deci sistemul este**

compatibil determinat (sistem Cramer), cu soluția: $x=\frac{\Delta x}{\Delta}$, $y=\frac{\Delta y}{\Delta}$, $z=\frac{\Delta z}{\Delta}$, **unde:**

$$\Delta x=\begin{vmatrix}-1&1&2\\-4&-1&4\\-2&1&4\end{vmatrix}=4,\quad\Delta y=\begin{vmatrix}1&-1&2\\2&-4&4\\4&-2&4\end{vmatrix}=8,\quad\Delta z=\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&-1&-4\\4&1&-2\end{vmatrix}=-12.$$

De aici: $x=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$, $y=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$, $z=-\frac{12}{12}=-1$.

2) Avem determinantul sistemului egal cu: $\Delta=\begin{vmatrix}2&1&-5&1\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\1&4&-7&6\end{vmatrix}=27\neq 0$ (adică sistemul este Cramer).

În acest caz soluția este dată de formulele lui Cramer: $x=\frac{\Delta x}{\Delta}$, $y=\frac{\Delta y}{\Delta}$, $z=\frac{\Delta z}{\Delta}$, $t=\frac{\Delta t}{\Delta}$, unde

$$\Delta x=\begin{vmatrix}8&1&-5&1\\9&-3&0&-6\\-5&2&-1&2\\0&4&-7&6\end{vmatrix}=81,\ \Delta y=\begin{vmatrix}2&8&-5&1\\1&9&0&-6\\0&-5&-1&2\\1&0&-7&6\end{vmatrix}=-108,$$

$$\Delta z=\begin{vmatrix}2&1&8&1\\1&-3&9&-6\\0&2&-5&2\\1&4&0&6\end{vmatrix}=-27,\ \Delta t=\begin{vmatrix}2&1&-5&8\\1&-3&0&9\\0&2&-1&-5\\1&4&-7&0\end{vmatrix}=27.$$

Cu acestea $x=\frac{81}{27}=3$, $y=-\frac{108}{27}=-4$, $z=-\frac{27}{27}=-1$, $t=\frac{27}{27}=1$.

3) Calculăm determinantul sistemului liniar omogen. Avem $\Delta=\begin{vmatrix}2&-3&3\\3&-4&5\\5&1&2\end{vmatrix}=-14\neq 0$, ceea ce arată că sistemul este compatibil determinat (sistem Cramer). Cum sistemul liniar omogen are cel puțin soluția banală, $x=y=z=0$, deducem că aceasta este unica soluție.

Problemă rezolvată

Să se rezolve și discute sistemul liniar

$$\begin{cases}mx+y+z=1\\x+my+z=m\\x+y+mz=m^2\end{cases}$$, unde m este parametru real.

R. Determinantul sistemului este $\Delta=\begin{vmatrix}m&1&1\\1&m&1\\1&1&m\end{vmatrix}=(m+2)(m-1)^2$.

Discuția sistemului se face în funcție de valorile care anulează pe Δ.
Avem: $\Delta=0\Leftrightarrow m\in\{-2,1\}$. Distingem cazurile:

a) Dacă $\Delta\neq 0$, adică $m\in\mathbb{R}-\{-2,1\}$, atunci sistemul este un sistem Cramer cu soluția dată de formulele lui Cramer:

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=-\frac{m+1}{m+2},\ y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{1}{m+2},\ z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{(m+1)^2}{m+2}.$$

b) Dacă $m=-2$, atunci sistemul devine: $\begin{cases}-2x+y+z=1\\x-2y+z=-2\\x+y-2z=4\end{cases}$.

Adunând, membru cu membru, ecuațiile rezultă $0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=3$, imposibil.
Deci, sistemul este incompatibil.

c) Dacă $m=1$, sistemul se scrie: $\begin{cases}x+y+z=1\\x+y+z=1\\x+y+z=1\end{cases}$.

Se observă că avem, de fapt, o ecuație liniară cu trei necunoscute.
În acest caz punând $y=\lambda\in\mathbb{R}$, $z=\mu\in\mathbb{R}$, atunci $x=1-\lambda-\mu$.
Prin urmare, sistemul are solutii (depinzând de doi parametrii) de forma: $(1-\lambda-\mu,\ \lambda,\mu)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.
Cum componentele soluției depind de doi parametri, se mai spune că sistemul liniar este compatibil dublu nedeterminat.

Metoda lui Gauss

Această metodă se utilizează la rezolvarea sistemelor liniare de m ecuații cu n necunoscute, fără a face apel la calcul de determinanți.

Considerăm sistemul liniar $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$

care este perfect determinat de matricea extinsă a sa

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}&b_2\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\ldots&a_{mn}&b_m\end{array}\right).$$

Metoda lui Gauss sau **metoda eliminării parțiale** constă în transformarea echivalentă a sistemului prin transformări elementare, în sisteme în care necunoscuta x_1 apare numai în prima ecuație, iar în celelalte ecuații se elimină. Pentru sistemul astfel format se păstrează prima ecuație neschimbată, iar în celelalte $m-1$ ecuații se aplică procedeul pentru necunoscuta x_2, păstrând-o în a doua ecuație și eliminând-o din celelalte $m-2$ ecuații. Se repetă procedeul până când într-o ecuație a sistemului rămâne o singură necunoscută. Cu valoarea ei se trece în celelalte ecuații (de jos în sus) și se determină și celelalte necunoscute. Prin metoda lui Gauss eliminăm succesiv necunoscutele.

Forma trapezoidală şi forma triunghiulară a unui sistem liniar

Definiţii. 1. Un sistem liniar de m ecuaţii cu n necunoscute se spune că **are formă trapezoidală** (sau **formă de scară** sau **cvasitriunghiulară**) dacă are forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{rs}x_s+\ldots+a_{rn}x_n=b_r \\ 0=b_{r+1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0=b_m \end{cases} \quad (5)$$

sau echivalent matricea extinsă are formă trapezoidală

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ & & \ldots\ldots & & \vdots \\ & & a_{rs} & \ldots a_{rn} & b_r \\ & & & 0 & b_{r+1} \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & b_m \end{array}\right)$$

unde $a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{rs}\neq 0$.

2. Un sistem liniar de n ecuaţii cu n necunoscute **are formă triunghiulară** dacă în a k-a ecuaţie coeficienţii primelor $k-1$ necunoscute sunt toţi zero, iar coeficientul lui x_k este diferit de zero, $k=\overline{1,n}$, adică

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{kk}x_k+\ldots+a_{kn}x_n=b_k \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \quad (6)$$

sau echivalent matricea extinsă are forma triunghiulară

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ & & \ldots\ldots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{kk}\ldots & a_{kn} & b_k \\ & & \ldots\ldots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

Orice sistem liniar se poate aduce, prin transformări elementare, la forma trapezoidală (sau în particular la forma triunghiulară).

Transformările elementare care se fac asupra ecuaţiilor sistemului, generând sisteme echivalente, sunt următoarele trei:

E1. Schimbarea ordinii ecuaţiilor în sistem.
E2. Înmulţirea oricărei ecuaţii a sistemului prin factori nenuli.
E3. Adunarea unei ecuaţii înmulţite cu un număr la o altă ecuaţie.

Notaţii. 1) Schimbarea ecuaţiei L_i cu ecuaţia L_j şi a ecuaţiei L_j cu ecuaţia L_i (interschimbarea celor două ecuaţii) se notează prin $L_i \leftrightarrow L_j$.

2) Înmulţirea ecuaţiei L_i cu $\alpha\neq 0$ o notăm prin αL_i.

3) Adunarea la ecuaţia L_i a ecuaţiei L_j înmulţită cu α se notează $L_i+\alpha L_j$.

În urma trasnformărilor elementare rezultă sisteme echivalente cărora le corespund matrice extinse echivalente.

Practic transformările elementare care se fac asupra ecuaţiilor unui sistem se transferă asupra liniilor matricei extinse. Repetarea acestor operaţii asupra matricei extinse ne dă soluţia sistemului.

Are loc următoarea:

Teoremă. 1) Orice sistem liniar este echivalent cu un sistem de formă trapezoidală.

2) Orice matrice se poate reduce cu ajutorul transformărilor elementare la forma trapezoidală.

Vom descrie, în continuare, aplicarea metodei lui Gauss în mod schematic asupra unui sistem liniar particular.

Exemplu.Să se rezolve sistemele liniare, utilizând metoda (eliminării) lui Gauss:

1) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=5 \\ 2x_1-x_2+x_3=3 \\ 3x_1+2x_2-3x_3=-2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} -x_1+x_2-x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+x_2-x_3-x_4=0 \\ 2x_1-x_2-2x_3-x_4=0 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ -x_1-x_2=-1 \\ -2x_1-2x_2=1 \\ x_3+x_4=-1 \end{cases}$.

R.1)Matricea extinsă a sistemului este $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right)$.

Pasul 1. Se alege un element nenul dintre elementele nenule ale primei coloane. Acest element se numeşte element pivot sau pivotul. Linia care conţine acest element se numeşte linie pivot. Vom schimba liniile între ele astfel încât linia pivot să fie prima. Linia pivot se înmulţeşte cu diferite numere şi se adună la fiecare celelalte $m-1$ linii rămase astfel încât să se obţină zero pe coloană în poziţiile $a_{21},\ldots,a_{m1}$. În cazul de faţă, pe coloana unu alegem ca pivot pe $a_{11}=1$. Pivotul îl vom înscrie într-un cerc, iar elementele care trebuie eliminate le încadrăm într-un dreptunghi.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 2 & 1 & 5 \\ \boxed{2} & -1 & 1 & 3 \\ \boxed{3} & 1 & -3 & -2 \end{array}\right) \xleftarrow[L_3-3L_1]{L_2-2L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -7 \\ 0 & -5 & -6 & -17 \end{array}\right) \quad \begin{pmatrix} \text{am făcut 0 în} \\ \text{poziţiile } a_{21} \text{ şi } a_{31} \end{pmatrix}.$$

Pasul 2. La acest pas se alege un pivot dintre elementele coloanei a doua şi oricare dintre liniile 2 până la m. Linia care-l conţine se interschimbă cu linia a doua a matricei şi devine astfel noua linie pivot. Ca la pasul 1, linia pivot se înmulţeşte cu diferite constante şi se adună la fiecare din celelalte $m-2$ linii rămase astfel încât să se obţină zero pe coloană în poziţiile $a_{32},\ldots,a_{m2}$.

Linia și coloana întâi a matricei obținută la pasul precedent rămân neschimbate !

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & \boxed{-5} & -1 & -7 \\ 0 & \boxed{-5} & -6 & -17 \end{array}\right) \xleftarrow{L_3-L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{l}\text{am făcut 0}\\ \text{în poziția } a_{32}\end{array}\right).$$

Am obținut forma triunghiulară a sistemului. Aceasta este $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=5 \\ -5x_2-x_3=-7 \\ -5x_3=-10 \end{cases}$.

Din ultima ecuație $x_3=2$. Această valoare dusă în a doua ecuație dă $-5x_2-2=-7$, adică $x_2=1$.

În fine cu valorile pentru x_2 și x_3 se merge în prima ecuație, de unde $x_1=-2x_2-x_3+5=-2\cdot 1-2+5=1$.

Deci sistemul este compatibil determinat cu soluția $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=2$.

Observație. Cum sistemul dat se reduce la sistemul $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=1 \\ x_3=2 \end{cases}$, acestuia i se asociază matricea extinsă $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$.

O coloană (din matricea coeficienților) din matricea extinsă formată dintr-un singur element egal cu unu, iar celelalte egale cu zero se numește coloană unitate. O matrice are formă trapezoidală redusă dacă este trapezoidală cu $a_{1_1}=a_{22}=\ldots=a_{kk}=1$, iar toate celelalte elemente sunt egale cu zero pe coloanele care conțin aceste elemente.

Ultima matrice extinsă se poate aduce la forma triunghiulară redusă cu ajutorul transformărilor elementare ca mai jos.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right) \xleftarrow{-\frac{1}{5}L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad (\text{am obținut } a_{33}=1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xleftarrow[L_1-L_3]{L_2+L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad (\text{am obținut } a_{13}=a_{23}=0)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xleftarrow{-\frac{1}{5}L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad (\text{am obținut } a_{22}=1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xleftarrow{L_1-2L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

De aici $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=2$.

Pentru a face zerouri deasupra diagonalei principale am plecat de la ultima linie unde am pus-o sub forma $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$ și apoi am înmulțit-o cu diferiți coeficienți pentru a face zero pe coloana a treia. Procesul este invers celui descris în metoda lui Gauss, unde se fixa

pivotul pe linia întâi, coloana întâi și se făceau zerouri pe coloană, sub acest element etc. Acest procedeu poartă numele de metoda eliminării totale (Gauss-Jordan).

2) Matricea extinsă a sistemului este $\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$.

Sistemul fiind liniar omogen (de trei ecuații cu patru necunoscute) are cel puțin soluția banală $x_1=x_2=x_3=x_4=0$.

Aducem matricea extinsă prin metoda lui Gauss la forma trapezoidală:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xleftarrow[L_3+2L_1]{L_2+3L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & 0 \end{array}\right) \xleftrightarrow{\frac{1}{4}L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xleftarrow[L_3-L_2]{(-1)L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \xleftrightarrow{-\frac{1}{3}L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \text{(forma trapezoidală)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & \boxed{-3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{-1} & 0 \end{array}\right) \xleftarrow[L_1-L_3]{L_2+L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & \boxed{0} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{0} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xleftrightarrow{L_1+L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

(forma trapezoidală redusă)

Sistemul dat este echivalent cu sistemul $\begin{cases} x_1-x_4=0 \\ x_2+x_4=0 \\ x_3-x_4=0 \end{cases}$. De aici $x_1=x_3=x_4$, $x_2=-x_4$.

Notăm $x_4=\alpha\in\mathbb{R}$, sistemul are o infinitate de soluții de forma $x_1=\alpha$, $x_2=-\alpha$, $x_3=\alpha$, $x_4=\alpha$, și este un sistem compatibil simplu nedeterminat (soluția depinde de un parametru).

3) Matricea extinsă a sistemului este: $\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$.

Transformăm succesiv această matrice astfel:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xleftrightarrow[L_3+2L_1]{L_2+L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

La acest pas observăm că reducerea matricei la forma triunghiulară eșuează. Toate cele patru posibilități de a alege pivotul în a doua coloană nu sunt posibile, elementele fiind egale cu zero. Deoarece interesul nostru este să aducem sistemul la o formă cât mai simplă, vom trece la a treia coloană de pe care vom elimina ultimele elemente.

Avem:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_3-2L_2 \\ \longleftrightarrow \\ L_4-L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Ecuațiile reprezentate de ultimele două linii sunt:

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4 = 3$$
$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4 = -1$$

Cum nu există un cvadruplu $(x_1, x_2, x_3, x_4)\in\mathbb{R}^4$ care să verifice ultimele două ecuații, deducem că sistemul este incompatibil.

Observație. Dacă în forma trapezoidală a matricei extinse se află o linie de forma $(0\ \ 0\ \ \ldots\ \ 0\,|\,a)$ cu $a\neq 0$ sistemul dat este incompatibil.

3.5. DISCUȚIA UNUI SISTEM DE ECUAȚII LINIARE

Conform ultimei teoreme enunțate problemele fundamentale pentru un sistem liniar, **compatibilitatea** și **determinarea soluțiilor** se vor face pentru un sistem de formă trapezoidală (5).

Compatibilitatea. Dacă sistemul (5) conține o ecuație de forma $0=b_t$, cu $b_t\neq 0$, acest sistem este incompatibil. Dacă un sistem nu conține astfel de ecuații, atunci el este compatibil. Fie $b_t=0,\ \forall t>r$. Necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_s$ care apar la începutul primei ecuații, celei de-a doua ecuații, și respectiv ecuației cu numărul r se vor numi **necunoscute principale**, în timp ce necunoscutele (dacă există) $x_{s+1}, \ldots, x_m$ se vor numi **necunoscute secundare**. Dăm necunoscutelor secundare valori arbitrare și le introducem în ecuațiile sistemului (5). Se obține pentru necunoscuta x_s (din a r-a ecuație) o ecuație de forma $ax_s=b$, cu $a\neq 0$, cu soluție unică. Valoarea găsită pentru x_s se introduce în celelalte $r-1$ ecuații și se continuă din aproape în aproape spre primele ecuații din (5). Obținem că valorile necunoscutelor principale sunt definite unic funcție de valorile necunoscutelor secundare. Absența necunoscutelor secundare se exprimă prin condiția $r=n$. Deci are loc următoarea:

Teoremă. Un sistem liniar este compatibil determinat dacă și numai dacă forma sa trapezoidală verifică egalitatea $r=n$.

Dacă $m=n$, se obține forma triunghiulară (6) a sistemului.

Corolar. Dacă $m=n$, sistemul liniar (2) este **compatibil determinat** dacă și numai dacă forma sa este triunghiulară (cu $a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}\neq 0$).

De asemenea, pentru $m=n$ sistemul (2) este compatibil determinat dacă și numai dacă acest lucru este valabil și pentru sistemul liniar omogen asociat. Dar un astfel

de sistem este totdeauna compatibil, având cel puțin soluția banală: $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$. Condiția $a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}\neq 0$ spune că sistemul liniar omogen este compatibil determinat și deci soluția banală este singura soluție.

Corolar. Dacă $n>m$ (numărul de necunoscute este mai mare decât numărul de ecuații), atunci sistemul compatibil (2) este nedeterminat.
În particular, sistemul liniar omogen are întotdeauna o soluție nenulă.

Exemplu

Să se rezolve sistemele (S_1): $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6 \\ 2x_1+x_2-x_3=1 \\ 4x_1-x_2+2x_3=8 \\ -x_1+x_2+2x_3=7 \end{cases}$, (S_2): $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6 \\ 2x_1+x_2-x_3=0 \\ 4x_1-x_2+2x_3=8 \\ -x_1+x_2+2x_3=7 \end{cases}$.

(Membrii stângi ai celor două sisteme coincid, iar membrii drepți sunt diferiți)

R. Cum cele două sisteme au aceeași matrice vom considera matricea extinsă $\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 6 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 8 & 8 \\ -1 & 1 & 2 & 7 & 7 \end{array}\right)$ **unde după matricea sistemelor am trecut coloanele termenilor liberi din** (S_1) **și respectiv** (S_2).

Aducem la forma trapezoidală matricea extinsă astfel:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} \textcircled{1} & 1 & 1 & 6 & 6 \\ \boxed{2} & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 8 & 8 \\ \boxed{-1} & 1 & 2 & 7 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_2-2L_1 \\ \longleftrightarrow \\ L_3-4L_1 \\ L_4+L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 6 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -11 & -12 \\ 0 & -5 & -2 & -16 & -16 \\ 0 & 2 & 3 & 13 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-1)L_2 \\ \longleftrightarrow \\ (-1)L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 6 & 6 \\ 0 & \textcircled{1} & 3 & 11 & 12 \\ 0 & \boxed{5} & 2 & 16 & 16 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 13 & 13 \end{array}\right) \longleftrightarrow$$

$$\begin{array}{c} L_3-5L_2 \\ \longleftrightarrow \\ L_4-2L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & -13 & -39 & -44 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & -11 \end{array}\right) \begin{array}{c} -\frac{1}{13}L_3 \\ \longleftrightarrow \\ -\frac{1}{3}L_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 44/13 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 11/13 \end{array}\right)$$

pentru primul sistem avem din ultimele două ecuații $x_3=3$. **Din a doua ecuație** $x_2+3x_3=11$, **deducem** $x_2=2$, **iar din prima ecuație** $x_1+x_2+x_3=6$ **rezultă** $x_1=1$. **Deci primul sistem este compatibil determinat cu soluția** $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$. **Pentru sistemul** (S_2), **din ultimele două ecuații avem** $x_3=\frac{44}{13}$ **și** $x_3=\frac{11}{3}$, **imposibil. Deci sistemul** (S_2) **este incompatibil.**

Metoda determinanților caracteristici (Rouché)

A doua metodă de rezolvare a unui sistem liniar compatibil de m ecuații cu n necunoscute, utilizează spre deosebire de metoda lui Gauss, calculul determinanților. Pentru prezentarea metodei este necesară cunoașterea unei noțiuni noi legate de matrice.

Rangul unei matrice

Definiție. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Se numește **minor de ordinul** k al matricei A, determinantul matricei extrase din A, ale cărui elemente se găsesc la intersecția a k coloane diferite și k linii diferite.

Evident, $k \leq \min(m,n)$, iar numărul de minori de ordin k formați cu elementele lui A sunt în număr de $C_m^k \cdot C_n^k$ (k linii se aleg din m linii în C_m^k, iar k coloane se aleg din cele n în C_n^k, după care se aplică regula produsului de la combinatorică).

Dacă $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, atunci minorul de ordinul doi cu elemente din liniile 2 și 3 și coloanele 1 și 3 este: $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6+5 = 11$.

Elementele din structura minorului sunt scrise cu roșu în matricea A.

Definiție. 1) Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, A nenulă, atunci **rangul matricei** A, notat $\text{rang}(A)$, este cel mai mare dintre ordinele minorilor nenuli ai matricei A.
2) Dacă $A = O$, matricea nulă, atunci $\text{rang}(A) = 0$.

Metode pentru determinarea rangului unei matrice

Metoda 1 (Utilizând transformările elementare) Ținând seama de definiția rangului unei matrice și de proprietățile determinanților, deducem că matricele obținute din A prin transformările elementare (E_1, E_2, E_3) au același rang ca și matricea A. În plus se știe că $\det(B) = \det({}^tB)$, unde B este matrice pătratică și deci transformările elementare se referă și la coloane. Mai mult, o astfel de matrice se aduce în general la forma (metoda lui Gauss – cu pivoți)

$$\begin{pmatrix} x & x & x & \dots & x \\ 0 & x & x & \dots & x \\ 0 & 0 & x & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$
(forma trapezoidală)

sau la forma
$$\begin{pmatrix} x & x & x & \dots & x \\ 0 & x & x & \dots & x \\ 0 & 0 & x & \dots & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{pmatrix}$$
(forma triunghiulară)

sau (metoda Gauss – Jordan – cu pivoți)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{array}\right)$$
(forma diagonală)

sau
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$
(forma triunghiulară)

Dacă aici apar r de 1, atunci, evident, acest minor de ordin r este nenul și orice minor de ordin mai mare decât r este nul (având o linie formată din zeroruri). Deci $\text{rang}(A) = r$.

Exemplu. Să se determine rangul matricelor:

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$; c) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

R. Elementele încercuite reprezintă pivoții

a) Avem:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xleftarrow[L_4-3L_1]{\substack{L_2-2L_1 \\ L_3-4L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \textcircled{-5} & -1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -5 & -1 \end{pmatrix} \xleftarrow[L_4-L_2]{L_3-L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xleftarrow{-\frac{1}{5}L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(formă trapezoidală)

Deci, $rang(A_1) = 2$.

b) Avem succesiv:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xleftarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xleftarrow[L_3-3L_1]{L_2-2L_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 8 & -13 \end{pmatrix} \longleftrightarrow$$

$$\xleftarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & \textcircled{8} & -13 \\ 0 & 7 & -5 \end{pmatrix} \xleftarrow{L_2-L_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & \textcircled{1} & -8 \\ 0 & 7 & -5 \end{pmatrix} \longleftrightarrow$$

$$\xleftarrow[L_3-7L_2]{L_1+2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -13 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \end{pmatrix} \xleftarrow[L_2+8L_3]{L_1+13L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(formă triunghiulară) (formă diagonală)

De aici, $rang(A_2) = 3$.

c) Avem:

$$A_3=\begin{pmatrix}\textcircled{1} & 2 & -3 & 1\\ 3 & -1 & -2 & -4\\ 2 & 3 & -5 & 1\end{pmatrix}\xleftarrow[L_3-2L_1]{L_2-3L_1}\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 1\\ 0 & \textcircled{-7} & 7 & -7\\ 0 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\longleftrightarrow$$

$$\xleftarrow{-\frac{1}{7}L_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 1\\ 0 & \textcircled{1} & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\xleftarrow[L_3+L_2]{L_1-2L_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

(formă trapezoidală)

De aici, $rang(A_3)=2$.

Observație. Dacă $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, atunci are loc relația

$rang(AB)\le\min\left(rang(A),rang(B)\right)$,

adică rangul produsului a două matrice este cel mult egal cu rangul fiecărei matrice.

Metoda 2 (Utilizând calculul de minori) Vom indica un procedeu mai simplu de determinare a rangului unei matrice, care reduce calculul numărului de minori de ordin k, dedus din definiția rangului.
Pentru aceasta prezentăm următoarea:

Teoremă. Fie $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ și $r\in\mathbb{N}, r<\min(m,n)$. Dacă toți minorii de ordin r ai matricei A sunt nuli, atunci toți minorii de ordin $r+1$ sunt de asemenea nuli.

Demonstrație. Dacă se dezvoltă un determinant de ordin $r+1$ după elementele unei linii, atunci termenii dezvoltării conțin ca factor un determinant de ordin r care este nul. Deci dacă toți minorii de ordin r sunt nuli, atunci toți minorii de ordin superior sunt nuli. ■
Următoarea teoremă ne permite să reducem numărul minorilor de ordin $r+1$ care trebuie calculați pentru determinarea rangului unei matrice.

Teoremă. Dacă matricea A are un minor nenul de ordin r, iar toți minorii de ordin $r+1$ (dacă există), obținuți prin bordarea (adăugarea unei linii și a unei coloane) minorului de ordin r cu elementele corespunzătoare ale uneia dintre liniile și uneia dintre coloanele rămase, sunt nuli, atunci $rang(A)=r$.

Așadar, pentru a găsi rangul unei matrice $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, trebuie să găsim cel puțin un minor nenul de ordinul întâi, adică să găsim un element nenul printre elementele matricei. Dacă nu există un astfel de element, atunci $rang(A)=0$. Dacă matricea are un element nenul, atunci căutăm să găsim cel puțin un minor nenul de ordinul doi care-l conține. Dacă nu există un astfel de minor, atunci $rang(A)=1$. Dacă

există un minor de ordinul doi nenul, atunci căutăm un minor de ordinul trei nenul care-l conține și așa mai departe până găsim un minor nenul de ordin r, pentru care toți minorii de ordin $r+1$, obținuți prin bordarea minorului de ordin r, sunt nuli. Atunci $rang(A)=r$.

Pentru a găsi rangul unei matrice aplicăm următorul:

Algoritm. 1) Se alege un element nenul al matricei (minor de ordin unu).
2) Se bordează minorul ales la pasul precedent cu o linie și o coloană diferite de cele cărora le aparține elementul ales și se formează minor de ordinul al doilea până găsim unul diferit de zero. Dacă toți sunt nuli, atunci $rang(A)=1$.
3) Se bordează minorul nenul de ordinul doi de la 2) cu o anumită linie și o anumită coloană dintre liniile și coloanele care nu figurează în minorul de ordinul doi ales și se formează minori de ordinul al treilea până când se găsește unul nenul. Dacă toți minorii astfel formați sunt nuli, atunci $rang(A)=2$.
4) Se continuă procedeul până când se găsește un minor nenul de ordin r pentru care toți minorii de ordin $r+1$, obținuți prin bordarea minorului de ordin r ca mai sus, sunt nuli. Atunci $rang(A)=r$.

Exemplu. Să se determine rangul matricei: $A=\left(\begin{array}{cccc}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 5 & 7 & 9\\ 4 & 7 & 10 & 13\end{array}\right)$.

R. Matricea $A\in\mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ **și deci** $rang(A)\le\min(3,4)=3$.

Alegem ca minor nenul de ordinul întâi elementul $a_{11}=1$. **Pentru obținerea minorilor de ordinul doi care-l conțin pe** a_{11}, **îl vom borda pe acesta cu elemente din liniile 2 sau 3 și coloanele 2, 3 sau 4.**
Acești minori sunt:

$$\begin{array}{cc}L_1\\ L_2\end{array}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix};\quad \begin{array}{cc}L_1\\ L_3\end{array}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 7\end{vmatrix};\quad \begin{array}{cc}L_1\\ L_2\end{array}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 7\end{vmatrix};\quad \begin{array}{cc}L_1\\ L_3\end{array}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 10\end{vmatrix};\quad \begin{array}{cc}L_1\\ L_2\end{array}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 9\end{vmatrix};\quad \begin{array}{cc}L_1\\ L_3\end{array}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 4 & 13\end{vmatrix},$$
$$\begin{array}{cc}C_1 & C_2\end{array}\quad \begin{array}{cc}C_1 & C_2\end{array}\quad \begin{array}{cc}C_1 & C_3\end{array}\quad \begin{array}{cc}C_1 & C_3\end{array}\quad \begin{array}{cc}C_1 & C_4\end{array}\quad \begin{array}{cc}C_1 & C_4\end{array}$$

unde L_i, C_i **reprezintă linia și respectiv coloana** i **din matricea** A. **Dacă îl bordăm cu elemente din linia a doua și coloana a doua se obține minorul de ordinul al doilea** $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix}=-1\neq 0$.

Pentru obținerea minorilor de ordinul trei se bordează acest minor cu elemente din linia 3 și una din coloanele rămase 3 sau 4. Deci avem doar doi determinanți de ordin trei care-l conțin pe cel de ordin doi nenul. Aceștia sunt: $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 5 & 7\\ 4 & 7 & 10\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 5 & 9\\ 4 & 7 & 13\end{vmatrix}=0$.

Cum toți minorii de ordin trei sunt nuli rezultă $rang(A)=2$.

Problemă rezolvată

Să se discute rangul matricei în funcție de parametrul m, $A=\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

R.Se poate aplica algoritmul descris în partea teoretică pentru a calcula $rang(A)\le 3$. În acest caz matricea fiind pătratică vom calcula $\det(A)$ și vom merge cu raționamentul invers, de la cel mai mare minor al matricei A la cel mai mic. Avem $\det(A)=(m+2)(m-1)^2$. Deci $\det(A)=0\Leftrightarrow m\in\{1,-2\}$.

Analizăm cazurile:

1) Dacă $m\in\mathbb{R}-\{1,-2\}$, atunci $\det(A)\neq 0$ și deci $rang(A)=3$.

2) Dacă $m=-2$, atunci $\det(A)=0$ și deci $rang(A)<3$.

Matricea este: $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Observăm că minorul de ordinul 2 format cu elemente din liniile 1 și 2 și coloanele 1 și 2, $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=3\neq 0$. Deci $rang(A)=2$.

3) Dacă $m=1$, atunci $\det(A)=0$ și $rang(A)<3$.

Matricea devine: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Cum orice minor de ordin doi are două linii (și coloane) egale, el este nul. Deci $rang(A)<2$. Din $a_{11}=1\neq 0$, deducem $rang(A)=1$.

Compatibilitatea unui sistem liniar

Vom aborda în continuare problema compatibilității sistemului liniar (2):

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}, \text{ utilizând rangul matricei.}$$

Răspunsul la această problemă este dat de:

Proprietatea Kronecker - Capelli. Sistemul liniar (2) este compatibil dacă și numai dacă rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse.

(2) **sistem compatibil** $\Leftrightarrow rang(A)=rang(\overline{A})$

Exemplu. Să se studieze compatibilitatea sistemelor:

a) $\begin{cases} 2x+y+3z=3 \\ 3x-y+4z=2 \\ 4x+y-z=5 \\ x+y+z=4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x+y-3z-t=9 \\ x+y+z+t=4. \\ 2x+y-z+t=6 \end{cases}$

R.a) Cele două matrice asociate sistemului sunt: $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Cum $A\in\mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$, avem $rang(A)\le 3$.

Minorul format cu elementele din primele trei linii este nenul, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}=34\neq 0$.

Deci $rang(A)=3$. Pe de altă parte $\det(\overline{A})\neq 0$, arată că $rang(\overline{A})=4$.

Deoarece $rang(A)\neq rang(\overline{A})$, deducem că sistemul este incompatibil.

b) În acest caz cele două matrice asociate sistemului sunt:

$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Găsim ușor $rang(A)=rang(\overline{A})=3$. Conform proprietății Kronecker – Capelli sistemul este compatibil. Cum numărul de necunoscute este mai mare decât numărul de ecuații sistemul este compatibil nedeterminat.

În continuare vom reformula proprietatea Kronecker – Capelli.

Sistemul (2) este compatibil dacă și numai dacă $rang(A)=rang(\overline{A})=r$. Din $rang(A)=r$, deducem existența unui minor nenul de ordin r al matricei A. Pentru ușurință în prezentare să presupunem că minorul de ordin r este format din primele r linii și primele r coloane.

Pe acesta îl numim **determinant principal** și îl notăm cu Δ_p.

Deci $\Delta_p=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix}$.

Necunoscutele ale căror coeficienți sunt în determinantul principal se numesc **necunoscute principale**. Aici acestea sunt: $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Celelalte necunoscute dacă există se numesc **necunoscute secundare**. În cazul nostru: $x_{r+1}, \ldots, x_n$.

Ecuațiile ale căror coeficienți sunt în Δ_p se numesc **ecuații principale**. În cazul de față primele r ecuații sunt principale. Celelalte ecuații dacă există se numesc **ecuații secundare**. Ca să avem egalitatea $rang(A) = rang(\overline{A})$ trebuie probat că orice minor al matricei $\overline{A}$ care-l conține pe cel principal și care nu este minor al lui A este nul.

Orice astfel de minor de ordin $r+1$, obținut prin bordarea determinantului principal cu o linie formată din coeficienții necunoscutelor principale dintr-o ecuație secundară și o coloană formată din termenii liberi corespunzători ecuațiilor principale și respectivei ecuații secundare se numește **determinant caracteristic**. Vom nota un astfel de determinant prin $\Delta_{car,k}$, unde k indică linia (corespunzătoare ecuației secundare) utilizată pentru bordare. Acești determinanți caracteristici există dacă $r<m$ (dacă rangul matricei este mai mic decât numărul ecuațiilor sistemului) și numărul lor este egal cu $m-r$. Cu aceste observații proprietatea lui Kronecker – Capelli se reformulează în următoarea:

Proprietate (Rouché). Sistemul liniar (2) este compatibil dacă și numai dacă toți determinanții caracteristici sunt nuli.

Deci, dacă cel puțin un determinant caracteristic este nenul, sistemul este incompatibil. Să reținem că proprietatea lui Rouché rezolvă **problema compatibilității sistemului** (2).

Determinarea soluțiilor unui sistem compatibil. Discuția unui sistem liniar

Presupunem că $rang(A) = r$ și că am ales ca determinant principal al sistemului compatibil $\Delta_p = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}$.

De precizat că odată ales determinantul principal, cu el se merge până la determinarea soluțiilor.

Am numit necunoscutele, având coeficienții în determinantul principal, necunoscute principale, iar celelalte (dacă există) necunoscute secundare. Ecuațiile, având coeficienții în determinantul principal, le-am numit ecuații principale, iar celelalte (dacă există) ecuații secundare. Se rezolvă sistemul format din ecuațiile principale în care necunoscutele secundare se notează variabil $x_{r+1} = \lambda_{r+1}, \ldots, x_n = \lambda_n$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$ și se trec în membrii drepți ai ecuațiilor:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}\lambda_{r+1} - \ldots - a_{1n}\lambda_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}\lambda_{r+1} - \ldots - a_{2n}\lambda_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}\lambda_{r+1} - \ldots - a_{rn}\lambda_n \end{cases} \quad (*)$$

Soluțiile acestui sistem sunt soluții și pentru (2) (din $rang(A) = rang(\overline{A})$, rezultă că celelalte linii sunt combinații liniare ale ecuațiilor principale, ceea ce arată că o soluție a sistemului de mai sus este soluție și pentru (2)).

Analizăm cazurile:

1) Dacă $r = n$, atunci sistemul $(*)$ are atâtea ecuații câte necunoscute.

Pentru rezolvarea lui se aplică formulele lui Cramer:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta}.$$

2) Dacă $r < n$, atunci în ecuațiile principale se înlocuiesc necunoscutele secundare variabil $x_{r+1} = \lambda_{r+1}, \ldots, x_n = \lambda_n$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$ și se rezolvă sistemul format din ecuațiile principale (în care necunoscutele secundare se trec în membrul drept). Dacă soluția sistemului depinde de o variabilă (de două, etc.) atunci sistemul se numește **simplu** (**dublu**, etc.) **nedeterminat**. Pentru rezolvare se aplică regula lui Cramer.

În final putem formula următorul:

Procedeu practic pentru discuția sistemelor liniare.

1) (Compatibilitarea sistemului). Se calculează $rang(A) = r$ și stabilim dacă sistemul este compatibil sau nu (fie cu proprietatea Kronecker-Capelli verificând egalitatea $rang(A) = rang(\overline{A})$, fie cu proprietatea lui Rouché calculând toți determinanții caracteristici).

Dacă $rang(A) < rang(\overline{A})$, atunci sistemul este incompatibil ($S = \emptyset$, unde S este mulțimea de soluții) (Kronecker – Capelli).

Dacă $r < m$ și există cel puțin un determinant caracteristic nenul atunci sistemul este incompatibil ($S = \emptyset$) (Rouché).

Dacă $rang(A) = rang(\overline{A})$ sau toți determinanții caracteristici sunt nuli, atunci sistemul este compatibil.

2) (Determinarea soluțiilor sistemului compatibil) Se alege un determinant principal Δ_p și se precizează necunoscutele: principale și secundare, precum și ecuațiile: principale și secundare.
Dacă $r=n$, atunci sistemul dat este **compatibil determinat.**
Dacă $r<n$, se rezolvă sistemul format din ecuațiile principale, în care necunoscutele secundare se trec în membrul drept, utilizând regula lui Cramer. Li se atribuie necunoscutelor secundare valori arbitrare. Dacă soluția depinde de una, două, etc. valori arbitrare, sistemul este **compatibil simplu, dublu,** etc. **nedeterminat.**

Discuția sistemului liniar omogen

Un sistem liniar omogen ($b_k=0,\ \forall k$) este întotdeauna compatibil, deoarece admite cel puțin soluția banală $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$. Să precizăm când este compatibil determinat (deci numai cu soluția banală) și când este compatibil nedeterminat (are și soluții diferite de cea banală). Conform discuției de mai sus, dacă $r=n$ (rangul matricei este egal cu numărul de necunoscute) atunci sistemul este **compatibil determinat**. Dacă $r<n$, atunci sistemul este **compatibil nedeterminat** (necunoscutele principale se exprimă în funcție de cele secundare și deci sistemul are și soluții nebanale). Condiția ca un sistem omogen de n ecuații liniare cu n necunoscute să aibă numai soluția banală este $\Delta\neq 0$ (Cramer), iar condiția ca acest sistem să aibă și soluții nebanale este $\Delta=0$.

Probleme rezolvate

1.Să se arate că sistemul: $\begin{cases} x+y+2z=4 \\ 3x-y+z=3 \\ -3x+5y+4z=5 \end{cases}$ **este incompatibil.**

R.Matricele A **și** $\overline{A}$ **asociate sistemului sunt:** $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

cu $rang(A)=2$, $rang(\overline{A})=3$.

Deoarece $rang(A)\neq rang(\overline{A})$, **deducem că sistemul este incompatibil (Kronecker – Capelli).**

Altfel (Rouché). Determinantul sistemului este $\Delta=\det(A)=0$. **Alegem** $\Delta_p=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=3\neq 0$

și observăm că $\Delta_{car,3}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 5 \end{vmatrix}=1\neq 0$. **Prin urmare sistemul este incompatibil.**

2Să se discute după valorile parametrului real m **sistemul:** $\begin{cases} 2x+2y+mz=1 & (1) \\ 2x+my+2z=1 & (2) \\ mx-y+z=-1 & (3) \end{cases}$.

RMatricea sistemului este: $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & m \\ 2 & m & 2 \\ m & -1 & 1 \end{pmatrix}$ cu $\det(A)=m(4-m^2)$.

Din $\det(A)=0\Rightarrow m\in\{-2,0,2\}$. Se discută sistemul în cazurile:

1) $m=0$. Matricea sistemului devine: $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ cu $rang(A)=2$.

Alegem determinantul principal $\Delta_p=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-4\neq 0$. Ecuațiile principale sunt (1), (2); ecuația secundară (3). Necunoscutele principale x, y; necunoscuta secundară z.

Calculăm $\Delta_{car,3}=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}=4\neq 0$ și deci (Rouché) sistemul este incompatibil.

2) $m=-2$. Avem matricea sistemului: $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ și $\Delta_p=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=-8\neq 0$.

Ecuațiile principale: (1), (2); secundară (3). Necunoscute principale: x, y; secundară z.

$$\Delta_{car,3}=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0$$ (coloanele unu și trei sunt proporționale)

Conform cu proprietatea lui Rouché sistemul este compatibil nedeterminat $(r=2<3)$.

Se rezolvă sistemul format din ecuațiile principale în care $z=\lambda\in\mathbb{R}$: $\begin{cases} 2x+2y=1+2\lambda \\ 2x-2y=1-2\lambda \end{cases}$.

Găsim soluția: $x=\frac{1}{2}$, $y=\lambda$.

Deci, sistemul dat este compatibil nedeterminat cu soluția: $x=\frac{1}{2}$, $y=\lambda$, $z=\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

3) $m=2$. Se obține matricea sistemului: $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ cu $\Delta_p=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-6\neq 0$.

Ecuațiile principale sunt (2), (3), secundară (1). Necunoscute principale: x, y, secundară z.

De aici $\Delta_{car,1}=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0$, ceea ce arată (Rouché) că sistemul este compatibil. Se rezolvă sistemul format din ecuațiile (2), (3) în care $z=\lambda\in\mathbb{R}$: $\begin{cases} 2x+y=1-2\lambda \\ 2x-y=-1-\lambda \end{cases}$. Găsim soluția: $x=\frac{-1-4\lambda}{6}$, $y=\frac{2-\lambda}{3}$. Deci sistemul dat este compatibil nedeterminat cu soluția: $x=\frac{-1-4\lambda}{6}$, $y=\frac{2-\lambda}{3}$, $z=\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

4) Dacă $m \in \mathbb{R}-\{-2,0,2\}$ atunci sistemul este compatibil determinat și soluția se obține cu regula lui Cramer. Găsim: $x=-\frac{1}{m}, y=z=\frac{1}{m}$.

3. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} 2x- \ y+3z=4 \ \ (1) \\ 3x+4y- \ z=-5 \ \ (2) \\ x+5y-4z=-9 \ \ (3) \end{cases}$.

R. Matricea A a sistemului este $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$. Găsim ușor că $\det(A)=0$.

Alegem minorul principal $\Delta_p=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=11\neq 0$ (Δ_p construit din prima și a doua ecuație).

Necunoscutele principale sunt x, y; necunoscută secundară z.
Ecuații principale: (1), (2); ecuație secundară (3).
Sistemul este compatibil dacă determinantul caracteristic, corespunzător ecuației a treia a sistemului este zero (Rouché). Acesta este: $\Delta_{car,3}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -5 \\ 1 & 5 & -9 \end{vmatrix}=0$.

Sistemul fiind compatibil se rezolvă sistemul format din ecuațiile principale (1), (2) în care necunoscuta secundară z se notează arbitrar $z=\lambda, \lambda\in\mathbb{R}$ (avem un sistem compatibil simplu nedeterminat, deoarece avem o singură necunoscută secundară, celelalte necunoscute se exprimă în funcție de una variabilă).

Avem: $\begin{cases} 2x- \ y= \ 4-3\lambda \\ 3x+4y=-5+ \ \lambda, \text{ cu soluția } x=1-\lambda, y=-2+\lambda \end{cases}$

Deci soluția sistemului dat este: $x=1-\lambda, \ y=-2+\lambda, \ z=\lambda, \ \lambda\in\mathbb{R}$.

4. Să se rezolve sistemul omogen: $\begin{cases} x-2y-4z+3t=0 \\ -2x+y \ \ \ -5t=0 \\ 3x \ -y+2z \ \ =0 \end{cases}$.

R. Sistemul fiind liniar omogen are cel puțin soluția banală.

Cum matricea sistemului este $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -5 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ găsim că $rang(A)=3$, având minorul următor nenul $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-2\neq 0$.

În acest caz toate ecuațiile sunt principale; necunoscutele principale sunt x, y, z; necunoscută secundară $t=\lambda\in\mathbb{R}$. Sistemul este compatibil simplu nedeterminat. Rezolvăm sistemul:

$\begin{cases} x-2y-4z=-3\lambda \\ -2x+y=5\lambda \\ 3x-y+2z=0, \text{ cu soluția } x=-17\lambda, y=-29\lambda, z=11\lambda. \end{cases}$

Deci sistemul are soluția $x=-17\lambda, y=-29\lambda, z=11\lambda, t=\lambda, \lambda\in\mathbb{R}$.

5. Fie sistemul: $\begin{cases} 2x-3y+4z-5t=-1 \\ x+9y+\alpha z+t=3 \\ 5x-6y+10z+\beta t=l \end{cases}$. Să se determine α, β, l astfel încât determinantul

principal al sistemului să fie de ordin doi și sistemul compatibil.

R. Matricea sistemului este: $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -5 \\ 1 & 9 & \alpha & 1 \\ 5 & -6 & 10 & \beta \end{pmatrix}$. Determinantul de ordinul doi format din coeficienții lui x și y din primele două ecuații este diferit de zero (el fiind Δ_p):

$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}=21\neq 0$.

Ca rangul matricei să fie doi trebuie ca determinanții următori $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 9 & \alpha \\ 5 & -6 & 10 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & 9 & 1 \\ 5 & -6 & \beta \end{vmatrix}$ să fie zero. De aici $\alpha=2$, $\beta=-12$.

Sistemul este compatibil dacă $\Delta_{car,3}=0$, adică $l=-2$.

Aplicații ale sistemelor de ecuații

Utilizarea sistemelor de ecuații liniare cuprinde o gamă variată de domenii practice.

Aplicația 1. Să se calculeze curenții din laturile rețelei electrice din figura de mai jos dacă se cunosc $E_1=40V$, $E_2=20V$, $R_1=2\Omega$, $R_2=2\Omega$, $R_3=1\Omega$, $R_4=8\Omega$, $R_5=4\Omega$, $R_6=6\Omega$.

R. Să observăm că rețeaua are patru noduri (un nod este punctul de întâlnire a cel puțin trei laturi, iar o latură este porțiunea de circuit cuprinsă între două noduri) notate cu A, B, C, D, șase laturi și trei ochiuri notate cu I, II și III.

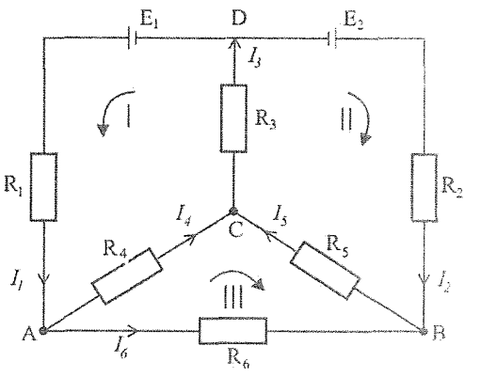


Fig.5

Pentru curenții din cele șase laturi și pentru parcurgerea ochiurilor se aleg sensurile indicate în figură. Aplicând prima teoremă a lui Kirchoff (suma algebrică a intensităților curenților din laturile legate într-un nod al unei rețele este nulă, $\sum I_k=0$, unde I_k este intensitatea curentului din latura k, considerată cu semnul plus dacă sensul curentului este orientat dinspre nod și cu semnul minus, dacă sensul curentului este orientat spre nod) în nodurile A, B și C și cea de-a doua teoremă (suma algebrică a tensiunilor electromotoare (imprimate) dintr-un ochi al unei rețele este egală cu suma căderilor de tensiune din laturile ochiului $\sum E_k=\sum R_k I_k$; căderea de tensiune într-o latură se consideră pozitivă dacă sensul de parcurgere al acestei laturi coincide cu cel ales pentru curentul respectiv – aceeași regulă este valabilă și pentru tensiunea electromotoare) în ochiurile I, II, III se obține sistemul de ecuații liniare în $I_1, I_2, ..., I_6$:

$$(A): I_4+I_6=I_1, \ (I): \ I_1R_1+I_4R_4+I_3R_3=E_1$$
$$(B): I_2+I_6=I_5, \ (II): I_2R_2+I_5R_5+I_3R_3=E_2$$
$$(C): I_4+I_5=I_3, \ (III): I_6R_6+I_5R_5-I_4R_4=0$$

sau înlocuind valorile pentru $R_1, R_2, ..., R_6$ rezultă sistemul liniar

$$I_4+I_6-I_1=0 \qquad 2I_1+8I_4+I_3=40$$
$$I_2+I_6-I_5=0 \qquad 2I_2+4I_5+I_3=20$$
$$I_4+I_5-I_3=0 \qquad 6I_6+4I_5-8I_4=0$$

cu soluția $I_1=5A$, $I_2=1A$, $I_3=6A$, $I_4=I_5=3A$, $I_6=2A$.

Aplicația 2 . Legea întâi a lui Kirchhoff se poate aplica la probleme de trafic rutier. În cazul unor intersecții cu sens giratoriu ca aceea din Fig. 6, în care presupunem că străzile A, B, C nu sunt cu sens unic, dacă notăm cu x_A, y_A numărul de mașini care intră și respectiv care ies pe strada A și analoagele pentru B și C, atunci ecuația care guvernează o astfel de intersecție este

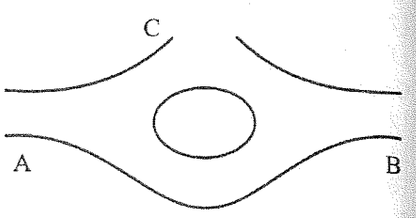


Fig.6

$$x_A+x_B+x_C=y_A+y_B+y_C, \quad (*)$$

(suma mașinilor care intră în intersecție este egală cu suma mașinilor care ies din intersecție). Să observăm că $(*)$ este o ecuație liniară în $x_A, y_A, ..., x_C, y_C$. Dacă strada C are sens unic, de exemplu de ieșire din intersecție, atunci $x_C=0$. Urmărind intensitatea traficului într-o astfel de intersecție, pe o anumită perioadă, se pot impune condiții asupra variabilelor x_A, y_A, ..., x_C, y_C, oferind condiții asupra unei semaforizări corespunzătoare a acelei intersecții. La nivelul unui oraș rețeaua străzilor studiată cu ajutorul sistemelor de ecuații oferă o imagine asupra intensității traficului în anumite zone.

Aplicația 3 . Un comitet format din 20 de membri trebuie să-și aleagă un președinte. În cursă au rămas trei candidați *A, B, C* în urma numărării voturilor (nu există abțineri, fiecare membru își dă votul pentru unul sau altul din candidați). Pentru acești candidați s-a votat astfel: 11 membri, majoritate, l-au preferat pe *A* în locul lui *B* (ceilalți 9 l-au preferat pe *B* lui *A*). Analog, 12 membri l-au preferat pe *C* lui *A*. La protestele lui *B*, care a sesizat că ar trebui să se retragă, 14 membri l-au preferat pe *B* lui *C*. Câți membri l-au votat pe *B* ca primă opțiune ?

R. Cele șase posibilități de ordonare a candidaților sunt: *ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA*. Presupunem că ei au obținut a, b, c, d, e, f voturi. Știm că $a+b+e=11$, $d+e+f=12$, $a+c+d=14$ (ecuații rezultate din numărul celor care l-au preferat pe *A* lui *B*, pe *C* lui *A* și respectiv pe *B* lui *C*), $c+d+f=9$, $a+b+c=8$, $b+e+f=6$ (ecuații rezultate din numărul celor care l-au preferat pe *B* lui *A*, pe *A* lui *C* și pe *C* lui *B*). Se obține soluția: $a=6$, $b=1$, $c=1$, $d=7$, $e=4$, $f=1$. Numărul cerut este $c+d=1+7=8$.

Aplicația 4 Ecuații chimice). În procesul de fotosinteză plantele utilizează energia radiată de soare pentru a transforma dioxidul de carbon (CO_2) și apa (H_2O) în glucoză ($C_6H_{12}O_6$) și oxigen (O_2).

Ecuația chimică a reacției este de forma $x_1CO_2+x_2H_2O \rightarrow x_3O_2+x_4C_6H_{12}O_6$.

Pentru a obține echilibrul (balanța) ecuației trebuie să alegem x_1, x_2, x_3, x_4 astfel încât numărul de atomi de carbon, hidrogen și oxigen din cei doi membri să fie același. Deoarece dioxidul de carbon conține un atom de carbon, iar glucoza conține șase, atunci pentru egalizarea numărului de atomi de carbon trebuie să avem $x_1=6x_4$.

Analog, pentru atomii de oxigen și respectiv hidrogen avem ecuațiile: $2x_1+x_2=2x_3+6x_4$, $2x_2=12x_4$. Cele trei ecuații conduc la sistemul: $\begin{cases} x_1 & -6x_4=0 \\ 2x_1+x_2-2x_3 & -6x_4=0 \\ 2x_2 & -12x_4=0 \end{cases}$.

Soluția sistemului este: $x_1=6\lambda$, $x_2=6\lambda$, $x_3=6\lambda$, $x_4=\lambda$, $\lambda \geq 0$.

Pentru $\lambda=1$ se obține soluția particulară $x_1=x_2=x_3=6$, $x_4=1$ și ecuația are forma

$$6CO_2+6H_2O \rightarrow 6O_2+C_6H_{12}O_6$$

REZUMATUL CAPITOLULUI

Noțiunea	Formă generală. Scriere matriceală	Existența soluțiilor. Determinarea soluțiilor
Sistem de 2 ecuații liniare cu 2 necunoscute	$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$, $AX=C$, unde $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ (*matricea sistemului*) $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (*matricea necun.*) $C=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ (*matricea termenilor liberi*)	1) Metoda lui Cramer $\Delta=\det(A)\neq 0\Rightarrow x=\frac{\Delta x}{\Delta}, y=\frac{\Delta y}{\Delta}$ s.c.d., unde $\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ Formulele lui Cramer 2) Metoda matriceală $\Delta\neq 0\Rightarrow X=A^{-1}C$
	$c_1=c_2=0\Rightarrow$ sistem liniar omogen	$\Delta\neq 0\Rightarrow x=y=0$ (s.c. determinat) $\Delta=0\Rightarrow$ (s.c. nedeterminat)
Sistem de 3 ecuații liniare cu 3 necunoscute	$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$ $AX=C$, unde $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ (*matricea sistemului*) $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (*matricea necun.*) $C=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ (*matricea termenilor liberi*)	1) Dacă $\Delta=\det(A)\neq 0\Rightarrow$ s.c.d. a) Metoda lui Cramer $\Delta=\det(A)\neq 0\Rightarrow x=\frac{\Delta x}{\Delta}, y=\frac{\Delta y}{\Delta}, z=\frac{\Delta z}{\Delta}$ Formulele lui Cramer b) Metoda matriceală $\Delta\neq 0\Rightarrow X=A^{-1}C$ 2) Dacă $\Delta=0$ și ($\Delta_1=0$ sau $\Delta_2=0$ sau $\Delta_3=0$) $\Rightarrow$ sistem incompatibil 3) Dacă $\Delta=0$ și $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0\Rightarrow$ s.c. nedeterminat
	$d_1=d_2=d_3=0\Rightarrow$ sistem liniar omogen	$\Delta\neq 0\Rightarrow x=y=z=0$ (s.c. determinat) $\Delta=0\Rightarrow$ (s.c. nedeterminat)
Sistem de m ecuații liniare cu n necunoscute	$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{1n}x_n=b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$ $AX=C$, unde $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ (*matricea sistemului*) $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (*matricea necun.*) $C=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ (*matricea termenilor liberi*)	1. Dacă $m=n$ și $\Delta=\det(A)\neq 0\Rightarrow$ s.c.d. 1) Metoda lui Cramer $x_1=\frac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2=\frac{\Delta x_2}{\Delta}, \dots, x_n=\frac{\Delta x_n}{\Delta}$ Formulele lui Cramer 2) Metoda matriceală $X=A^{-1}C$ Dacă $b_1=b_2=\dots=b_n=0$ (sistem omogen) $\Rightarrow x_1=x_2=\dots=x_n=0$ (soluție banală) 2. Dacă $m\neq n$, avem: 1) Metoda lui Gauss, care constă în eliminarea, prin transformări elementare, a necunoscutelor x_1 (din a doua, a treia, ..., a $m-$a ecuație), x_2 (din a treia, a patra ...), etc.

Noțiunea	Formă generală. Scriere matriceală	Existența soluțiilor. Determinarea soluțiilor
	$\overline{A}=\begin{pmatrix} b_1 \\ A \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ (*matricea exstinsă a sistemului*)	Dacă într-o ecuație a sistemului se obține o singură necunoscută, aceasta se determină și mergând în sus, în sistem, se obțin și celelalte necunoscute. 2) Metoda determinanților caracteristici utilizează calculul rangului matricei A. Dacă $rang(A)<rang(\overline{A})\Rightarrow$ s.incompatibil. Dacă $rang(A)=rang(\overline{A})\Rightarrow$ s.c. Se aleg: 1) Δ_p, determinantul principal; 2) ecuațiile principale; 3) necunoscutele principale și secundare. Dacă $r=n\Rightarrow$ s.c.d. Dacă $r<n\Rightarrow$ s.c. nedeterminat Se rezolvă sistemul format din ecuațiile principale în care necunoscutele secundare sunt variabile.

Probleme propuse

1. Scrieți sub formă matriceală sistemele:

1) $\begin{cases} 2x-4y=3 \\ -3x+y=-1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x+2y=0 \\ 3x-5y=4 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0 \\ 2x_1+x_2-3x_3=1 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=1 \\ -x_1+2x_2=-2 \\ 4x_1+x_2+2x_3=0 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=4 \\ x_2-3x_3=-1 \\ 4x_1+x_2=0 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} x_2-3x_3=0 \\ 4x_1+x_3=0 \\ -x_1+3x_2=0 \end{cases}$.

2. Scrieți sistemul de ecuații liniare asociat fiecărei matrice extinsă:

1) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{array}\right)$; 2) $\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \end{array}\right)$; 3) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$; 4) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ -2 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right)$; 5) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$;

6) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$; 7) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & 5 & 1 & 3 \end{array}\right)$; 8) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$.

3. În exercițiile de mai jos completați elementele lipsă din matricea extinsă în urma transformărilor indicate:

1) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 9 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \xleftrightarrow{\frac{1}{3}L_1} \left(\begin{array}{cc|c} \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \xleftrightarrow{L_2-2L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right) \longleftrightarrow$

$\xleftrightarrow{-\frac{1}{5}L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right) \xleftrightarrow{L_1-3L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

2) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & -10 \end{array}\right) \xleftrightarrow[L_3-2L_1]{L_2-3L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right) \xleftrightarrow{-L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -9 & -1 & -16 \end{array}\right) \longleftrightarrow$

$$\xleftarrow[L_3+9L_2]{L_1-3L_2}\left(\begin{array}{ccc|c}\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&1&0&2\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{array}\right)\xleftarrow[-L_3]{L_1+L_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-1\\0&1&0&2\\0&0&1&-2\end{array}\right).$$

3) $\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&3&-4\\1&2&1&7\\1&-2&0&-1\end{array}\right)\xleftarrow{L_1\leftrightarrow L_2}\left(\begin{array}{ccc|c}\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\1&-2&0&-1\end{array}\right)\xleftarrow{L_3-L_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&7\\0&1&3&-4\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{array}\right)\longleftarrow$

$$\xleftarrow[L_3+4L_2]{L_1+\frac{1}{2}L_3}\left(\begin{array}{ccc|c}\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&1&3&-4\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{array}\right)\xleftarrow[-L_3]{\frac{1}{11}L_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac{1}{2}&3\\0&1&3&-4\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{array}\right)\xleftarrow[L_2-3L_3]{L_1-\frac{1}{2}L_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&45/11\\0&1&0&28/11\\0&0&1&-24/11\end{array}\right).$$

4. Să se scrie sistemul de ecuații liniare pentru fiecare din matricele extinse de la exercițiul 3 și utilizând rezultatele obținute determinați soluția fiecărui sistem.

5. Utilizând metoda matriceală să se rezolve sistemele:

1) a) $\begin{cases}2x+3y=5\\-x+4y=3\end{cases}$; b) $\begin{cases}18x-30y=-1\\-2x+6y=1\end{cases}$; c) $\begin{cases}3x-2y=0\\5x+4y=2\end{cases}$; d) $\begin{cases}x-y-z=0\\x+4y-2z=16\\x-2y+2z=-6\end{cases}$;

e) $\begin{cases}x+y+2z=-1\\2x-y+2z=-4\\4x+y+4z=-2\end{cases}$; f) $\begin{cases}2x+y-z=1\\x-y+z=2\\4x+3y+z=3\end{cases}$; g) $\begin{cases}x-2y+z=1\\x-y+z=-1\\2x+4y-z=4\end{cases}$.

2) după valorile parametrului real m:

a) $\begin{cases}mx+2y=-1\\2x+my=-1\end{cases}$; b) $\begin{cases}(1+m)x+(1+m)y=2m\\x+my=2+m\end{cases}$; c) $\begin{cases}mx+y+z=1\\x+my+z=2\\x+y+mz=3\end{cases}$;

d) $\begin{cases}mx+y+z=1\\x-my-z=1\\x+y+mz=1\end{cases}$; e) $\begin{cases}x-my+z=1\\x-y+z=-1\\mx+m^2y-z=m^2\end{cases}$; f) $\begin{cases}mx+y+2z=0\\x+my+z=0\\2x+2y+mz=0\end{cases}$.

6. Să se rezolve sistemele de mai jos utilizând regula lui Cramer:

1) I. a) $\begin{cases}3x-y=-2\\2x+3y=5\end{cases}$; b) $\begin{cases}x+4y=1\\2x-y=3\end{cases}$; c) $\begin{cases}x+3y=0\\2x-y=0\end{cases}$; d) $\begin{cases}3x-y+z=0\\-2x+y+3z=-7\\x+2y-2z=7\end{cases}$;

e) $\begin{cases}2x-y-z=4\\3x+4y-2z=11\\3x-2y+4z=11\end{cases}$; f) $\begin{cases}x_1+2x_2-6x_3=6\\x_2-4x_3=2\\2x_3=1\end{cases}$; g) $\begin{cases}x_1-x_2+3x_3=2\\3x_1+2x_2-x_3=1\\3x_2-3x_3=5\end{cases}$; h) $\begin{cases}x+y+z+t=2\\2y+2z+t=2\\-2x+2y-t=2\\3x+y+t=3\end{cases}$.

II. a) $\begin{cases}\frac{7}{\sqrt{x-7}}-\frac{4}{\sqrt{y+6}}=\frac{5}{3}\\\frac{5}{\sqrt{x-7}}+\frac{3}{\sqrt{y+6}}=\frac{13}{6}\end{cases}$; b) $\begin{cases}3xy/(x+y)=5\\2xz/(x+z)=3\\yz/(y+z)=4\end{cases}$; c) $\begin{cases}15x-8xy+2y=0\\3xz-2z+5x=0\\2yz-16y+2z=0\end{cases}$.

2) în funcție de parametrul real m:

a) $\begin{cases}x-y=3\\mx+2y=-1\end{cases}$; b) $\begin{cases}mx+y=0\\x+my=1\end{cases}$; c) $\begin{cases}mx+y+z=1\\x-my-z=1\\x+y+mz=1\end{cases}$; d) $\begin{cases}x+my-z=1\\-x-y-mz=-1\\x+y-z=1\end{cases}$.

7. Să se determine ecuația dreptei (d): $y=ax+b$ dacă trece prin punctele A, B în cazurile:

a) $A(-3,0)$, $B(0,2)$; b) $A(0,0)$, $B(4,-3)$, c) $A(-2,3)$, $B(1,4)$,

8. Determinați punctele de intersecție ale dreptelor (d_1), (d_2) în cazurile:

a) (d_1): $3x-4y-29=0$, (d_2): $2x+5y+19=0$; b) (d_1): $8x+3y+1=0$, (d_2): $3x+2y+3=0$.

9. Laturile $[AB]$, $[BC]$ și $[AC]$ ale unui triunghi ABC sunt date respectiv prin ecuațiile: $4x+3y-5=0$, $x-3y+10=0$, $x-2=0$. Determinați coordonatele vârfurilor.

10. Să se determine parametrul real m astfel încât dreptele de ecuații $x-2y=1$, $2x+my=2$ să fie concurente.

11. Să se determine funcția de gradul al doilea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$, dacă graficul acesteia conține punctele $A(-2,11)$, $B(1,-4)$, $C(3,6)$.

12. 1) Arătați că următorii vectori $\{e_1,e_2\}$ din $\mathbb{R}^2$ sunt liniare independenți (adică dacă $\alpha_1e_1+\alpha_2e_2=0\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=0$) și apoi exprimați vectorul u din $\mathbb{R}^2$ în funcție de e_1 și e_2 (găsiți $x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât $u=xe_1+ye_2$) pentru fiecare caz în parte:

a) $e_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$; $e_2=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$; $u=\begin{pmatrix}5\\-9\end{pmatrix}$; b) $e_1=\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$; $e_2=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$; $u=\begin{pmatrix}10\\12\end{pmatrix}$.

2) Aceleași cerințe ca și la 1), dar pentru vectorii $\{e_1,e_2,e_3\}$ din $\mathbb{R}^3$ în cazurile:

a) $e_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$; $e_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$; $e_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; $u=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$; b) $e_1=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$; $e_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$; $e_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$; $u=\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\end{pmatrix}$.

1) Dacă $A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-2\\0&2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-3&3\\0&0\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}0&0\\4&-3\end{pmatrix}$ $E=\begin{pmatrix}5&-6\\-7&8\end{pmatrix}$ arătați că:

a) din $\alpha A+\beta B+\gamma C+\delta D=0$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}\Rightarrow\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$;

b) există numerele reale x, y, z, t astfel încât $E=xA+yB+zC+tD$.

13. Să se determine numerele reale A, B, C, ... pentru care au loc (pe rând) egalitățile:

a) $\frac{x-4}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$, $x\neq 1,2$; b) $\frac{3x+1}{x(x^2-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+1}$, $x\neq\pm1,0$;

c) $\frac{-2x+5}{(x^2-1)(x^2-4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x+2}$, $x\neq\pm1,\pm2$;

d) $\frac{1-4x}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$, $x\neq 0$.

14. Să se determine parametrul real m astfel încât fiecare din sistemele de mai jos să aibă soluție unică.

a) $\begin{cases}(m+1)x+y=0\\3x+(m-1)y=1\end{cases}$; b) $\begin{cases}2x-my=3\\-x+18y=5\end{cases}$; c) $\begin{cases}mx+y+z=3\\x+y+z=2\\x+y+mz=1\end{cases}$; d) $\begin{cases}mx-2y+z=2\\2x+y-mz=5\\3x+2y-z=3\end{cases}$.

15. Să se determine parametrul real m astfel încât fiecare sistem să nu aibă soluție unică.

a) $\begin{cases}mx+y-z=1\\x+my-z=1\\-x+y+mz=1\end{cases}$; b) $\begin{cases}mx+2y+2z=0\\mx+my+z=0\\x+my+z=0\end{cases}$; c) $\begin{cases}mx+y+z=0\\x+my+z=0\\x+y+mz=0\end{cases}$.

16. Utilizând metoda lui Gauss să se rezolve sistemele liniare:

a) $\begin{cases} x+3y=14 \\ 2x-5y=-16 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x-2y=24 \\ 5x-3y=39 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+2y-2z=-2 \\ 5x+9y-4z=-3 \\ 3x+4y-5z=-3 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 3x+7y-7z=-4 \\ x+2y-3z=0 \\ 5x+6y+z=-8 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x+\ldots-4z=-9 \\ 2x-y-z=10 \\ 3x+2y-5z=1 \end{cases}$; f) $\begin{cases} x+2y-3z=-2 \\ 3x-y-2z=1 \\ 2x+3y-5z=-3 \end{cases}$; g) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x-y-z=4 \\ x+5y+5z=-1 \end{cases}$; h) $\begin{cases} x+2y=4 \\ x-2y=0 \\ 4x+3y=12 \end{cases}$;

i) $\begin{cases} -x_3+x_4=2 \\ x_1-2x_2+4x_3+3x_4=4 \\ 3x_1-6x_2+8x_3+5x_4=0 \end{cases}$; j) $\begin{cases} x-2y=2 \\ 7x-14y=14 \\ 3x-6y=6 \end{cases}$; k) $\begin{cases} x-3y+z-t=0 \\ 2x+y-z+2t=0 \end{cases}$; l) $\begin{cases} x-2y+z+t=1 \\ x-2y+z-t=-1 \\ x-2y+z+t=5 \end{cases}$.

17. 1) Să se determine rangul matricelor de mai jos:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 7 & -6 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2) Să se discute rangul matricelor după valorile parametrului real m:

a) $\begin{pmatrix} 1 & m \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & m \\ 2 & m & 2 \\ m & -1 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & m \\ m & 1 & 2 & -1 \\ m & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & m \end{pmatrix}$.

3) Să se determine parametrul real m astfel încât matricea A să aibă rangul indicat, $\forall x \in \mathbb{R}$

a) $A=\begin{pmatrix} x & 3 & 1 \\ m & x & x \\ m & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $rang(A)=3$; b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & -1 \\ m & x & 1 \end{pmatrix}$, $rang(A)=3$.

18. Să se rezolve sistemele compatibile simplu nedeterminate:

a) $\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 5x-3y+z=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x+\ldots y-2z=0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x-y+3z=4 \\ 3x+4y-z=-5 \\ x+5y-4z=-9 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x+5y-3z=3 \\ 5x+12y-8z=9 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x+2y+2z-t=0 \\ 2x+3z-2t=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$; f) $\begin{cases} 2x+3y-z+t=3 \\ -x-2y+z-3t=5 \\ x+y-4t=8 \end{cases}$; g) $\begin{cases} 2x+y-2z=-1 \\ -2x+3y-z=0 \\ 4x-2y-z=-1 \end{cases}$.

19. Să se rezolve sistemele compatibile dublu nedeterminate:

a) $\begin{cases} x-3y+z-t=0 \\ 2x+y-z+2t=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x+2y+5z+4t=-1 \\ 2x+y+3z+3t=0 \\ x+2y+3z=-3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x+3y+z+2t=0 \\ 3x+5y-2z+3t=0 \\ x+2y-3z+t=0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x+2y+3z+4t=1 \\ 2x+3y+4z+5t=1 \\ 3x+4y+5z+6t=1 \\ 4x+5y+6z+7t=1 \end{cases}$; e) $\begin{cases} 2x-3y+4z-5t=-1 \\ x+9y+2z+t=3 \\ 5x-6y+10z-12t=-2 \end{cases}$.

20. Să se arate că următoarele sisteme liniare sunt incompatibile:

a) $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 3x+3y-z=2 \\ 2x+4y=3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+5y+4z-13t=3 \\ 3x-y+2z+5t=2 \\ 2x+2y+3z-4t=1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+y-3z=-1 \\ 2x+y-2z=1 \\ x+y+z=3 \\ x+2y-3z=1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x+y-z=3 \\ 3x-2y+z=2 \\ 4x-2y+z=3 \\ x+y+z=6 \\ x+3y-2z=1 \end{cases}$.

21. Să se rezolve sistemele liniare omogene:

a) $\begin{cases} 2x-3y+3z=0 \\ 3x-4y+5z=0 \\ 5x+y+2z=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 4x+y-2z=0 \\ x-2y+z=0 \\ 11x-4y-z=0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 4x+8y+4z=0 \\ 5x+10y+5z=0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x+5y+z+7t=0 \\ 5x+13y+z-13t=0 \\ 2x+7y+z+2t=0 \end{cases}$.

22. Să se rezolve și să se discute sistemele (după valorile parametrului real m):

a) $\begin{cases} x+my+4z=1 \\ 3x-y+5z=-4 \\ mx-5y-z=-5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x-my-z=0 \\ x+y+mz=1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+my-z=1 \\ -x-y-mz=-1 \\ x+y-z=0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x-my+z=1 \\ x-y+z=-1 \\ x-m^2y-z=m^2 \end{cases}$.

23. Să se rezolve și discute sistemele (după valorile parametrilor reali m, n):

a) $\begin{cases} mx+2y+2z=1 \\ mx+3y+2z=1 \\ mx+2y+5z=2n-1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} mx+y+z=4 \\ (m+1)x+(n+1)y+2z=7 \\ x+2ny+z=4 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+y+z=n \\ x+my+z=1 \\ nx+y+z=1 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} nx+y+z=4 \\ x+my+z=3 \\ x+2my+z=4 \end{cases}$; e) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+my+nz=1 \\ x+m^2y+n^2z=1 \end{cases}$.

24. Fie sistemul (S): $\begin{cases} 2x-3y+4z-5u=-1 \\ x+9y+az+u=3 \\ 5x-6y+10z+bu=c \end{cases}$. Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât (S) să aibă rangul doi și să fie compatibil. Să se rezolve apoi sistemul (S).

25. Să se determine parametrul real m pentru care sistemul $\begin{cases} 2x+2y+mz=1 \\ 2x+my+2z=1 \\ mx-y+z=-1 \end{cases}$ este compatibil simplu nedeterminat și să se rezolve.

26. Să se determine parametrii reali m și n pentru care sistemul $\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+my+z=n \\ x+y+mz=n^2 \end{cases}$ este compatibil dublu nedeterminat și rezolvați sistemul în acest caz.

27. Se consideră sistemul $\begin{cases} mx+y=0 \\ x+my=0 \\ mx+y+z=0 \end{cases}$.

a) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul admite numai soluția banală.

b) Pentru $m=1$ determinați soluția sistemului.

28. Să se determine $m, n, p \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases} x+y+z=1 \\ mx+ny+pz=2 \\ m^2x+n^2y+p^2z=4 \end{cases}$

să fie compatibil dublu nedeterminat.

29. Să se determine ecuația:

a) dreptei $(d): y=ax+b$, dacă trece prin punctele $A(-1,2)$, $B(3,5)$;

b) parabolei $(p): y=ax^2+bx+c$, dacă trece prin punctele $A(0,0)$, $B(-2,4)$, $C(2,4)$.

30. În figura alăturată este indicat traficul dintr-o anumită, zonă a unui oraș. Săgețile indică direcția de deplasare a mașinilor. Numerele indicate pe figură reprezintă numărul de mașini care intră sau ies din intersecție. La fiecare din cele patru intersecții se află semafoare care dirijează circulația. Pentru a evita blocajele, toate mașinile care intră într-o intersecție trebuie să o părăsească.

a) Să se determine x_1, x_2, x_3, x_4.

b) Pentru $x_4 = 300$, determinați x_1, x_2, x_3.

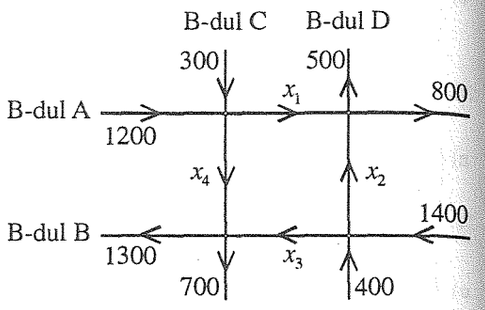


Fig.7

31. Numărul $\overline{abc}$ are suma cifrelor 19. Cifra zecilor este cu patru mai mică decât dublul cifrei sutelor. Numărul se micșorează cu 99 când cifrele sunt scrise invers. Determinați numărul.

32. Un teatru cu o capacitate de 300 de locuri a vândut la un spectacol toate biletele. Un bilet pentru copii costă 2 €, pentru studenți 3 €, iar pentru adulți 4 €. Se știe că numărul adulților a fost jumătate din numărul copiilor și studenților, iar la acea reprezentație s-au încasat 900 €. Determinați numărul spectatorilor din fiecare categorie.

33. O fabrică de mobilă produce două tipuri de mese A și B. Fiecare masă trece prin două etape: asamblare și finisare. Capacitatea maximă a fabricii pentru asamblare este de 195 ore și pentru finisare de 165 ore. Pentru fiecare masă A sunt necesare 4 ore la asamblare și 3 ore la finisare, iar pentru masa B o oră la asamblare și 2 ore la finisare. Determinați numărul de mese de fiecare tip care pot fi produse utilizând la maxim capacitatea fabricii.

34. Benzenul lichid arde în atmosferă. Dacă un obiect rece este pus peste benzen, atunci apa va condensa pe obiect și se va depozita pe el negru de fum (carbon). Ecuația chimică pentru reacție este de forma:

$x_1C_6H_6 + x_2O_2 \to x_3C + x_4H_2O$. Determinați x_1, x_2, x_3, x_4 pentru a obține balanța ecuației.

35. Determinați intensitățile curenților din rețelele de mai jos:

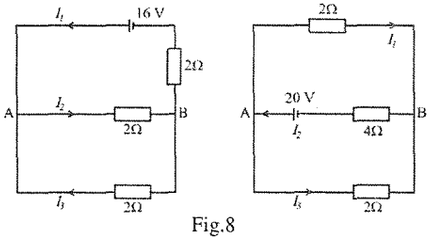


Fig.8

Teste de evaluare

Testul 1 (1 punct din oficiu)

1. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x-y+5z-t=0 \\ x+y-2z+3t=0 \\ 3x-y+8z+t=0 \\ x+3y-9z+7t=0 \end{cases}$. (2 puncte)

2. Pentru $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ să se discute rangul matricei $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 2 & 1 \\ \alpha & 1-2\beta & 3 & 1 \\ \alpha & -\beta & 3+\beta & 2\beta-1 \end{pmatrix}$. (2 puncte)

3. Fie sistemul de ecuații $\begin{cases} 3x+y-z=ax \\ -x+y+z=ay \\ 2x+4y+z=az \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$.

Să se determine suma S a valorilor lui a pentru care sistemul admite soluții diferite de cea banală. (3 puncte).

4. Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ y+z+t=0 \\ z+t=0 \end{cases}$.

a)Determinați matricea A a sistemului și precizați $rang(A)$;

b)Rezolvați sistemul;

c)Arătați că ecuația $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ are o infinitate de soluții. (2 puncte)

Testul 2 (1 punct din oficiu)

1. Să se determine parametrii a, b astfel încât sistemul $\begin{cases} 2x+y-az=-1 \\ -2x+3y+(1-a)z=0 \\ 2ax-2y+bz=b \end{cases}$ să fie compatibil nedeterminat. (2 puncte)

2. Să se discute rangul matricii $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & \beta \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & \alpha & 5 & -3 \end{pmatrix}$ după $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (2 puncte)

3. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & a-2 \\ 3a & a+1 & -2 \\ 2a+3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $A^{-1} = A^*$, A^* este adjuncta matricei A. (3 puncte).

4. Să se rezolve ecuația matriceală $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 12 & -6 & -9 \end{pmatrix}$. (2 puncte)

Testul 3 (1 punct din oficiu)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x-3y+4z-5t=-1 \\ x+9y+az-t=3 \\ 5x-6y+10z+bt=c \end{cases}$. Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât matricea sistemului să aibă rangul doi şi sistemul să fie compatibil. (3 puncte)

2. Să se discute rangul matricei $A=\begin{pmatrix} 7-m & -12 & 6 \\ 10 & -19-m & 10 \\ 12 & -24 & 13-m \end{pmatrix}$ după valorile parametrului real m. (2 puncte)

3. Fie triunghiul ABC, unde $(AB)\colon x-2y+3=0$, $(BC)\colon 3x+2y+1=0$, $(AC)\colon 2x-y-3=0$. Să se determine coordonatele vârfurilor A, B, C. (2 puncte)

4. Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Să se determine $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $AX=XA$.(2 puncte)

Testul 4 (1 punct din oficiu)

1. Pentru $a,b\in\mathbb{R}$ să se discute sistemul $\begin{cases} ax+by+2z=1 \\ ax+(2b-1)y+3z=1 \\ ax+by+(b+3)z=2b-1 \end{cases}$ (3 puncte)

2. Pentru ce valori p şi q matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & p \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & p & 4 \\ 3 & -1 & 1 & q \end{pmatrix}$, au ambele rangul doi ? (2 puncte)

3. Să se rezolve ecuaţia matriceală $X-\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}X\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. (2 puncte)

4. Să se determine $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ astfel încât $\alpha\sin x+\beta\sin 2x+\gamma\sin 3x=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. (2 puncte)

Testul 5 (tip grilă) (1 punct din oficiu)

1. Sistemul $\begin{cases} mx+y-2z=2 \\ 2x+y+3z=1 \\ (2m-1)x+2y+z=n \end{cases}$, $m,n\in\mathbb{R}$ este incompatibil dacă: a) $m=3$, $n\neq 3$; b) $m=1$, $n\neq 2$; c) $m=2$, $n\neq -1$; d) $m=3$, $n\neq -3$; e) $m\neq 1$, $n=2$. (3 puncte)

2 .Matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \beta \end{pmatrix}$ are rangul doi pentru: a) $\alpha=2$, $\beta=1$; b) $\alpha=1$, $\beta=2$; c) $\alpha=\beta=1$; d) $\alpha=-1$, $\beta=2$; e) $\alpha=\beta=-1$ (2 puncte)

3 . Se consideră sistemul cartezian de coordonate xOy şi punctele $A(3,0)$, $B(0,2)$, $M(3,-3)$, respectiv $N(-2,2)$. Dreptele AN, BM şi perpendiculara din O pe AB sunt: a) paralele; b) concurente; c) $AN\parallel BM$ şi AN intersectează perpendiculara din O pe AB. (2 puncte)

4 .Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul $2x+y=8, x-y=1, 5x+4y=m$ să fie compatibil: a) - 28; b)34;c) 14; d) - 17; e) 23. (2 puncte)

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

1. MULȚIMEA NUMERELOR REALE

Este prezentată definiția axiomatică a mulțimii numerelor reale prin cele trei grupe de axiome: pentru structura algebrică, pentru structura de ordine și pentru completitudinea lui $\mathbb{R}$.

Istoric. Construcția riguroasă a acestei mulțimi a fost realizată, prin diferite metode, de matematicienii germani: 1) Cantor (1845-1918) 1869, 2) Dedekind (1831-1916) 1872 și 3) Weierstrass (1815-1897). Peano (1889) (matematician italian 1858-1932) a definit mulțimea numerelor naturale ca fiind o mulțime ce satisface anumite axiome.

Plecând de la aceste axiome, matematicianul german E. Landau definește riguros și fără lacune toate proprietățile algebrice și de ordine pe $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ și $\mathbb{R}$.

- **Definirea axiomatică a mulțimii numerelor reale 167**
- **Marginile unei mulțimi nemărginite. Dreapta reală încheiată $(\overline{\mathbb{R}})$ 175**
- **Funcții mărginite. Funcții nemărginite 177**
- **Axa reală 177**
- **Intervale 177**
- **Noțiunea de vecinătate 179**
- **Punct de acumulare. Punct izolat.....181**
- **Funcții elementare 182**
- **Probleme propuse 196**

1.1. DEFINIȚIA AXIOMATICĂ A MULȚIMII NUMERELOR REALE

Am studiat în anii precedenți principalele mulțimi de numere ($\mathbb{N}$ = mulțimea numerelor naturale, $\mathbb{Z}$ = mulțimea numerelor întregi, $\mathbb{Q}$ = mulțimea numerelor raționale, $\mathbb{R}$ = mulțimea numerelor reale), indicând pentru fiecare mulțime cele două structuri:

1) structura algebrică, dată de cele două operații, adunarea și înmulțirea și

2) structura de ordine, dată de relația de ordine "$\leq$" (mai mic sau egal). Totodată am evidențiat corespondența între aceste mulțimi și punctele unei axe (o dreaptă pe care am fixat o origine, o unitate de măsură și un sens pozitiv de parcurgere). Am explicat necesitatea extinderii, din rațiuni practice și teoretice, mulțimilor $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$. S-a ajuns în final la $\mathbb{R}$, mulțimea numerelor reale, ca fiind

reuniunea dintre mulțimea numerelor raționale și mulțimea numerelor iraționale. Un număr real este o fracție zecimală periodică (număr rațional) sau fracție zecimală neperiodică (număr irațional). Așadar, un număr real este o fracție zecimală finită sau infinită de forma $\pm x_0, x_1 x_2 x_3 \ldots$ unde $x_0 \in \mathbb{N}, x_1, x_2, x_3, \ldots$ fiind cifre de la 0 la 9.

1. Structura algebrică a mulțimii $\mathbb{R}$

Este dată de operațiile de **adunare** $+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \to x + y$ (suma dintre x și y) și **înmulțire** $\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \to x \cdot y$ (produsul dintre x și y; în loc de $x \cdot y$ vom scrie simplu xy).

Pentru adunare avem axiomele:

A1. Adunarea este asociativă: $(x+y)+z = x+(y+z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

A2. Adunarea este comutativă: $x + y = y + x, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

A3. Numărul real 0(zero) **este element neutru față de adunare**: $x + 0 = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

A4. Orice $x \in \mathbb{R}$ **are un opus**, $x' = -x$ astfel încât: $x + (-x) = 0$.

Pentru înmulțire avem axiomele:

I1. Înmulțirea este asociativă: $(xy)z = x(yz), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

I2. Înmulțirea este comutativă: $xy = yx, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

I3. Numărul real 1(unu) **este element neutru față de înmulțire**: $x \cdot 1 = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

I4. Orice $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ **are un invers**, $x' = \frac{1}{x}$ astfel încât: $x\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

Legătura între cele două operații este dată de axioma:

D. Distributivitatea înmulțirii în raport cu adunarea:

$x(y+z) = xy + xz, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

Mulțimea $\mathbb{R}$ împreună cu operațiile de adunare și înmulțire și axiomele $A1 - A4$, $I1 - I4, D$ spunem că formează un **corp comutativ**.

2. Structura de ordine a mulțimii $\mathbb{R}$

Date fiind două numere reale x, y, atunci între ele există una din relațiile: $x < y$, $x = y, x > y$. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ definim relația "$\leq$" (mai mic sau egal) astfel

$x \leq y \Leftrightarrow (x < y \text{ sau } x = y)$.

Au loc următoarele axiome de ordine:

O1. Relația "$\leq$" **este reflexivă**: $x \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$.

O2. Relația "$\leq$" **este antisimetrică**: $x \leq y$ și $y \leq x \Rightarrow x = y$.

O3. Relația "$\leq$" **este tranzitivă**: $x \leq y$ și $y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

O4. Relația "$\leq$" **este relație de ordine totală**: $x \leq y$ sau $y \leq x, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

O5. Relația "$\leq$" **este compatibilă cu operația de adunare**: dacă $x \leq y$, atunci $x + z \leq y + z, \forall z \in \mathbb{R}$.

O6. Relația "$\leq$" **este compatibilă cu operația de înmulțire**: dacă $x \leq y$ și $0 \leq z$, atunci $xz \leq yz$.

Observații. 1) O relație care are proprietățile $O_1 - O_3$ se numește **relație de ordine**. Spunem că $\mathbb{R}$ **este ordonată** de această relație.

2) O relație care satisface axiomele $O_1 - O_4$ se numește **relație de ordine totală**, iar despre mulțimea $\mathbb{R}$ spunem că este o **mulțime total ordonată** de relația "$\leq$".

3) Axiomele O_5, O_6 arată legătura între cele două structuri de pe $\mathbb{R}$, cea algebrică și cea de ordine.

4) Dacă pentru $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ au loc axiomele $A_1 - A_4, I_1 - I_4, D, O_1 - O_6$, atunci spunem că $\mathbb{R}$ **este un corp comutativ total ordonat**.

5) În fapt este ușor de văzut că dacă în locul lui $\mathbb{R}$ se pune $\mathbb{Q}$, axiomele de mai sus au loc. Am văzut că $\sqrt{2}$ nu poate fi reprezentat ca număr rațional (sub formă de fracție $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$). Deci $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Această observație arată necesitatea unei proprietăți suplimentare care să caracterizeze mulțimea numerelor reale, care să diferențieze mulțimea $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$. Proprietatea esențială a mulțimii $\mathbb{R}$, care nu se verifică în mulțimea $\mathbb{Q}$, o constituie următoarea axiomă:

3. Axioma de completitudine (Cantor-Dedekind)

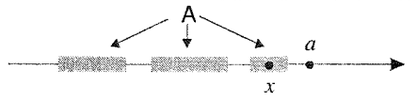
Pentru a enunța această axiomă avem nevoie de definirea unor concepte noi, deosebit de importante.

Marginile unei mulțimi

Definiții. Fie $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$.

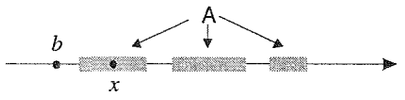
1) Mulțimea A se spune că este **majorată** (sau **mărginită superior**) dacă există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \leq a, \forall x \in A$. Numărul a se numește **majorant** pentru mulțimea A.

Reprezentarea pe axă



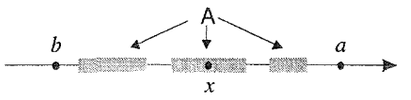
2) Mulțimea A se spune că este **minorată** (sau **mărginită inferior**) dacă există $b \in \mathbb{R}$ astfel încât $b \le x, \forall x \in A$. Numărul b se numește **minorant** pentru mulțimea A.

Reprezentarea pe axă

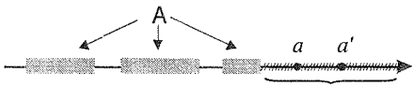


3) Mulțimea A se numește **mărginită** dacă este atât **minorată** cât și **majorată**, adică dacă există numerele reale a,b astfel încât $b \le x \le a, \forall x \in A$

Reprezentarea pe axă

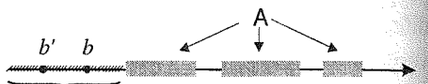


Observații. 1) Dacă a este un majorant pentru mulțimea A, iar $a' \ge a$, atunci a' este, de asemenea, un majorant pentru A (Fig. 1).



majoranții lui A

Fig. 1



minoranții lui A

Fig. 2

Dacă b este un minorant pentru mulțimea A, iar $b' \le b$, atunci b' este minorant pentru A (Fig. 2).

Exemple. 1) $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, a_1 < a_2 < ... < a_n$. **Atunci orice $a \ge a_n$ este majorant pentru A, iar orice $b \le a_1$ este un minorant pentru A. Deci A este mărginită.**

2) $A = [0,1)$. Orice $a \ge 1$ este un majorant pentru A și orice $b \le 0$ este un minorant pentru A. Deci A este mărginită.

3) $A = \mathbb{N}$. Orice $b \le 0$ este un minorant pentru A. Nici un element $a \in \mathbb{R}$ nu este majorant pentru A. Deci A este minorată, dar nu este majorată. Prin urmare, A nu este mărginită.

4) $A = \mathbb{Z}$. Nu are nici minoranți, nici majoranți. Evident, A nu este mărginită.

2) Un majorant poate să aparțină sau nu mulțimii A. Dacă el aparține lui A, atunci **el este cel mai mare element al mulțimii** A și îl notăm cu **max A**.

Un minorant al lui A poate să fie sau nu element al mulțimii A. În cazul în care este element al lui A, **el este cel mai mic element al mulțimii** A, în sensul relației de ordine, și se notează cu **min A**.

Exemple. 1) $A = \{-5, -3, 0, 1, 6, 9\}$. **Orice număr cel mult egal cu -5 este minorant pentru A și orice număr cel puțin egal cu 9 este un majorant pentru A. Cum $-5, 9 \in A$, rezultă $\min A = -5, \max A = 9$.**

2) $A = (0,1)$. Orice număr ≤ 0 este un minorant pentru A și orice număr ≥ 1 este un majorant pentru A. Deoarece $0 \notin A$, nu există $\min A$. Analog din $1 \notin A$, deducem că nu există $\max A$.

3) $A = [0,1)$. Aici $0 \in A$ și deci $\min A = 0$. Nu există $\max A$, deoarece $1 \notin A$.

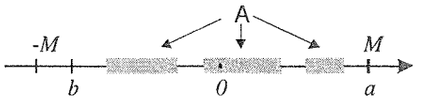
4) $A = [0,1]$. Cel mai mic element al lui A este 0 și deci $\min A = 0$, iar cel mai mare element din A este 1, adică $\max A = 1$.

Pentru mulțimile mărginite din $\mathbb{R}$ are loc următoarea:

Teoremă. Fie $A \subset \mathbb{R}$. Mulțimea A este mărginită dacă și numai dacă există $M > 0$ astfel încât: $|x| \le M, \forall x \in A$.

A este mărginită $\Leftrightarrow \exists M > 0$, astfel încât $|x| \le M, \forall x \in A$.

Reprezentarea grafică



Demonstrație. "$\Rightarrow$" Dacă A este mărginită, atunci există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $b \le x \le a, \forall x \in A$. Notăm $M = \max(|a|, |b|)$ pentru care $|x| \le M, \forall x \in A$.

"$\Leftarrow$" Evident. ■

Observație. Arătați că dacă $A, B \subset \mathbb{R}$ sunt mulțimi mărginite, atunci $A \cup B, A \cap B, A - B$ sunt de asemenea, mulțimi mărginite.

Definiție. Fie $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$.

1) Mulțimea A se numește **nemărginită superior**, dacă nu are nici un majorant.

2) Mulțimea A se numește **nemărginită inferior**, dacă nu are nici un minorant.

Exemple. 1) $A = \mathbb{N}$ **este nemărginită superior.** 2) $A = \mathbb{Z}, A = \mathbb{Q}$ **sau** $A = \mathbb{R}$ **este nemărginită inferior și superior.**

Supremum şi infimum

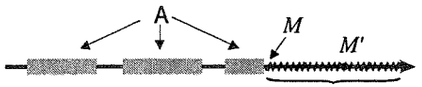
Fie $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$.

Definiţie. Dacă A este o mulţime majorată, atunci numărul $M \in \mathbb{R}$ se numeşte **margine superioară** (sau **supremum**) a mulţimii A dacă satisface condiţiile:

1) M este un majorant pentru A (adică $x \leq M, \forall x \in A$);

2) Dacă M' este un majorant pentru A, atunci $M \leq M'$ (M este cel mai mic majorant al lui A).

Reprezentarea pe axă



majoranţii lui A

Se notează marginea superioară a mulţimii A prin $M = \sup A$ (citim: supremum de A). Este posibil ca sup A să aparţină sau nu lui A. Dacă $\sup A = M \in A$, atunci M este cel mai mare element al lui A şi deci $\sup A = \max A$.

Unicitatea marginii superioare. Presupunem, prin absurd, că există două supremumuri pentru A, M_1, M_2, cu $M_1 < M_2$. Atunci există $x \in A$ astfel încât $x \geq M_2 - \frac{M_2 - M_1}{2} = \frac{M_1 + M_2}{2} > M_1$, ceea ce contrazice definiţia lui M_1!

Exemple 1) $A = \{-2, 3, 0, 1, 2\}$. **În acest caz** $M = \sup A = 2 \in A$ **şi deci** $\max A = 2$.

2) $A = [0,1)$. **Aici** $\sup A = 1 \notin A$.

3) $A = [0,1]$. **Acum** $\sup A = 1 \in A$ **şi deci** $\max A = 1$.

4) $A = \mathbb{N}$. **În acest caz sup** A **nu există în** $\mathbb{R}$.

5) Se consideră mulţimea $A = \left\{ \frac{n+2}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$. **Să se arate că** $\sup A = 3$.

Verificăm cele două condiţii din definiţia precedentă. Arătăm mai întâi că 3 este un majorant al mulţimii A. **Deci trebuie probat că** $\frac{n+2}{n} \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$ **sau echivalent** $n+2 \leq 3n \Leftrightarrow n \geq 1$, **evident.**

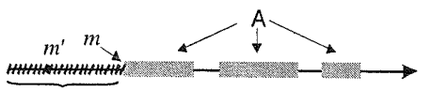
Să verificăm acum că 3 este cel mai mic majorant pentru A. **Fie, prin absurd,** $\alpha < 3$, **majorant pentru A. Deci** $\frac{n+2}{n} \leq \alpha, \forall n \in \mathbb{N}^*$. **De aici** $n \geq \frac{2}{\alpha - 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, **ceea ce este fals, deoarece pentru** $n = 1$ **se obţine** $\alpha \geq 3$!

Definiţie. Dacă A este o mulţime minorată, atunci numărul $m \in \mathbb{R}$ se numeşte **margine inferioară** (sau **infimum**) a mulţimii A dacă satisface condiţiile:

1') m este un minorant pentru A (adică $m \leq x, \forall x \in A$);

2') Dacă m' este un minorant pentru A, atunci $m' \leq m$ (m este cel mai mare minorant al lui A).

Reprezentarea pe axă



minoranţii lui A

Notăm marginea inferioară a lui A prin $m = \mathbf{inf}\ A$ (citim: infimum de A).

Marginea inferioară a lui A este posibil să aparţină sau nu lui A. Dacă $\inf A = m \in A$, atunci m este cel mai mic element al lui A şi deci $m = \min A$.

Unicitatea marginii inferioare. Dacă m_1, m_2 sunt margini inferioare pentru A, atunci arătăm că $m_1 < m_2$ sau $m_2 < m_1$ sunt situaţii imposibile. Rămâne atunci $m_1 = m_2$. Presupunem că $m_1 < m_2$. Atunci din ipoteză m_1 este cel mai mare minorant şi deci m_2 nu mai poate fi inf A. Analog se arată că nu putem avea $m_2 < m_1$.

Exemple 1) $A = \{-5, -1, 0, 3, 8\}$. **Avem:** $\inf A = -5 \in A$ **şi deci** $\min A = -5$.

2) $A = (0,1)$. **În acest caz** $\inf A = 0 \notin A$. **Nu există** $\min A$.

3) $A = [0,1)$. **Aici** $\inf A = 0 \in A$ **şi deci** $\min A = 0$.

4) $A = \mathbb{Z}$. **În acest caz** $\inf A$ **nu există în** $\mathbb{R}$.

5) Fie $A = \left\{ \frac{n+2}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$. **Arătaţi că** $\inf A = 1$.

Verificăm cele două condiţii din definiţia marginii inferioare a unei mulţimi. Arătăm că 1 este minorant pentru mulţimea A. Avem $1 \leq \frac{n+2}{n} \Leftrightarrow n \leq n+2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, **ceea ce-i adevărat.**

Probăm că 1 este cel mai mare minorant pentru A. **Fie, prin absurd,** $\beta > 1$ **un minorant pentru** A. **Deci** $\beta \leq \frac{n+2}{n} \Leftrightarrow n(\beta - 1) \leq 2 \Leftrightarrow n \leq \frac{2}{\beta - 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, **fals, deoarece** $\frac{2}{\beta - 1}$ **este un număr pozitiv real fixat, iar** $n \in \mathbb{N}^*$, **mulţime nemărginită superior.**

Cu aceste pregătiri putem enunţa:

Axioma de completitudine. (Cantor-Dedekind).
Orice mulţime nevidă, minorată, are o margine inferioară în $\mathbb{R}$.

Observații. 1) Proprietatea analoagă pentru marginea superioară poate fi dedusă din axioma de completitudine astfel:

Fie $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$, care este majorată. Atunci mulțimea $-A = \{-a \mid a \in A\}$ este minorată (!) și conform axiomei de completitudine rezultă că $m = \inf(-A)$ există în $\mathbb{R}$. Arătați că $-m = \sup A$.

2) Dacă la corpul ordonat $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ se adaugă și axioma de completitudine, atunci se spune că $\mathbb{R}$ este un **corp complet ordonat**.

3) Mulțimea $\mathbb{Q}$ este o mulțime cu „goluri" sau „găuri" (există numere iraționale între numere raționale) în timp ce în $\mathbb{R}$ ele nu există (se spune că $\mathbb{R}$ este continuă). Golurile pot fi supremumuri (sau infimumuri) de mulțimi nevide majorate (sau minorate) de numere raționale.

Fie mulțimile $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0, x^2 \leq 3\} = [0, \sqrt{3}] \cap \mathbb{Q}$,

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0, x^2 \leq 3\} = [0, \sqrt{3}]$. Se arată că $\sup A = \sup B = \sqrt{3}$, dar A ca submulțime a lui $\mathbb{Q}$ nu are margine superioară în $\mathbb{Q}$, în timp ce B ca submulțime a lui $\mathbb{R}$ are ca margine superioară pe $\sqrt{3}$.

4. Valoarea absolută a unui număr real

Reamintim următoarea:

Definiție. Se numește **valoarea absolută a numărului real** x, notată $|x|$ (citim: **modul de** x), numărul

$$|x| = \begin{cases} x, \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, \text{dacă } x < 0 \end{cases}.$$

Proprietăți ale valorii absolute:

1) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $|x| \geq 0$; $|x| = \sqrt{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

2) Fie $\varepsilon > 0$. Atunci:

$|x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon$; $|x| > \varepsilon \Leftrightarrow (x < -\varepsilon$ sau $x > \varepsilon)$;

$|x| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$; $|x| \geq \varepsilon \Leftrightarrow (x \leq -\varepsilon$ sau $x \geq \varepsilon)$.

3) $|xy| = |x||y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$ (**Modulul produsului este egal cu produsul modulelor**);

$|x^n| = |x|^n, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (**Modulul puterii este egal cu puterea modulului**);

4) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \forall x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$ (**Modulul câtului este egal cu câtul modulelor**);

5) $|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$ (**Inegalitatea triunghiului**).

În inegalitate avem egalitate dacă $xy \geq 0$.

Demonstrație. Temă.

1.2. MARGINILE UNEI MULȚIMI NEMĂRGINITE. DREAPTA REALĂ ÎNCHEIATĂ $(\overline{\mathbb{R}})$

Am văzut în paragrafele precedente că există submulțimi nevide ale lui $\mathbb{R}$ care nu sunt minorate (sau majorate). Acest fapt sugerează extinderea mulțimii $\mathbb{R}$ la o mulțime în care orice fel de submulțime să aibă o margine inferioară și o margine superioară.

Fie $A \subset \mathbb{R}$, o mulțime **nemărginită superior**, adică pentru orice $a \in \mathbb{R}$, există cel puțin un element $x \in A$ astfel încât $a < x$. Vom pune prin definiție $\sup A = +\infty$ (citim: plus infinit).

Dacă $A \subset \mathbb{R}$ este o mulțime **nemărginită inferior**, adică pentru orice $b \in \mathbb{R}$, există cel puțin un element $x \in A$ astfel încât $x < b$. Prin definiție punem $\inf A = -\infty$ (citim: minus infinit).

Mulțimea formată din $\mathbb{R}$ la care se adaugă simbolurile $+\infty$ (sau simplu ∞), $-\infty$ se notează cu $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ și se numește **dreapta reală încheiată**.

Numerele reale se numesc **numere finite**, iar simbolurile $-\infty$ și $+\infty$ se numesc **numere infinite**.

1. Aritmetica în $\overline{\mathbb{R}}$

Operațiile aritmetice de pe $\mathbb{R}$ se extind pe $\overline{\mathbb{R}}$ astfel:

1) $x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$, $x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty, \forall x \in \mathbb{R}$;

2) $x - (+\infty) = -\infty$, $x - (-\infty) = +\infty, \forall x \in \mathbb{R}$;

3) $x(+\infty) = \begin{cases} +\infty, \text{dacă } x > 0 \\ -\infty, \text{dacă } x < 0 \end{cases}$; $x(-\infty) = \begin{cases} -\infty, \text{dacă } x > 0 \\ +\infty, \text{dacă } x < 0 \end{cases}$;

4) $(+\infty)(+\infty) = +\infty$; $(-\infty)(-\infty) = +\infty$, $(-\infty)(+\infty) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$;

5) $\frac{x}{\pm\infty} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$; 6) $|\pm\infty| = +\infty$.

Nu se acordă nici un sens următoarelor operații

1) $\infty - \infty$; 2) $0(\pm\infty)$; 3) $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$; 4) $0^0, (\pm\infty)^0, 1^{\pm\infty}$.

2. Relația de ordine pe $\overline{\mathbb{R}}$

Relația de ordine de pe $\mathbb{R}$ se extinde la $\overline{\mathbb{R}}$ astfel:
1) $x<\infty, \forall x\in\mathbb{R}$; 2) $-\infty<x, \forall x\in\mathbb{R}$; 3) $-\infty<\infty$.
Deci $\overline{\mathbb{R}}$ are cel mai mic element $(-\infty)$ și cel mai mare element $(+\infty)$.

1.3. FUNCȚII MĂRGINITE. FUNCȚII NEMĂRGINITE

Fie $f:E\to\mathbb{R}, E\subseteq\mathbb{R}$. Dacă $A\subseteq E$, atunci am notat $f(A)=\{f(a)|a\in A\}$, mulțimea imaginilor elementelor din A prin f sau simplu, imaginea mulțimii A prin f. În particular, dacă $A=E$, atunci mulțimea $f(A)=f(E)$ am notat-o cu $\mathrm{Im}f$ (citim: imaginea lui f) și se numește **mulțimea de valori a funcției** f.

Exemple. **1) Fie funcția $f:\{-2,-1,0,1\}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2$. Atunci**
$f(\{-1\})=f(\{1\})=\{1\}$, $f(\{-1,0,1\})=\{f(-1),f(0),f(1)\}=\{0,1\}$,
$f(\{-2,-1,0,1\})=\{f(-2),f(-1),f(0),f(1)\}=\{0,1,4\}$.
2) Pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x$, avem $f([0,1])=[f(0),f(1)]=[0,3]$, $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

Formulăm următoarele:

Definiții.1) Funcția $f:E\to\mathbb{R}$ se numește **funcție mărginită**, dacă mulțimea $f(E)$ este mărginită.
2) Funcția $f:E\to\mathbb{R}$ se numește **funcție nemărginită**, dacă mulțimea $f(E)$ este nemărginită.

Observații. **1)** Deci f este **mărginită** $\Leftrightarrow \exists M>0$ astfel încât $|f(x)|\le M, \forall x\in E$.
2) Dacă $f:E\to\mathbb{R}$, atunci pentru marginea inferioară (respectiv superioară) a mulțimii $f(E)$ se folosește și notația $\inf\limits_{x\in E} f(x)$ (respectiv $\sup\limits_{x\in E} f(x)$).
3) Dacă $f,g:E\to\mathbb{R}$ sunt funcții mărginite, atunci $f\pm g, f\cdot g, \alpha f, \alpha\in\mathbb{R}$, sunt, de asemenea, funcții mărginite.
4) Graficul unei funcții mărginite superior se află sub dreapta $y=a$ (Fig.3).
Graficul unei funcții mărginite inferior se află deasupra dreptei $y=b$ (Fig.4).
Graficul unei funcții mărginite este cuprins între dreptele $y=b$, $y=a$ (Fig.5).

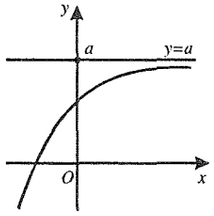


Fig. 3

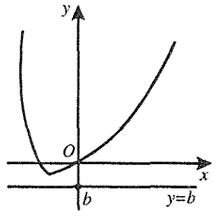


Fig. 4

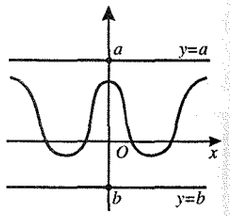


Fig. 5

Exemple. **1) $f:E\to\mathbb{R}$. Dacă E este finită, atunci $f(E)$ este mărginită.**
2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x$, este mărginită deoarece $\mathrm{Im}f=[-1,1]$, care este mulțime mărginită.
3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x$ este nemărginită, deoarece $\mathrm{Im}f=\mathbb{R}$ este mulțime nemărginită inferior și superior. Dar f este mărginită pe orice interval $[a,b], a<b$, când avem $f([a,b])=[a,b]$.

1.4. AXA REALĂ

O dreaptă d pe care fixăm un punct O, numit origine, un sens pozitv și o unitate de măsură se numește **axă de coordonate** (Fig.6)

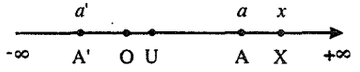


Fig. 6

Am văzut în anii precedenți că fiecărui număr real pozitiv a îi corespunde pe axa de coordonate un punct A situat la dreapta lui O astfel încât $OA=a$, iar fiecărui număr real negativ a' îi corespunde un punct A' situat la stânga lui O pentru care $OA'=|a'|$.
Numărului 0 (zero) îi corespunde punctul O.
Reciproc, oricărui punct X de pe axă îi corespunde un număr real x, numit **abscisa punctului** X astfel încât $OX=|x|$. Se scrie $X(x)$ (citim X de abscisă x).
Se stabilește astfel o corespondență bijectivă între mulțimea numerelor reale și mulțimea punctelor de pe axa de coordonate. Din acest motiv axa de coordonate se numește și **axa reală**. Dacă $X(x)$ și $Y(y)$, atunci $XY=|y-x|$ reprezintă lungimea segmentului $[XY]$.

1.5. INTERVALE

1. Intervale din $\mathbb{R}$
Corespondența pusă în evidență la punctul precedent, între mulțimea $\mathbb{R}$ și dreapta d, face ca submulțimilor lui $\mathbb{R}$ să le corespundă pe d submulțimi de puncte și invers.
Relația $x\le y$ și $x\ne y$ se scrie $x<y$ sau încă $y>x$.
Pentru orice cuplu de numere reale $a<b$, definim mulțimile:
1) $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}|a<x<b\}$, numit interval **deschis și mărginit**, de origine a și extremitate b, având reprezentarea pe axa reală în Fig.7

2) $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}|a\le x\le b\}$, numit interval **închis şi mărginit (sau compact)**, de origine a şi extremitate b, cu reprezentarea pe axa reală ca în Fig. 8

3) $(a,b]=\{x\in\mathbb{R}|a<x\le b\}$, numit interval **deschis** în a şi **închis** în b, cu reprezentarea pe axa reală din Fig.9.

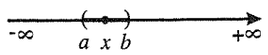


Fig. 7

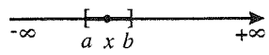


Fig. 8

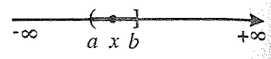


Fig. 9

4) $[a,b)=\{x\in\mathbb{R}|a\le x<b\}$, numit **interval închis** în a şi **deschis** în b, cu reprezentarea pe axa reală din Fig.10.

5) $(a,a)=[a,a)=\phi,[a,a]=\{a\}$.

6) $(a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}|x>a\}$, numită **semidreapta deschisă, nemărginită la dreapta**, cu reprezentarea pe axa reală din Fig.11.

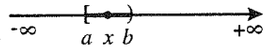


Fig.10

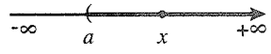


Fig.11

7) $[a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}|x\ge a\}$, numită **semidreapta închisă la stânga şi nemărginită la dreapta**, cu reprezentarea pe axa reală din Fig.12.

8) $(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R}|x<a\}$, numită **semidreapta deschisă, nemărginită la stânga**, cu reprezentarea pe axa reală din Fig.13.

9) $(-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R}|x\le a\}$, numită **semidreapta închisă la dreapta şi nemărginită la stânga**, cu reprezentarea pe axa reală din Fig. 14.

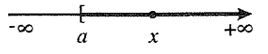


Fig.12

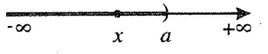


Fig.13

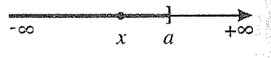


Fig.14

Observaţii. **1)** Intervalele 3), 4) se mai numesc **semideschise** (sau **semiînchise**).

2) Intervalele $(a,b),[a,b],[a,b),(a,b]$ sunt mărginite şi au **lungimea** egală cu $b-a$.

2. Intervale din $\overline{\mathbb{R}}$

Sunt mulţimile de forma:

1) $[-\infty,a)=\{x\in\overline{\mathbb{R}}|x<a\}$, cu reprezentarea pe axa reală încheiată din Fig.15.

2) $[-\infty,a]=\{x\in\overline{\mathbb{R}}|x\le a\}$, cu reprezentarea pe axa reală încheiată din Fig.16.

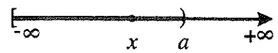


Fig.15

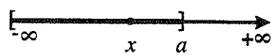


Fig.16

3) $(a,\infty]=\{x\in\overline{\mathbb{R}}|x>a\}$, cu reprezentarea pe axa reală încheiată din Fig.17.

4) $[a,\infty]=\{x\in\overline{\mathbb{R}}|x\ge a\}$, cu reprezentarea pe axa reală încheiată din Fig.18.

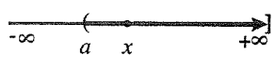


Fig.17

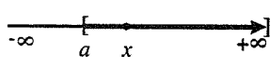


Fig.18

1.6. NOŢIUNEA DE VECINĂTATE

1. Vecinătate a unui punct din $\mathbb{R}$

Are loc următoarea:

Definiţie. Fie $a\in\mathbb{R}$ şi $V\subseteq\mathbb{R}$. Mulţimea V se numeşte **vecinătate** a lui a dacă există $\varepsilon>0$ astfel încât intervalul $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ să fie inclus în V (Fig.19).

Deci, V este vecinătate a lui $a\Leftrightarrow\exists\varepsilon>0$ astfel încât $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\subset V$. Intervalul $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ se numeşte **centrat** în a sau încă **simetric** în a.

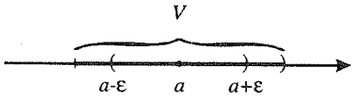


Fig.19

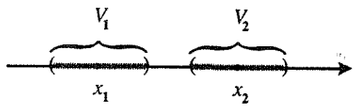


Fig.20

Observaţii. **1)** Orice interval deschis $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ este vecinătate a punctului a.

2) Cum pentru un număr real a există o infinitate de vecinătăţi, notăm cu $\vartheta(a)$, mulţimea acestora.

3) Orice interval deschis $(a,b),a<b$, este vecinătate a oricărui punct al său.

Exemple. 1) $(-1,1)$ este vecinătate a lui 0; 2) $(-1,2]$ nu este vecinătate a lui 2, deoarece pentru nici un $\varepsilon>0$, intervalul $(2-\varepsilon,2+\varepsilon)$ nu este inclus în $(-1,2)$.

Dacă, prin absurd, $(2-\varepsilon,2+\varepsilon)\subset(-1,2)$**, atunci trebuie să avem** $-1<2-\varepsilon,2+\varepsilon\le 2$**, ceea ce atrage** $\varepsilon\le 0$**, fals!.**

3) $(0,2],[-1,3],\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right),\left[-\frac{1}{2},3\right)$ **sunt vecinătăți ale lui 1.**

Proprietăți ale vecinătăților unui punct

Se verifică, fără dificultate, următoarele proprietăți ale mulțimii $\vartheta(a)$:

1) $a\in V,\forall V\in\vartheta(a)$ **(Orice vecinătate își conține punctul).**

2) Dacă $V\in\vartheta(a)$, iar $U\supset V$, atunci $U\in\vartheta(a)$ **(Orice mulțime care conține o vecinătate a unui punct, este vecinătate pentru acel punct).**

3) Dacă $V_1,V_2\in\vartheta(a)$, atunci $V_1\cap V_2\in\vartheta(a)$ **(Intersecția a două vecinătăți ale lui** a**, este o vecinătate a lui** a**).**

Mulțimea $\mathbb{R}$ are următoarea proprietate remarcabilă.

Proprietatea de separare a lui $\mathbb{R}$. Dacă $x_1,x_2\in\mathbb{R},x_1\neq x_2$, atunci există $V_1\in\vartheta(x_1),V_2\in\vartheta(x_2)$ astfel încât $V_1\cap V_2=\varnothing$ (Fig. 20)

2. Vecinătăți pentru $\pm\infty$

Are loc următoarea:

Definiție. O mulțime V din $\overline{\mathbb{R}}$ se numește vecinătate a lui $-\infty$, dacă există $b\in\mathbb{R}$ astfel încât $[-\infty,b)\subset V$ (Fig. 21).

O mulțime V din $\overline{\mathbb{R}}$ se numește vecinătate a lui $+\infty$, dacă există $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $(a,\infty]\subset V$ (Fig. 22).

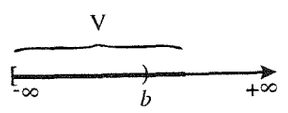


Fig.21

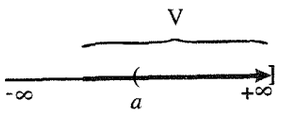


Fig.22

Exemple. 1) $[-\infty,0]$ **este o vecinătate a lui** $-\infty$**.**

2) $(1,\infty]$ **este o vecinătate a lui** $+\infty$**.**

3) $\mathbb{R}$ **nu este vecinătate nici pentru** $-\infty$**, nici pentru** $+\infty$ **(deoarece** $\pm\infty\notin\mathbb{R}$**). Dar, este vecinătate a oricărui** $a\in\mathbb{R}$**.**

4) $\overline{\mathbb{R}}$ **este vecinătate pentru fiecare element** $a\in\overline{\mathbb{R}}$**.**

1.7. PUNCT DE ACUMULARE. PUNCT IZOLAT

Pentru o mulțime $A\neq\varnothing,A\subseteq\mathbb{R}$, două tipuri de puncte joacă un rol important. Le vom discuta pe rând. Avem următoarea:

Definiție. Un punct $a\in\overline{\mathbb{R}}$ se numește **punct de acumulare** (sau **punct limită**) pentru mulțimea A dacă $\forall V\in\vartheta(a)$ să rezulte $(V-\{a\})\cap A\neq\varnothing$ (Fig. 23).

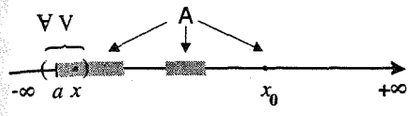


Fig.23

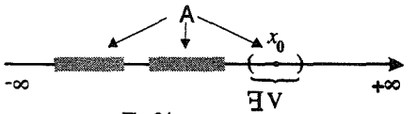


Fig.24

Această definiție spune că un punct $a\in\overline{\mathbb{R}}$ este **punct de acumulare** pentru mulțimea A, dacă orice vecinătate V a lui a **mai conține și alte puncte** din A, diferite de a $\left((V-\{a\})\cap A\neq\varnothing\right)$. Deci există $x\in V\cap A,x\neq a$.

Mulțimea punctelor de acumulare pentru mulțimea A se notează cu A' și se mai numește **mulțimea derivată** a lui A.

Dacă $a\in A'$ nu rezultă obligatoriu că $a\in A$!

Arătați că $a\in\mathbb{R}$ este punct de acumulare pentru A dacă $\forall\delta>0,\exists x\in A,x\neq a$ astfel încât $|x-a|<\delta$.

Dacă mulțimea A conține un interval de forma $(a-p,a)$ sau $(a,a+p)$ sau o reuniune de intervale de forma $(a-p,a)\cup(a,a+p),p>0$, atunci a este punct de acumulare pentru A (intervalele pot fi și închise în a).

Exemple 1) Dacă $A=(a,b)$ **sau** $A=[a,b)$ **sau** $A=(a,b]$ **sau** $A=[a,b]$**, atunci** $A'=[a,b]$**.**

2) Dacă $A=\varnothing$**, atunci** $A'=\varnothing$**.**

3) Dacă $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$**, atunci** $A'=\varnothing$**.**

4) Dacă $A=\left\{\frac{1}{n}\middle|n\in\mathbb{N}^*\right\}$**, atunci** $A'=\{0\}$**.**

5) Dacă $A=\mathbb{N}$**, atunci** $A'=\{+\infty\}$**.**

6) Dacă $A=\mathbb{Z}$**, atunci** $A'=\{-\infty,+\infty\}$**.**

7) Dacă $A=\mathbb{R}$**, atunci** $A'=\overline{\mathbb{R}}$**.**

Definiție. Fie $A\neq\varnothing,A\subseteq\mathbb{R}$. Un punct $x_0\in A$ se numește **punct izolat al mulțimii** A dacă există cel puțin o vecinătate V a punctului x_0 astfel încât $V\cap A=\{x_0\}$ (Fig. 24).

Observații. 1) Orice punct al unei mulțimi A este **fie punct de acumulare, fie punct izolat.**

2) Dacă A este interval, atunci $a\in A'$ dacă $a\in A$ sau a este unul din capetele intervalului.

Exemple. 1) $A=[0,1]\cup\{2\}$. **Punctul** $x_0=2$ **este punct izolat pentru** A, **deoarece există vecinătatea** $V=\left(2-\frac{1}{2},2+\frac{1}{2}\right)$ **a lui** x_0 **astfel încât** $V\cap A=\{2\}$.

2) $A=\mathbb{N}$. **Orice număr din** $\mathbb{N}$ **este punct izolat al lui** $\mathbb{N}$.

1.8. FUNCȚII ELEMENTARE

În acest paragraf realizăm un „inventar" al funcțiilor importante pe care le-ați studiat în clasele a IX-a și a X-a. Titulatura sub care sunt cunoscute aceste funcții este aceea de „funcții elementare". De ce este necesară această prezentare ? Pentru că problemele fundamentale pe care le studiați în acest an la analiză matematică, limita unei funcții într-un punct, continuitatea unei funcții într-un punct (sau pe o mulțime), derivabilitatea unei funcții într-un punct (sau pe o mulțime) apelează la această categorie de funcții. Lecturați graficele acestor funcții, așa cum am procedat în manualele din clasele a IX-a și a X-a, punctând următoarele probleme: 1) Definirea funcției, 2) Intersecția graficului cu axele de coordonate, 3) Paritatea funcției și simetria graficului funcției, 4) Convexitatea sau concavitatea funcției (graficului), 5) Monotonia funcției, 6) Mărginirea funcției (valori extreme, comportament asimptotic), 7) Semnul funcției (poziționarea graficului în raport cu axa Ox), 8) Continuitatea graficului, 9) Bijectivitatea și inversa funcției.

- Reamintim că o funcție $f:A\to B, A,B\subseteq\mathbb{R}$ se numește funcție numerică. În reperul xOy, mulțimea A este o submulțime de puncte de pe axa Ox, iar B este o submulțime de puncte de pe axa Oy. Mulțimea $\{f(x)|x\in A\}=f(A)$ se numește mulțimea valorilor funcției f sau încă imaginea funcției $f(f(A)=\operatorname{Im}f)$.
- Pentru a obține intersecția graficului funcției cu axa Ox se rezolvă ecuația $f(x)=0$, iar pentru a determina intersecția graficului funcției cu axa Oy se calculează $f(0)$ (dacă $0\in A$).
- Funcția f este pară dacă $f(-x)=f(x),\forall x\in A$ (sub condiția $-x\in A$ pentru $x\in A$), caz în care graficul funcției este simetric în raport cu axa Oy (Fig.25).

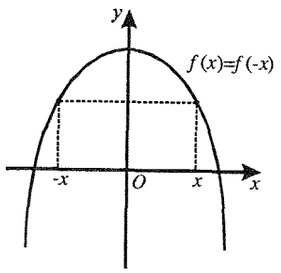


Fig.25

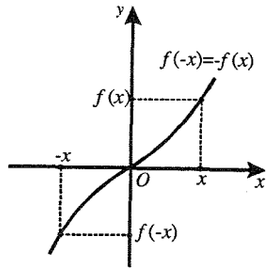


Fig.26

Funcția f este impară dacă $f(-x)=-f(x),\forall x\in A(-x\in A)$, situație în care graficul lui f este simetric în raport cu originea axelor de coordonate, O (Fig.26).

- Funcția f este convexă (concavă) pe intervalul A dacă $\forall x_1,x_2\in A$, $\forall q_1,q_2\geq 0$, $q_1+q_2=1$ avem $f(q_1x_1+q_2x_2)\leq(\geq)q_1f(x_1)+q_2f(x_2)$.

Graficul unei funcții convexe (concave) se află sub (deasupra) orice coardă obținută prin unirea a două puncte situate pe grafic Fig.27(Fig.28).

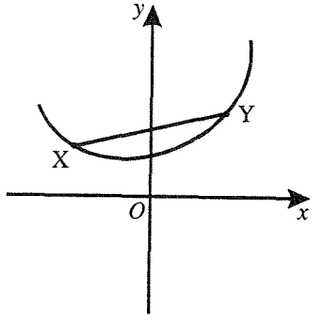


Fig. 27

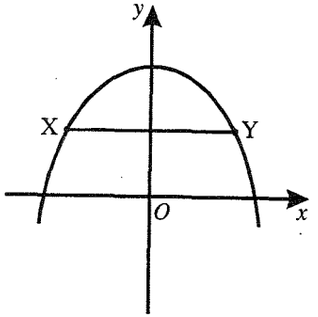
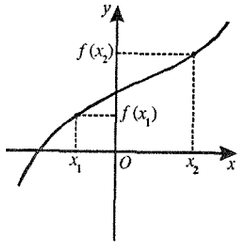


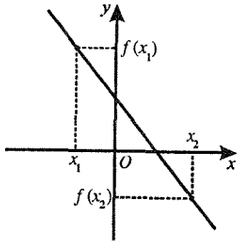
Fig. 28

- Spunem că funcția f este strict crescătoare (descrescătoare) pe $I\subseteq A$, dacă $\forall x_1,x_2\in I, x_1<x_2$ să rezulte $f(x_1)<f(x_2)\,(f(x_1)>f(x_2))$.

Graficul unei funcții strict crescătoare (descrescătoare), privit de la stânga la dreapta, este o curbă care „urcă" („coboară") Fig.29(Fig.30).



$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$
Fig.29



$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$
Fig.30

A preciza intervalele de monotonie pentru o funcție $f: A \to B, A, B \subseteq \mathbb{R}$ revine la a indica submulțimea lui A pe care f este strict crescătoare și submulțimea lui A pe care f este strict descrescătoare.

Dacă între valorile lui f relația $<(>)$ devine $\leq(\geq)$ se spune că funcția este crescătoare (descrescătoare).

Pentru a studia monotonia funcției f se consideră $x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2$ și se calculează diferența valorilor $f(x_1), f(x_2)$, adică $f(x_1) - f(x_2)$.

Dacă $f(x_1) < f(x_2)$, atunci f este strict crescătoare pe A, iar dacă $f(x_1) > f(x_2)$, atunci f este strict descrescătoare pe A.

Altfel se studiază semnul raportului

$R(x_1, x_2) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, unde

$x_1 < x_2, x_1, x_2 \in A$.

- Funcția $f: A \to B$ este mărginită dacă există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a \leq f(x) \leq b$, $\forall x \in A$. Pentru grafic această inegalitate arată că acesta este situat între dreptele orizontale $y = a$ și $y = b$ (Fig.31).

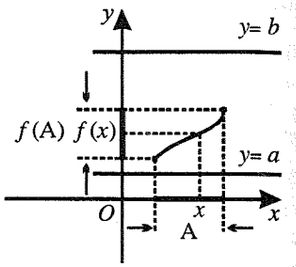


Fig.31

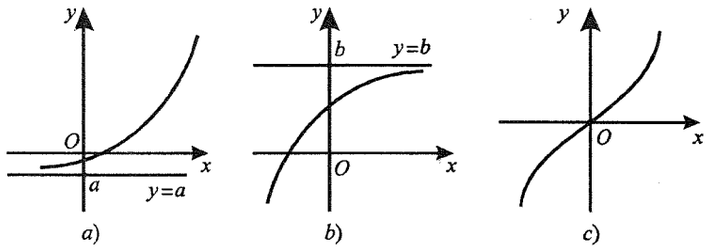


Fig. 32

În Fig.32. a) am reprezentat grafic o funcție care este mărginită inferior și nemărginită superior. În Fig.32. b) este reprezentat graficul unei funcții mărginite superior și nemărginite inferior, iar în Fig.32. c) este redat graficul unei funcții care nu este mărginită nici inferior, nici superior.

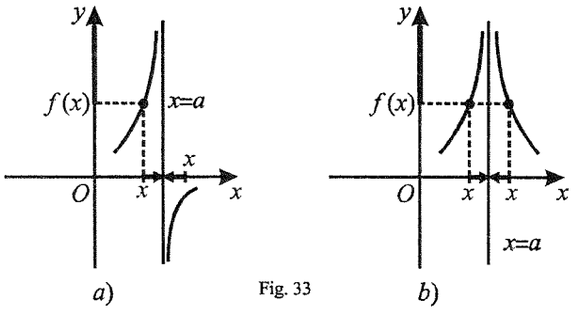


Fig. 33

Dreapta verticală $x = a$ este asimptotă verticală pentru graficul funcției f dacă atunci când x se apropie de a (din stânga sau (și) din dreapta) valoarea $f(x)$ este foarte mare pozitivă sau foarte mare negativă (Fig.33. a), b)).

Dreapta $y = a$ este asimptotă orizontală la $+\infty$ sau (și) $-\infty$ dacă atunci când punctele curbei se deplasează spre infinit (sau $-\infty$), distanțele lor la dreapta dată devin foarte mici (Fig. 34. a), b), c)).

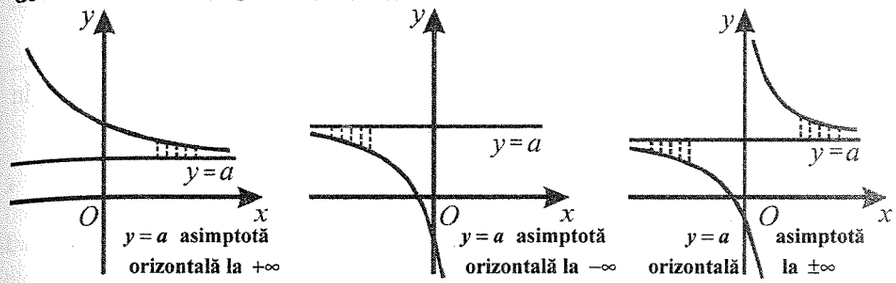


Fig 34

Dreapta $y = mx + n, m \neq 0$ este asimptotă oblică la $+\infty$ sau (și) $-\infty$ dacă atunci când punctele curbei se deplasează spre infinit sau $(-\infty)$, distanțele lor la dreaptă devin foarte mici (Fig.35. a), b)).

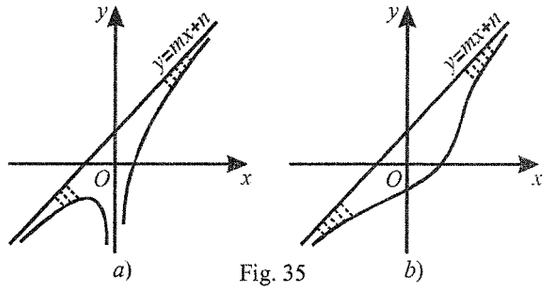


Fig. 35

Se poate vorbi de asimptote orizontale sau oblice, numai dacă domeniul funcției conține intervale de forma $(-\infty, a)$ sau (a, ∞).

- A stabili semnul funcției numerice $f: A \to B$ revine la a preciza submulțimile lui A, $A_+ = \{x \in A \mid f(x) > 0\}, A_- = \{x \in A \mid f(x) < 0\}$. Graficul funcției f în punctele din A_- se află sub axa Ox, iar în punctele din A_+ se află deasupra axei Ox (Fig.36).

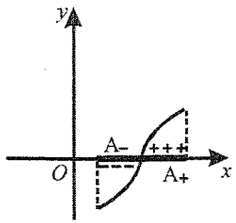


Fig. 36

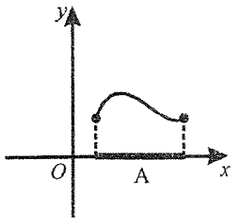


Fig. 37

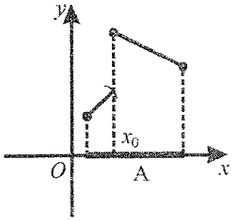


Fig. 38

• Graficul unei funcții este continuu dacă poate fi desenat cu creionul fără a-l ridica de pe foaie (Fig.37). O astfel de funcție o numim continuă pe A.
Dacă acest lucru nu se întâmplă spunem că graficul este discontinuu pe A (în Fig.38 graficul se „rupe" în x_0 - este discontinuu în x_0).

• Funcția f este bijectivă dacă este injectivă $\left(f(x_1)=f(x_2), x_1, x_2 \in A \Rightarrow x_1 = x_2\right)$ și surjectivă $\left(\forall y \in B, \exists x \in A \text{ astfel încât } f(x)=y\right)$.

Funcția f este inversabilă dacă este bijectivă. Inversa ei se notează cu $f^{-1}: B \to A$ și este definită prin $f^{-1}(y)=x$ cu proprietatea $f(x)=y$.

Graficele funcțiilor f și f^{-1} sunt simetrice în raport cu prima bisectoare $(y=x)$.

Vom vedea că pentru 4), 5), 6), 7), 8) vom da formulări riguroase.

Următoarele funcții sunt considerate **funcții elementare**:

1) funcția polinomială;
2) funcția rațională;
3) funcția radical;
4) funcția putere;
5) funcția exponențială;
6) funcția logaritmică;
7) funcțiile trigonometrice directe (sin, cos, tg, ctg);
8) funcțiile trigonometrice inverse (arcsin, arccos, arctg, arcctg).

Se consideră că: **orice funcție obținută din cele de mai sus prin aplicarea succesivă, de un număr finit de ori, a operațiilor algebrice, a operației de compunere și a operației de inversare este, de asemenea, o funcție elementară.**
În acest caz, dacă domeniul de definiție nu este precizat, atunci se subînțelege că este **format din acele puncte x pentru care au sens operațiile prin care este definită funcția.** Acesta este **domeniul maxim de definiție al funcției.**
În continuare vom analiza, pe rând, aceste funcții.

1. Funcția polinomială $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0, a_i \in \mathbb{R}, i=\overline{0,n}$ se numește **funcția polinomială de grad n.**

Exemple: 1) Funcția polinomială de grad zero este funcția constantă $f(x)=c, \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$. Graficul este o dreaptă paralelă cu axa Ox (Fig.39). Dacă $c=0$ avem chiar axa Ox.

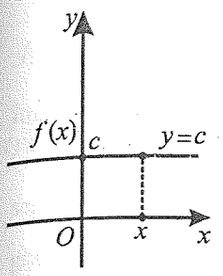
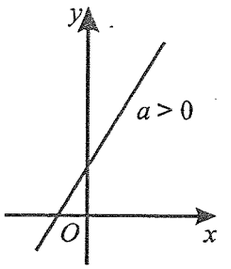


Fig. 39



a)

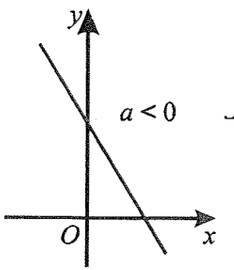


Fig. 40 b)

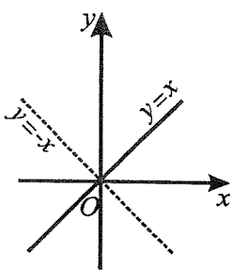


Fig. 41

2) Funcția polinomială de gradul întâi $f(x)=ax+b, a \neq 0, a,b \in \mathbb{R}$ are ca grafic o dreaptă (Fig.40) – care „urcă" dacă $a>0$ (Fig.40. a)) sau care „coboară" dacă $a<0$ (Fig.40. b)).
Dacă $a=1, b=0$, atunci $f(x)=x, \forall x \in \mathbb{R}$ este **funcția identică**, având graficul prima bisectoare (Fig.41).
Dacă $a=-1, b=0$ atunci $f(x)=-x, \forall x \in \mathbb{R}$ are ca grafic a doua bisectoare (Fig.41, am trasat-o întrerupt).

3) Dacă $n=2$, se obține funcția polinomială de gradul doi $f(x)=ax^2+bx+c, a \neq 0, a,b,c \in \mathbb{R}$. Aceste funcții sunt cunoscute sub denumirea de **funcții pătratice**.
Graficul funcției de gradul doi este o parabolă a cărui formă depinde de semnul lui a (Fig.42).

Fig. 42

Fig. 43

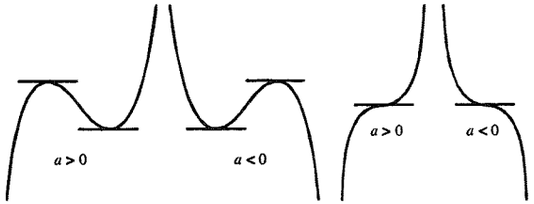
Poziția parabolei în raport cu axa Ox este dată de semnul discriminantului $\Delta = b^2 - 4ac$ (Fig.43).

Dacă $a>0, (a<0)$, graficul este convex (concav). Dreapta $x=-\frac{b}{2a}$ este axă de simetrie a graficului.

Dacă $a>0\,(a<0)$, atunci punctul $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ este punctul de minim (maxim) pentru graficul funcției. Intervalele de monotonie ale funcției sunt: $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right], \left[-\frac{b}{2a}, \infty\right)$.

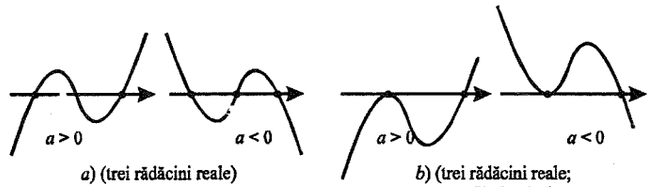
4) Dacă $n=3$, se obține funcția polinomială de gradul trei, $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d, a \neq 0$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Aceste funcții se mai numesc și **funcții cubice**.

În general, graficul unei funcții cubice are una din formele din Fig.44, aceasta fiind determinată de semnul lui a.



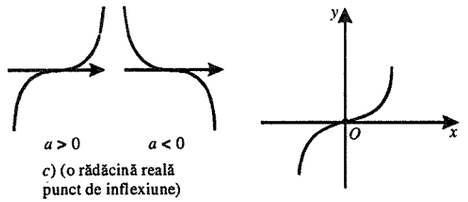
a) (puncte de extrem) Fig. 44 *b*) (punct de inflexiune)

Poziția graficului funcției în raport cu axa Ox este în una din situațiile din Fig.45.



a) (trei rădăcini reale)

b) (trei rădăcini reale; una fiind rădăcină dublă; punct de extrem)



c) (o rădăcină reală punct de inflexiune)

Fig.45

Fig.46

Pentru x foarte mare, funcția $f(x)$ se aproximează cu termenul care-l conține pe x la puterea cea mai mare, adică $f(x) \approx ax^3$.

Funcția $f(x)=x^3$ are graficul din Fig.46, numit parabolă cubică (are forma din Fig.45. c) cu $a>0$).

2. Funcția rațională $f(x)=\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}$

Funcția $f:\mathbb{R}-\{x|Q(x)=0\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, unde $P(x), Q(x)$ sunt funcții polinomiale, se numește **funcție rațională**.

Dacă $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0, a_n\neq 0$ și $Q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0, b_m\neq 0$ atunci

$f(x)=\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}$, pentru $x\in\mathbb{R}-\{x|Q(x)=0\}$ (deoarece împărțirea prin zero nu este permisă).

Observație. Funcția polinomială f se poate gândi ca o funcție rațională dacă scriem $f(x)=\dfrac{f(x)}{1}$. Funcțiile raționale sunt mai dificil de analizat și de trasat graficele lor, decât în cazul funcțiilor polinomiale. În acest caz **este important să analizăm comportarea funcției raționale: 1) în jurul punctelor în care se anulează numitorul $Q(x)$ și 2)** pentru valori mari ale lui x, **atât pozitive cât și negative.** Dacă P și Q n-au factori comuni, atunci zerourile lui Q corespund la asimptote verticale pentru graficul lui f. Existența asimptotelor orizontale depinde de comportarea funcției f pentru valori mari ale lui x (pozitive sau negative).

Exemple .1) Funcția $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x}$ are graficul din Fig.47. În acest caz graficul este o curbă discontinuă, formată din două ramuri care „coboară"; graficul este simetric în raport cu O, deoarece funcția este impară $f(-x)=-f(x), \forall x\neq 0$.

Dreapta $x=0$ este asimptotă verticală, iar $y=0$ este asimptotă orizontală la $\pm\infty$.

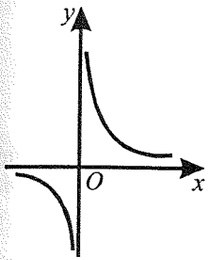


Fig. 47

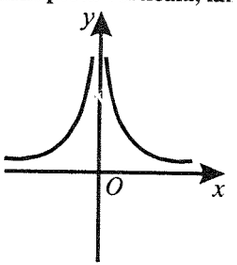
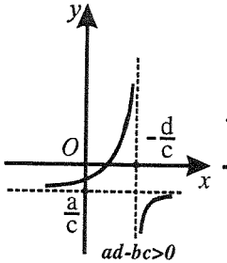
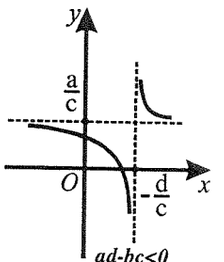


Fig. 48



ad-bc>0



ad-bc<0

Fig. 49

2) **Funcția $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ are graficul din Fig.48.**

Graficul este discontinuu, format din două ramuri, una „urcă", alta „coboară". Graficul are $x=0$ ca asimptotă verticală, iar $y=0$ ca asimptotă orizontală la $\pm\infty$. Graficul este simetric în raport cu axa Oy deoarece funcția este pară, $f(-x)=f(x), \forall x\neq 0$.

3) **Funcția $f:\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}\to\mathbb{R}-\left\{\dfrac{a}{c}\right\}, f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}, a,b,c,d\in\mathbb{R}, c\neq 0, ad-bc\neq 0$ se numește funcția omografică al cărui grafic este redat în Fig.49 (după semnul lui $ad-bc$).**

3. Funcția radical de ordin n, $f(x)=\sqrt[n]{x}$

Funcția $f:[0,\infty)\to[0,\infty), f(x)=\sqrt[2n]{x}, n\in\mathbb{N}^*$ se numește **funcția radical de ordin par**, având graficul din Fig.50.

Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[2n+1]{x}, n\in\mathbb{N}^*$ se numește **funcția radical de ordin impar**, având graficul din Fig.51.

Funcția radical de ordin n este bijectivă, inversa ei fiind funcția putere cu exponent natural par și respectiv impar ($f^{-1}:[0,\infty)\to[0,\infty), f^{-1}(x)=x^{2n}$ și respectiv $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f^{-1}(x)=x^{2n+1}$).

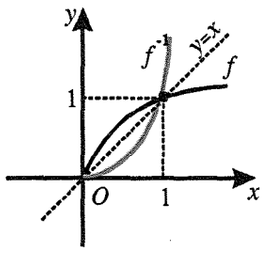


Fig. 50

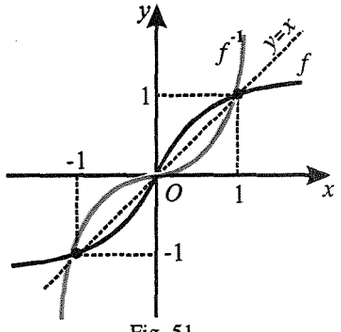


Fig. 51

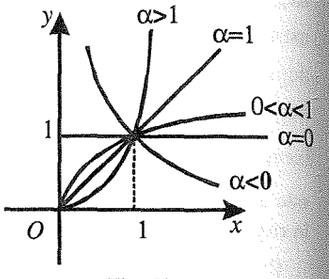


Fig. 52

4. Funcția putere $f(x)=x^{\alpha}, \alpha\in\mathbb{R}$

Funcția putere are forma $f(x)=x^{\alpha}$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$. Vom preciza domeniul maxim de definiție după diferite valori ale lui α.

1) Dacă $\alpha=0$, atunci $f(x)=1, \forall x\in\mathbb{R}$ adică funcția constantă.

2) Dacă $\alpha=n\in\mathbb{N}^*, f(x)=x^n, \forall x\in\mathbb{R}$, caz particular de funcție polinomială.

3) Dacă $\alpha=-n, n\in\mathbb{N}^*, f(x)=\frac{1}{x^n}, \forall x\neq 0$, caz particular de funcție rațională.

4) Dacă $\alpha>0$, atunci $f:[0,\infty)\to[0,\infty), f(x)=x^{\alpha}$.

În caz particular dacă $\alpha=\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}^*, n$ par se obține funcția radical de ordin par.

Pentru $\alpha=\frac{m}{n}, m,n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$, atunci $f(x)=x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x^m}$.

5) Dacă $\alpha\neq 0$, atunci $f:(0,\infty)\to(0,\infty), f(x)=x^{\alpha}$.

Graficul funcției pentru $f(x)=x^{\alpha}, x\geq 0$ este redat în Fig.52, pentru diferitele valori ale lui α.

5. Funcția exponențială $f(x)=a^x, a\neq 1, a>0$

Funcția $f:\mathbb{R}\to(0,\infty), f(x)=a^x, a>0, a\neq 1$ se numește **funcția exponențială de bază** a.

Dacă $a\in(0,1)$, atunci f este strict descrescătoare, iar pentru $a>1, f$ este strict crescătoare. Graficul este format dintr-o singură ramură cotinuă, convexă, situată deasupra axei Ox $(f(x)>0, \forall x)$ este redat în Fig.53. Dreapta $y=0$ (axa Ox) este asimptotă orizontală. Funcția este bijectivă, deci inversabilă. Inversa ei este funcția logaritmică.

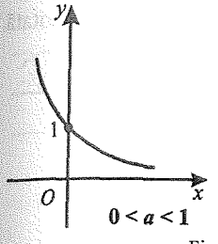
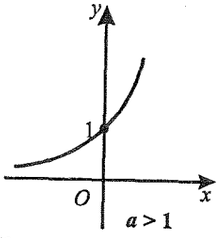
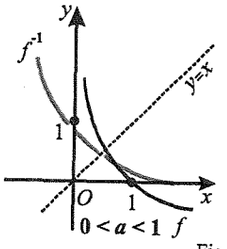


Fig. 53





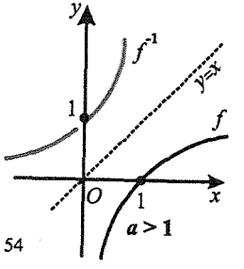


Fig. 54

6. Funcția logaritmică $f(x)=\log_a x, 0<a, a\neq 1$

Funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\log_a x, a>0, a\neq 1$ se numește **funcția logaritmică de bază** a.

Dacă $a\in(0,1)$, atunci f este strict descrescătoare, iar pentru $a>1, f$ este strict crescătoare.

Graficul este format dintr-o singură ramură continuă, convexă dacă $a\in(0,1)$ și concavă pentru $a>1$. Funcția este bijectivă și deci inversabilă. Inversa este funcția exponențială de aceeași bază. Graficul este redat în Fig.54.

7. Funcțiile trigonometrice

directe	sin	cos	tg	ctg
inverse	arcsin	arccos	arctg	arcctg

7.1. Funcțiile sin și arcsin

Funcția $f:\mathbb{R}\to[-1,1]$, $f(x)=\sin x, x\in\mathbb{R}$ se numește **funcția sinus** (notată $\sin:\mathbb{R}\to[-1,1]$), care este o funcție mărginită $(-1\le f(x)\le 1)$, impară ($f(-x)=-f(x)$, având graficul simetric în raport cu O), periodică (de perioadă principală $T_0=2\pi$).

Restricția funcției la $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, pe care o notăm la fel, $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$ este bijectivă și deci inversabilă. Inversa ei este funcția arcsinus (notată $\arcsin:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$).

Această funcție este impară $(\arcsin(-x)=-\arcsin x)$. Au loc egalitățile:

$\sin(\arcsin x)=x, \forall x\in[-1,1]$, $\arcsin(\sin x)=x, \forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Graficele funcțiilor discutate mai sus sunt prezentate în Fig.55.

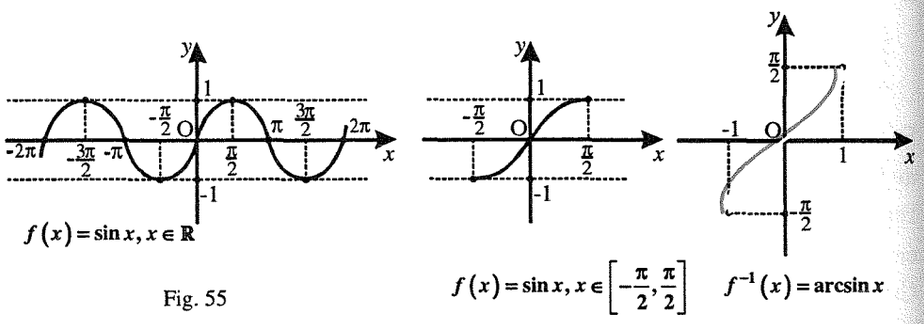


Fig. 55

7.2. Funcțiile cos și arccos

Funcția $f:\mathbb{R}\to[-1,1]$, $f(x)=\cos x, x\in\mathbb{R}$ se numește **funcția cosinus** (notată $\cos:\mathbb{R}\to[-1,1]$), care este o funcție mărginită $(-1\le f(x)\le 1)$, pară ($f(-x)=f(x)$ - având graficul simetric în raport cu axa Oy), periodică (de perioadă principală $T_0=2\pi$).

Restricția funcției la $[0,\pi]$, pe care o notăm la fel, $f:[0,\pi]\to[-1,1]$ este bijectivă și deci inversabilă. Inversa ei este funcția arccosinus (notată $\arccos:[-1,1]\to[0,\pi]$).

Avem $\arccos(-x)=\pi-\arccos x, \forall x\in[-1,1]$ ceea ce arată că funcția arccosinus nu este nici pară, nici impară.

Au loc egalitățile: $\cos(\arccos x)=x, \forall x\in[-1,1]$, $\arccos(\cos x)=x, \forall x\in[0,\pi]$.

Legătura între funcțiile arcsin și arccos este dată de relația

$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}, \forall x\in[-1,1]$.

Graficele funcțiilor prezentate mai sus sunt redate în Fig.56.

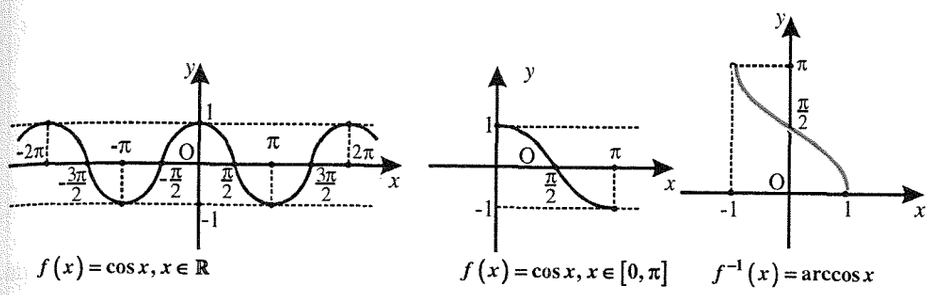


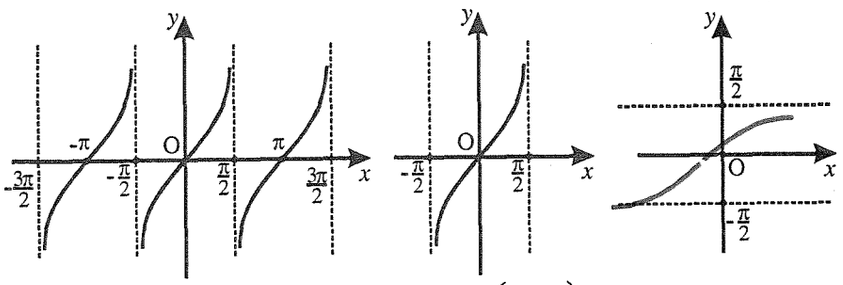
Fig. 56

7.3. Funcțiile tg și arctg

Funcția $f:\mathbb{R}-\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}=D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$ se numește **funcția tangentă** (notată tg). Este o funcție nemărginită, impară $(f(-x)=-f(x))$, periodică (de perioadă principală $T_0=\pi$). Restricția funcției f la $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, o notăm tot cu f, este bijectivă și deci inversabilă. Inversa ei este funcția arctangentă (notată $\operatorname{arctg}:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$). Funcția arctg este impară $(\operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg}x)$, mărginită $\left(-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}x<\frac{\pi}{2}\right)$. Au loc egalitățile:

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)=x, \forall x\in\mathbb{R}$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)=x, \forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Graficele funcțiilor discutate aici sunt redate în Fig.57.



$f(x)=\operatorname{tg} x, x\in D$ $\quad$ $f(x)=\operatorname{tg} x, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ $\quad$ $f^{-1}(x)=\operatorname{arctg} x$

Fig. 57

7.4. Funcțiile ctg și arcctg

Funcția $f:\mathbb{R}-\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}=D\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$ se numește **funcția cotangentă** (notată ctg). Este o funcție periodică (de perioadă principală $T_0=\pi$), nemărginită.

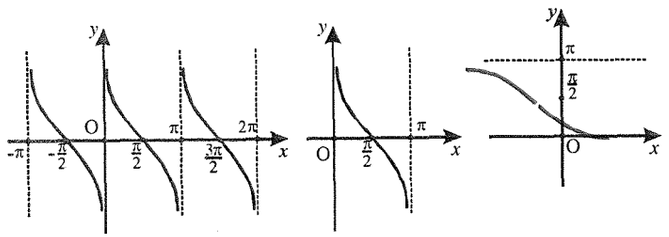
Restricția funcției f la $(0,\pi)$ o notăm la fel, $\operatorname{ctg}:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ este bijectivă și deci inversabilă. Inversa ei este funcția arccotangentă (notată $\operatorname{arcctg}:\mathbb{R}\to(0,\pi)$).

Au loc relațiile: $\operatorname{arcctg}(-x)=\pi-\operatorname{arcctg} x, \forall x\in\mathbb{R}$, $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)=x, \forall x\in\mathbb{R}$

$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)=x, \forall x\in(0,\pi)$.

Legătura între funcțiile arctg și arcctg este dată de relația $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2}, x\in\mathbb{R}$.

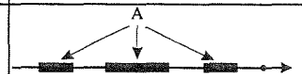
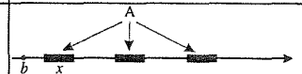
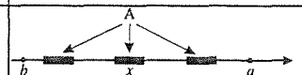
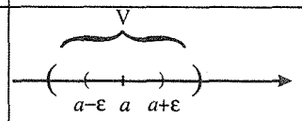
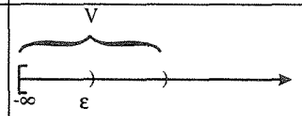
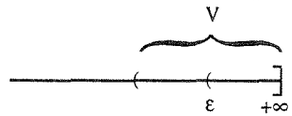
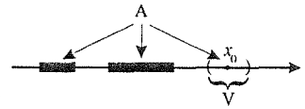
Graficele funcțiilor discutate aici sunt prezentate în Fig.58.



$f(x)=\operatorname{tg} x, x\in D$ $\quad$ $f(x)=\operatorname{ctg} x, x\in(0,\pi)$ $\quad$ $f^{-1}(x)=\operatorname{arcctg} x$

Fig.58

REZUMATUL CAPITOLULUI

Noțiuni	Definiție. Caracterizare	Reprezentare
Numărul real	• fracție zecimală periodică (număr rațional) sau • fracție zecimală neperiodică(număr irațional)	$\pm x_0, x_1x_2x_3\ldots, x_0\in\mathbb{N}, x_1, x_2, \ldots\in\{0,1,\ldots,9\}$ Q = numere raționale $\mathbb{R}-Q$ = numere iraționale
Mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$	$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$	
Dreapta reală incheiată $\overline{\mathbb{R}}$	$\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ $-\infty<x<\infty, \forall x\in\mathbb{R}$	
$A\subseteq\mathbb{R}, A\neq\emptyset$ A este majorată	dacă există $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $x\le a, \forall x\in A$	
$A\subseteq\mathbb{R}, A\neq\emptyset, A$ este minorată	dacă există $b\in\mathbb{R}$ astfel încât $x\ge b, \forall x\in A$	
$A\subseteq\mathbb{R}, A\neq\emptyset$ este mărginită	dacă există $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $b\le x\le a, \forall x\in A$	
V este vecinătate a lui $a\in\mathbb{R}$	dacă există $\varepsilon>0$ astfel încât $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\subset V$	
V este vecinătate a lui $-\infty$	dacă există $\varepsilon>0$ astfel încât $[-\infty,\varepsilon)\subset V$	
V este vecinătate a lui $+\infty$	dacă există $\varepsilon>0$ astfel încât $(\varepsilon,\infty]\subset V$	
$a\in\mathbb{R}$ este punct de acumulare pentru mulțimea $A\subseteq\mathbb{R}$,	dacă există $p>0$ astfel încât $(a-p,a)$ sau $(a,a+p)$ sau $(a-p,a)\cup(a,a+p)\subseteq A$	
$x_0\in A$ este punct izolat al mulțimii A	dacă există o vecinătate V a lui x_0 astfel încât $V\cap A=\{x_0\}$	

Probleme propuse

Numere reale

1.Să se determine minoranții, majoranții, $\min A$, $\max A$ (dacă există) pentru următoarele submulțimi A ale dreptei reale:

1) $A=\{-3,-1,2,3,6\}$; 2) $A=\{-4\}\cup\{2,3\}$; 3) $A=(0,1)\cup(2,5]$; 4) $A=[-1,0)\cup\{5\}$;

5) $A=[-2,3)\cup[6,9)$; 6) $A=[-4,6)\cup(7,11]$; 7) $A=[-9,5)\cup\{6\}$; 8) $A=(-\infty,1]\cup(2,\infty)$;

9) $A=[-6,3)\cup(10,\infty)$; 10) $A=(-\infty,0]\cup[2,3]$.

2.Să se determine $\inf A$ și $\sup A$ (dacă există) pentru următoarele submulțimi A din $\mathbb{R}$:

1) $A=\{-10,-6,0,1,9\}$; 2) $A=\{-5\}\cup(1,3]$; 3) $A=(-2,1)$; 4) $A=(-\infty,1)$; 5) $A=[0,\infty)$;

6) $A=(-1,1)\cup(2,3)$; 7) $A=(-5,-3)\cup[0,1]\cup[2,10]$; 8) $A=[-3,1]\cup(5,\infty)$;

9) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x^2-9\le 0\right\}$; 10) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|\frac{2x+1}{x^2+1}>1\right\}$; 11) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\middle||x+1|-x\ge 1\right\}$.

3.Dacă a este un majorant pentru $A\subset\mathbb{R}, A\neq\varnothing$, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1) Dacă a' este un majorant oarecare pentru A, atunci $a\le a'$.

2) Dacă $a''<a$, atunci a'' nu este majorant al lui A.

3) Dacă $z<a$, atunci există $a_z\in A$ astfel încât $z<a_z$.

4) Dacă $\varepsilon>0$, atunci există $a_\varepsilon\in A$ astfel încât $a-\varepsilon<a_\varepsilon$.

Formulați o proprietate analoagă pentru b minorant al lui A.

4.Fie $A\subseteq\mathbb{R}, A\neq\varnothing$. Arătați că dacă $M\in\mathbb{R}$ are proprietățile:

1) $\forall n\in\mathbb{N}^*, M-\frac{1}{n}$ nu este majorant pentru A ;

2) $\forall n\in\mathbb{N}^*, M+\frac{1}{n}$ este majorant pentru A, atunci $M=\sup A$.

Formulați o proprietate similară pentru $m=\inf A$.

5.1) Fie $A\subset\mathbb{R}, A\neq\varnothing$, A minorată. Atunci $\inf A=-\sup(-A)$, unde $-A=\{-a|a\in A\}$.

2) Dacă $A\subseteq\mathbb{R}, A$ conține unul din majoranți, atunci acest majorant este $\sup A$.

Dacă $A\subseteq\mathbb{R}, A$ conține unul din minoranți, atunci acest minorant este $\inf A$.

3) $\sup(x+A)=x+\sup A$, unde $x+A=\{x+a|a\in A\}, x\in\mathbb{R}$.

4) Fie $A,B\neq\varnothing$ și $a\le b$, $\forall a\in A,\forall b\in B$. Atunci $\sup A\le\sup B$ (dacă există).

5) Fie $A\subseteq\mathbb{R}, A$ mărginită și $A_0\neq\varnothing, A_0\subset A$. Atunci $\inf A\le\inf A_0\le\sup A_0\le\sup A$.

6) Fie $A,B\subset\mathbb{R}$, mulțimi nevide și $\lambda\in\mathbb{R}$. Definim mulțimile:

$A+B=\{a+b|a\in A,b\in B\}$, $A\cdot B=\{ab|a\in A,b\in B\}$, $\lambda A=\{\lambda a|a\in A\}$.

Dacă A,B sunt mărginite, atunci $A+B, AB, \lambda A$ sunt mărginite și avem:

$$\inf(A+B)=\inf A+\inf B,\ \sup(A+B)=\sup A+\sup B,\ \inf(\lambda A)=\begin{cases}\lambda\inf A, \text{dacă } \lambda\ge 0\\ \lambda\sup A, \text{dacă } \lambda<0\end{cases},$$

$$\sup(\lambda A)=\begin{cases}\lambda\sup A, \text{dacă } \lambda\ge 0\\ \lambda\inf A, \text{dacă } \lambda<0\end{cases}.$$

6.1) Fie $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $|a|\le\frac{1}{n}, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Arătați că $a=0$.

2) Arătați că: a) $\inf\left\{\frac{1}{n}\middle|n\in\mathbb{N}^*\right\}=0$; b) $\sup\left\{1-\frac{1}{n}\middle|n\in\mathbb{N}^*\right\}=0$; c) $\inf\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\middle|n,m\in\mathbb{N}^*\right\}=-1$;

d) $\sup\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\middle|n,m\in\mathbb{N}^*\right\}=1$;e) $\inf\left\{\frac{1}{3^n}+\frac{m+1}{m}\middle|n,m\in\mathbb{N}^*\right\}=1$;f) $\sup\left\{\frac{1}{3^n}+\frac{m+1}{m}\middle|n,m\in\mathbb{N}^*\right\}=\frac{5}{2}$.

3) Fie $A=\left\{\frac{n-1}{n}\middle|n\in\mathbb{N}^*\right\}$. Arătați că: a) $\frac{5}{6}\in A$; b) $\min A=0$; c) nu există $\max A$;

d) $\inf A=0$; e) $\sup A=1$.

7.Să se rezolve: 1)ecuațiile: a) $|x|+x^3=0$; b) $|2x-3|=x+1$; c) $|x|+|x+1|=1$;

d) $\left|x^2-9\right|+\left|x^2-4\right|=5$.

2) inecuațiile: a) a) $|x+5|>11$; b) $|2x-5|<3$; c) $|1-2x|>3-x$; d) $\left|\frac{x+2}{2x-3}\right|<3$; e) $|x|+|x-1|<5$.

3) ecuațiile: a) $\left[\frac{x-1}{2}\right]=\frac{x+3}{3}$; b) $\left[\frac{x+4}{3}\right]=\frac{2x-1}{5}$; c) $\left[\frac{2x+3}{4}\right]=\frac{x-4}{3}$.

8.Fie $a,b\in\mathbb{R}$. Definim

$\min(a,b)=\begin{cases}a, \text{dacă } a\le b\\ b, \text{dacă } b<a\end{cases}$, $\max(a,b)=\begin{cases}a, \text{dacă } a\ge b\\ b, \text{dacă } b>a\end{cases}$. Arătați că:

$\min(a,b)=\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$, $\max(a,b)=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$, $\min(a,b)+\max(a,b)=a+b$.

9.Să se arate că următoarele funcții sunt mărginite pe mulțimile de definiție:

1) $f:[-1,5]\to\mathbb{R}, f(x)=-3x+2$; 2) $f:[-2,4]\to\mathbb{R}, f(x)=x^3$;

3) $f:[-1,3]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}-3x, x\in[-1,0]\\ 2x+5, x\in(0,3]\end{cases}$; 4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$;

5) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{|x|}{|x|+1}$.

10.Determinați $\inf\limits_{x\in E}f(x), \sup\limits_{x\in E}f(x)$ pentru $f:E\to\mathbb{R}$ în cazurile:

1) $f(x)=3x+2, E=[-1,2]$; 2) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}, E=[0,3]$; 3) $f(x)=x^2-2x, x\in[-1,3]$;

4) $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}, x\in[0,1]$; 5) $f(x)=\sin x+1, x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$; 6) $f(x)=3^{-x}-1, x\in[-1,1]$.

11.1) Arătați că: a) $[-1,1]\in\vartheta(0)$; b) $[-1,1]\notin\vartheta(-1), [-1,1]\notin\vartheta(1)$.

2) Să se determine mulțimile punctelor de acumulare și a punctelor izolate în cazurile:

a) $\{-1\}\cup(0,1)$; b) $\{-3\}\cup[-1,0)\cup(2,3)$; c) $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$; d) $(-\infty,-2)\cup\{0\}\cup(2,\infty)$;

e) $\left\{\frac{1}{n}\middle|n\in N^*\right\}$.

12.(Inegalitățile clasice remarcabile) 1) Inegalitatea lui Bernoulli. Dacă $a>-1$ și $n\in\mathbb{N}^*$, atunci $(1+a)^n\ge 1+na$.

2) a) Dacă $a_1,a_2,...,a_n\ge -1$ de același semn, atunci $(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)\ge 1+a_1+...+a_n$.

b) Dacă $a_i>0$ și $a_1a_2...a_n=1$, atunci $a_1+a_2+...+a_n\ge n, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

3) Inegalitatea mediilor. Fie $a_i > 0, i = \overline{1,n}$. Notăm $M_g = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$, $M_a = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$,

$M_h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}$, numite media geometrică, aritmetică și respectiv armonică a numerelor

$a_1, a_2, ..., a_n$.

Atunci: $M_h \le M_g \le M_a$, cu egalitate dacă $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

4) Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz. Pentru orice numere reale $a_i, b_i, i = \overline{1,n}$ are loc inegalitatea: $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$.

5) Inegalitatea lui Minkovski. Să se arate că oricare ar fi numerele reale $a_i, b_i, i = \overline{1,n}$ are loc inegalitatea: $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$.

6) Inegalitatea lui Cebâșev. a) Dacă $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n$, $b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, atunci

$n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) \ge \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$.

b) Dacă $(a_1 \le a_2 \le ... \le a_n, b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n)$ sau $(a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n, b_1 \le b_2 \le ... \le b_n)$, atunci

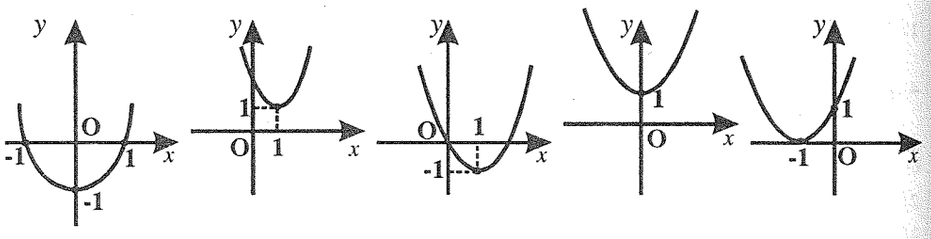
$n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$.

Funcții elementare

1. Asociați fiecărei funcții de mai jos graficul care-i corespunde:

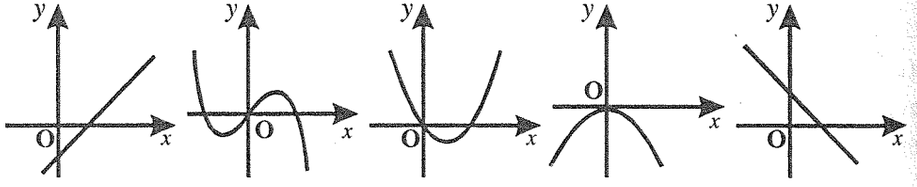
I. 1) $f(x) = x^2 + 1$; 2) $f(x) = (x+1)^2$; 3) $f(x) = x^2 - 1$; 4) $f(x) = (x-1)^2 + 1$;

5) $f(x) = (x-1)^2 - 1$.



a) b) c) d) e)

II. 1) $f(x) = -x^2$; 2) $f(x) = x - 1$; 3) $f(x) = 4x - x^3$; 4) $f(x) = x^2 - 5x$; 5) $f(x) = -x + 1$.



a) b) c) d) e)

2. Plecând de la graficul funcției $f(x) = x^3$, trasați graficele următoarelor funcții:

1) $f(x) = -x^3$; 2) $f(x) = x^3 + 1$; 3) $f(x) = x^3 - 1$; 4) $f(x) = (x+1)^3$; 5) $f(x) = (x-1)^3$.

3. Trasați graficele funcțiilor de mai jos:

I. 1) $f(x) = (x+1)(x-2)$; 2) $f(x) = -3(x-1)(x-2)$; 3) $f(x) = (x-2)^2$; 4) $f(x) = -2(x-1)^2$;

5) $f(x) = x^2 - 3x$; 6) $f(x) = -x^2 + 4$; 7) $f(x) = \max(x, x^2)$; 8) $f(x) = \min(1, x^2)$;

9) $f(x) = \max(2x+1, x^2+1)$; 10) $f(x) = \min(x^2, -2x^2+1)$.

II. 1) $f(x) = x(x-1)(x-2)$; 2) $f(x) = x^2(x-2)$; 3) $f(x) = -(x+3)(x+1)(x-1)$;

4) $f(x) = -x(x+2)^2$; 5) $f(x) = (x-1)(x+3)^2$; 6) $f(x) = -(x+2)^2(x-2)$; 7) $f(x) = (x-1)^3$;

8) $f(x) = (1-x)^3$; 9) $f(x) = \max(x^3, x)$; 10) $f(x) = \min(x^2, x^4)$.

4. Determinați funcția $f(x) = x^2 + bx + c$, dacă parabola asociată (pe rând):

1) taie axa Ox în punctele $(2,0)$ și $(3,0)$;

2) taie axa Ox în punctele $(-3,0), (-1,0)$;

3) conține punctele $(2,1), (-3,0)$.

5. Deteminați punctele de intersecție dintre următoarele drepte și curbe:

1) $y = 2, y = x^2 - 3x + 4$; 2) $y = 2x - 1, y = x^2$; 3) $y + 3 = 0, y = 2x^2 + 5x - 6$;

4) $y = 2x + 3, y = x^2 + 3x - 9$.

6. Determinați punctele de intersecție ale curbelor:

1) $y = x^2 - 2x - 6, y = -2x^2 + x + 12$; 2) $y = x^2 - 3x - 7, y = x^2 + x + 1$.

7. Arătați că dreapta $y = -3x + 2$ este tangentă curbei $y = (4x-3)(x-2)$ și determinați punctul de tangență.

8. Pentru curbele $y = 2x^2 + 5x, y = x^2 + 4x + 12, y = 3x^2 + 4x - 6$ precizați punctul comun.

9. Precizați domeniile de definiție ale funcțiilor:

1) $f(x) = \frac{1}{x-1}$; 2) $f(x) = \frac{x}{x(x+1)}$; 3) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-3x}$; 4) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$;

5) $f(x) = \frac{x^3-x+1}{x^2-5x+6}$; 6) $f(x) = \frac{x+1}{x^3-2x^2+x}$.

10. Trasați graficele următoarelor funcții:

1) $f(x) = \frac{1}{x-1}$; 2) $f(x) = \frac{1}{|x-1|}$; 3) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$; 4) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$; 5) $f(x) = \frac{1}{x^4}$;

6) $f(x) = \frac{1}{(x+2)}$; 7) $f(x) = \frac{1}{(x-3)^4}$.

11. Să se determine punctele de extrem ale funcțiilor $f: D \to \mathbb{R}$ (precizați $\operatorname{Im} f$):

1) $f(x) = x^2 - 3x + 2$; 2) $f(x) = |x-1|$; 3) $f(x) = |x-1| + |x-2|$; 4) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$;

5) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-x+1}$; 6) $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

12. Arătați că următoarele funcții sunt mărginite:

1) $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+1}$; 2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2+1}$; 3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$;

4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{2|x|+3}{|x|+1}$.

13. Să se determine semnul funcției f în cazurile:

1) $f(x)=1-3x$; 2) $f(x)=-x^2+3x$; 3) $f(x)=x^2-9$; 4) $f(x)=\dfrac{3}{2x+1}$; 5) $f(x)=\dfrac{-1}{1-x}$;

6) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$; 7) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+3}$; 8) $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2-4}$.

14. Dacă $f_i:\mathbb{R}-\{0,1\}\to\mathbb{R}-\{0,1\}, i=1,2,3$ sunt definite prin $f_1(x)=x, f_2(x)=\dfrac{x-1}{x}$, $f_3(x)=\dfrac{1}{1-x}$ și $A=\{f_1,f_2,f_3\}$, atunci $f_i\circ f_j\in A, \forall i,j=1,2,3$.

15. Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea $3f(x)+2f(-x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ este impară și mărginită, iar funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea $2g(x)+g(-x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ este pară și mărginită.

16. Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x^2+3}, g(x)=2x$. Să se calculeze $f(g(-1)), g(f(-2)), f(g(3))$.

17. Fie $f:\mathbb{R}-\{-1,0\}\to\mathbb{R}-\{-1,0\}, f(x)=\dfrac{-1}{x+1}$. Calculați $f\circ f$.

18. Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2x+1, x\in\mathbb{Q}\\ \dfrac{3x}{1-2x}, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$ este bijectivă. Determinați f^{-1}.

19. Să se determine domeniul maxim de definiție al funcției $f:D\to\mathbb{R}$, în cazurile:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\sqrt{2-x}$; 2) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$; 3) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$; 4) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}+\dfrac{1}{x+1}$;

5) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+\sqrt{|x|+1}$; 6) $f(x)=\sqrt{|x|-2}+\dfrac{1}{x^2-9}$; 7) $f(x)=\sqrt{\{x\}-2}$;

8) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{(x+1)(x-3)}$; 9) $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{3-x}$; 10) $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x-2}$.

20. Să se calculeze valorile funcției și preimaginile în punctele indicate:

1) $f(x)=\begin{cases}3x+1, x\le -1\\ \dfrac{x}{2x+3}, x>-1\end{cases}, f(-2), f(-1), f(0), f^{-1}(\{-2\}), f^{-1}(\{3\})$.

2) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1}, x\ge 0\\ \sqrt[3]{\dfrac{x}{x-3}}, x<0\end{cases}, f(-3), f(0), f(3), f^{-1}(\{-1\}), f^{-1}(\{1\})$.

21. Să se determine mulțimea valorilor funcției $f:D\to\mathbb{R}$, în cazurile:

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+1$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$; 3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+1}$; 4) $f:(-\infty,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1-x}$; 5) $f:[1,3]\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x+1}$; 6) $f:[-2,3]\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{1-x}$.

22. Precizați monotonia funcției pe intervalul indicat, în cazurile:

1) $f(x)=x^2+1, x\in[0,\infty)$; 2) $f(x)=x^2-4x+3, x\in(-\infty,2]$; 3) $f(x)=x^3-3x, x\in(-1,1)$;

4) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}, x<1$; 5) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}, x\ge 1$; 6) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x}, x\ge 2$; 7) $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2+1}, x>0$;

8) $f(x)=\dfrac{3}{x+2}+\dfrac{3}{4-x}, x\in(1,3)$.

23. Determinați intervalele de monotonie ale funcției $f:D\to\mathbb{R}, D$ fiind domeniul maxim de definiție, în cazurile:

1) $f(x)=x^2-3x+2$; 2) $f(x)=-x^2+4x-4$; 3) $f(x)=|x-1|-3|x+2|$; 4) $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$;

5) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$; 6) $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$; 7) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}$; 8) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$;

9) $f(x)=3\sqrt{x}+2x$; 10) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-3x$.

24. Să se determine cea mai mică și cea mai mare valoare a funcției f, în cazurile:

1) $f(x)=3x+1, x\in[-2,3]$; 2) $f(x)=1-2x, x\in[-1,1]$; 3) $f(x)=x+|x|, x\in[-3,3]$;

4) $f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}, x\in[0,1]$; 5) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}, x\in\mathbb{R}$; 6) $f(x)=\sqrt{x+1}, x\in[0,3]$;

7) $f(x)=\sqrt{1-x}, x\in[-2,0]$; 8) $f(x)=x^{\frac{1}{5}}, x\in[1,32]$; 9) $f(x)=x^{-\frac{1}{3}}, x\in[1,27]$.

25. Explicați de ce funcțiile: 1) $f(x)=[x]+x$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$; 3) $f(x)=\sqrt[3]{x}+1$, nu au puncte de extrem pe domeniul maxim de definiție.

26. Stabiliți paritatea funcțiilor următoare:

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+x$; 2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x^3+x|$; 3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+|x|$;

4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$; 5) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$; 6) $f:(-\infty,-3]\cup[3,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x(x+3)}+\sqrt{x(x-3)}$.

27. Arătați că dreapta $x=1$ este axă de simetrie pentru graficul lui f, în cazurile:

1) $f(x)=x^2-2x+1$; 2) $f(x)=|x-1|$; 3) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x^2-2x+2}$; 4) $f(x)=\sqrt{|x-1|}$.

28. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$. Să se arate că f este impară și mărginită și $\operatorname{Im} f=(-1,1)$.

29. Precizați care din funcțiile de mai jos este bijectivă și determinați inversele acestor funcții, în cazurile:

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x-1$; 2) $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}-\{3\}, f(x)=\dfrac{3x-1}{x-2}$;

3) $f:[0,\infty)\to(0,1], f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$; 4) $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x+1}$;

5) $f:(-\infty,1]\to[0,\infty), f(x)=\sqrt{1-x}$; 6) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{1-x}$;

7) $f:[-3,\infty)\to(-\infty,1], f(x)=1-\sqrt{x+3}$; 8) $f:(-\infty,1]\to[1,\infty), f(x)=\sqrt{1-x}+1$.

30. Să se rezolve:

a) ecuațiile: 1) $|x|+|x-1|=1$; 2) $|x-1|-3|x+1|=6$; 3) $\sqrt{1+3x}=x-1$; 4) $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6$;

5) $\sqrt{x^2-2x+1}=x^2-3$; 6) $\sqrt{2x^2+5x+2}-\sqrt{(x+2)(x-1)}=\sqrt{3(x+2)}$;

7) $\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}=1$; 8) $x+2\sqrt{x}-8=0$;

b) inecuațiile: 1) $\frac{1-3x}{x}<0$; 2) $(1-3x)(1-x)(2-x)>0$; 3) $\frac{x}{x+1}\geq 3$; 4) $\frac{x(x-1)}{x+1}-x<2$;

5) $(x+2)\sqrt{(4-x)(5-x)}\geq 0$; 6) $\sqrt{2+x}<1$; 7) $\sqrt[3]{x+3}\geq -2$; 8) $\sqrt{x+5}+x<1$.

31. Să se precizeze domeniile maxime de definiție pentru următoarele funcții:

1) $f(x)=3^{\frac{1-x}{\sqrt{x+1}}}$; 2) $f(x)=\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}}$; 3) $f(x)=\frac{1}{x-2}+\log_3(2x+1)$;

4) $f(x)=\frac{1}{x-1}-\lg(1-x)$; 5) $f(x)=\sqrt{x}+\log_{\frac{1}{3}}(x^2-1)$; 6) $f(x)=\sqrt{x+1}-2\ln(4-x^2)$;

7) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(\log_2(x+3))$; 8) $f(x)=\ln(\lg(x-1))$; 9) $f(x)=\log_{x-1}(4-x^2)$;

10) $f(x)=\sqrt{\ln(x-1)}$.

32. a) Să se compare numerele: 1) $(0,1)^{\frac{4}{3}}$ cu $(0,1)^2$; 2) $3^{\sqrt{3}}$ cu $3^{\sqrt{2}}$; 3) $\lg 4,1$ cu $\lg\sqrt{17}$.

b) Să se ordoneze crescător numerele: 1) $(0,1)^3,(0,1)^{-2},1$; 2) $3^{\frac{1}{2}},3^0,3^2$; 3) $2^{\sqrt{2}},2^{1,4},1$;

4) $\log_3 4,\frac{3}{2},\log_2 3$.

33. Să se traseze graficul funcțiilor $f:D\to\mathbb{R}$, unde D este domeniul maxim de definiție:

1) $f(x)=3^{x+1}$; 2) $f(x)=3^x+1$; 3) $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$; 4) $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$;

5) $f(x)=\log_{\frac{1}{5}}(1-x)$; 6) $f(x)=\log_3|x-1|$.

34. Stabiliți paritatea funcțiilor de mai jos

1) $f(x)=2^{x^2}$; 2) $f(x)=2^{x^3}$; 3) $f(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{2}$; 4) $f(x)=\log_2\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)$;

5) $f(x)=\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$; 6) $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$.

35. Arătați că $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x$ este pară și determinați intervalele de monotonie.

Rezolvați ecuația $3^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x=\frac{10}{3}$.

36. Determinați monotonia funcțiilor de mai jos, $f:D\to\mathbb{R}$, unde D este domeniul maxim de definiție:

1) $f(x)=x+3^x$; 2) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-2x$; 3) $f(x)=3^x+5^x$; 4) $f(x)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^x$;

5) $f(x)=\lg(x+1)$; 6) $f(x)=\ln(3-x)$; 7) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4)$; 8) $f(x)=\log_3(x^2-9)$.

37. Să se determine intervalele de monotonie pentru fiecare din funcțiile:

1) $f(x)=2^{x+1}$; 2) $f(x)=2^{(x-1)^2}$; 3) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x+3}$; 4) $f(x)=\lg(x^2-3x+2)$;

5) $f(x)=\lg_{\frac{1}{3}}(1-x)$; 6) $f(x)=\log_{\frac{1}{5}}(x^2-4x)$.

38. Arătați că următoarele funcții sunt inversabile și calculați inversa pentru fiecare din ele:

1) $f:\mathbb{R}\to(0,\infty), f(x)=2^x+4^x$; 2) $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\log_2(x+1)$; 3) $f:\mathbb{R}\to(1,\infty)$, $f(x)=10^x+1$; 4) $f:\left(\frac{1}{2},\infty\right)\to\mathbb{R}, f(x)=\log_3(2x-1)$; 5) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\lg^3 x+1$;

6) $f:\mathbb{R}\to(1,\infty), f(x)=\sqrt{2^x+1}$.

39. Să se determine semnul funcției $f:D\to\mathbb{R}$, D fiind domeniul maxim de definiție.

1) $f(x)=3^x-1$; 2) $f(x)=4^x-3\cdot 2^x+2$; 3) $f(x)=\lg x-2$; 4) $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x+1)$;

5) $f(x)=\lg(x^2-8)$; 6) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4x+5)$; 7) $f(x)=\lg\frac{x}{x+1}$; 8) $f(x)=\ln(x^2-3x+2)$.

40. Să se determine mulțimea valorilor funcției f pe intervalul considerat, în cazurile:

1) $f(x)=3^x+1, x\in[-1,1]$; 2) $f(x)=2^{1-x}$; 3) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}, x\in[-2,1]$;

4) $f(x)=\log_3(2x+1), x\in[1,4]$; 5) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(3x-1), x\in[1,3]$; 6) $f(x)=\log_{\frac{1}{9}}(1-2x)$, $x\in[-4,0]$; 7) $f(x)=[\log_3 x], x\in\left[\frac{1}{9},81\right]$; 8) $f(x)=\lg^2 x-3\lg x+2, x\in[1,100]$.

41. Să se rezolve: a) ecuațiile: 1) $\left(3^x-\frac{1}{3}\right)(2^x-16)=0$; 2) $10^x+5^x-5\cdot 2^x-5=0$;

3) $\left(7+4\sqrt{3}\right)^x+\left(7-4\sqrt{3}\right)^x=4$; 4) $4\cdot 2^{2x}-6^x=18\cdot 3^{2x}$; 5) $1+3^{\frac{x}{2}}=2^x$;

6) $\log_3(x-2)+\log_3 x=\log_3 8$; 7) $\lg^2 x-4\lg x+3=0$; 8) $\log_3 x-\log_x 3=\frac{3}{2}$;

9) $3\log_x 16-4\log_{16} x=2\log_2 x$; 10) $\left(\sqrt{x}\right)^{\lg x}=\sqrt{100x}$; 11) $\log_2(4^x-1)\log_2(4^{x+1}-4)=-1$.

b) inecuațiile: 1) $2^{4x}<16$; 2) $3^x\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}\leq\left(\frac{1}{27}\right)^2$; 3) $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6(x-1)}{x+1}}\leq\left(\sqrt{2}-1\right)^{-x}$;

4) $2^x-2^{x-4}-15<0$; 5) $25^{-x}+5^{-x+1}\geq 50$; 6) $4^x-2\cdot 5^{2x}<10^x$; 7) $\log_3(6x-2)\leq 0$;

8) $\log_{\frac{1}{3}}(3x+2)>0$; 9) $(x-3)\log_{\frac{1}{3}}(x+8)\geq 0$; 10) $\log_{\frac{1}{3}}(x+4)<\log_{\frac{1}{3}}(x^2+x-2)$;

11) $x+\log_2(9-2^x)<3$; 12) $\log_3^2 x-6\log_3 x+5\geq 0$; 13) $5^{\log_5^2 x}+x^{\log_5 x}<10$;

14) $\log_x\left(\frac{2x-5}{2x-4}\right)<0$.

42. Să se determine domeniul maxim D de definiție al funcției $f:D\to\mathbb{R}$:

1) $f(x)=\arcsin(2x-1)$; 2) $f(x)=\arcsin\frac{1}{x+1}$; 3) $f(x)=\arcsin\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$;

4) $f(x)=\arccos(x^2-3x+1)$; 5) $f(x)=\operatorname{arctg}(1+\lg x)$; 6) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{x}{x^2-1}$;

7) $f(x)=\operatorname{arcctg}\sqrt{x^2-4x}$.

43. Comparați numerele: 1) $\arcsin(-0,26)$ și $\arcsin(-0,25)$; 2) $\arccos(0,31)$ și $\arccos(0,30)$;

3) $\operatorname{arctg}3$ și $\operatorname{arctg}(3,1)$; 4) $\operatorname{arcctg}(-2)$ și $\operatorname{arcctg}(-2,1)$.

44. Precizați intervalele de monotonie ale funcției $f:D\to\mathbb{R}$, unde D este domeniul de definiție.

1) $f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right), D=\left[-\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$; 2) $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right), D=\left[-\frac{5\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$.

45. Să se determine valoarea minimă și maximă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, în cazurile:

1) $f(x)=3\cos 3x-4\sin 3x-2$; 2) $f(x)=12\sin 2x+5\cos 2x+1$; 3) $f(x)=\cos 2x-3\cos x$.

46. Arătați că: 1) $\sin\left(2\operatorname{arctg}(-3)\right)=-\frac{3}{5}$; 2) $\cos\left(2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{3}{5}$; 3) $\arcsin(\sin 2)=\pi-2$;

4) $\arccos(\cos 4)=2\pi-4$; 5) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 3)=3-\pi$; 6) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 4)=4-\pi$.

47. Reprezentați grafic funcțiile: 1) $f(x)=\cos(2\arccos x)$; 2) $f(x)=\cos(2\arcsin x)$.

48. Arătați că: a) inversa funcției $f:\left[\frac{7\pi}{2},\frac{9\pi}{2}\right]\to[-1,1], f(x)=\sin x$ este

$f^{-1}:[-1,1]\to\left[\frac{7\pi}{2},\frac{9\pi}{2}\right], f^{-1}(x)=4\pi+\arcsin x$; b) inversa funcției $f:[8\pi,9\pi]\to[-1,1]$,

$f(x)=\cos x$ este $f^{-1}:[-1,1]\to[8\pi,9\pi], f^{-1}(x)=8\pi+\arccos x$.

49. Să se determine mulțimea valorilor funcțiilor: 1) $f(x)=\arcsin\left(-\sqrt{x}\right)$; 2) $f(x)=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

50. Precizați care din funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este periodică.

1) $f(x)=x$; 2) $f(x)=[x]$; 3) $f(x)=\{x\}$; 4) $f(x)=\{2x\}$; 5) $f(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbb{Q}\\0, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$;

6) $f(x)=\sqrt[3]{x}$; 7) $f(x)=\sqrt[3]{\sin x}$; 8) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, 2k\le x<2k+1\\1, 2k+1\le x<2k+2\end{cases}, k\in\mathbb{Z}$;

9) $f(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbb{Z}\\2, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\end{cases}$.

51. Să se arate că pentru orice $t>0$ există o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ periodică de perioadă principală t.

52. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție periodică de perioadă principală $T>0$. Atunci $f([0,T])=f(\mathbb{R})$.

2. ŞIRURI

Este unul din capitolele importante ale analizei matematice. De înțelegerea lui depinde posibilitatea unei bune cunoașteri și înțelegeri ale rezultatelor din celelalte capitole. Se studiază șirurile, convergente. Pentru șirurile convergente sunt prezentate rezultate referitoare la operații cu astfel de șiruri. Se dau criterii pentru convergența unui șir.

Istoric. Contribuții importante la acest capitol a adus matematicianul francez A.L. Cauchy (1789-1857). A fost primul care a formulat definițiile noțiunilor fundamentale ale analizei matematice: limită, continuitate, etc., într-un mod specific matematicii moderne.
Școala matematică germană a fost reprezentată de K. Weierstrass (1815-1897), numit „prințul" analiștilor pentru acuratețea și eleganța cu care a soluționat unele probleme fundamentale ale analizei matematice.
Alte rezultate ale acestui capitol sunt legate de numele matematicianului ceh B. Bolzano (1781-1848).

- Definirea unui șir 205
- Șiruri care au limită. Șiruri convergente 211
- Operații cu șiruri care au limită 237
- Limita șirurilor monotone 265
- Șiruri în probleme practice 281
- Teste de evaluare 284

2.1. DEFINIREA UNUI ŞIR

Cu acest concept v-ați întâlnit și în anii precedenți, atunci când ați studiat progresiile aritmetice și geometrice sau la probleme de numărare unde au apărut șiruri recurente. În limbajul uzual, prin șir de numere reale se înțelege o succesiune infinită de numere distincte sau nu, scrise unul după altul, în care fiecare număr ocupă un loc bine precizat (primul, al doilea ...). De fapt, se stabilește o corespondență între mulțimea numerelor naturale nenule, $\mathbb{N}^*$ și mulțimea numerelor reale, $\mathbb{R}$. Mai precis are loc următoarea:

Definiție. Se numește șir de numere reale orice funcție $x:\mathbb{N}-A_k\to\mathbb{R}$, unde $A_k=\{0,1,2,...,k\}$.

Exemple. 1) $x:\mathbb{N}-A_2\to\mathbb{R}$, $x(n)=\sqrt{n^2-9}$, $A_2=\{0,1,2\}$;

2) $x:\mathbb{N}-A_0\to\mathbb{R}$, $x(n)=\sqrt{n^2-1}$, $A_0=\{0\}$;

3) $x:\mathbb{N}-A\to\mathbb{R}$, $x(n)=\dfrac{1}{1+(-1)^{n+1}}$, $A=\{n\in\mathbb{N}\mid \text{număr par}\}$.

Această funcție nu este șir deoarece A este infinită.

4) $x:\mathbb{N}-A\to\mathbb{R}$, $x(n)=n^2+n$, $A=\varnothing$.

Vom presupune în general că $A=\varnothing$ sau $A=\{0\}$ și vorbim de șiruri $x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ sau $x:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$.

Notație. Fie șirul $x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. Numărul real $x(n)$, $n\in\mathbb{N}$ se notează în general prin x_n (litera x indexată jos în dreapta prin n) și se numește **termenul general de rang n al șirului** x.

Cu alte cuvinte, un șir în $\mathbb{R}$ asociază fiecărui număr natural 0, 1, 2, ... un unic număr real bine determinat $x_0, x_1, x_2, \ldots$

Șirul x îl vom nota prin $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sau $(x_n)_n$ sau simplu (x_n).

Am utilizat parantezele rotunde în descrierea unui șir pentru a sublinia că ordinea indusă de ordinea de pe $\mathbb{N}$ este foarte importantă. Astfel, distingem notația $(x_n)_n$, în care avem o infinitate de termeni ordonați de notația $\{x_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ care reprezintă mulțimea valorilor șirului x. Un șir nu este o mulțime !

Exemplu. **Fie șirul $1,0,1,0,1,\ldots$, adică $x_0=1$, $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=0$, $x_4=1$, ...**

În șir elementele se pot repeta, în timp ce elementele unei mulțimi sunt distincte între ele. În acest caz elementele care se repetă în șir sunt 1 și 0, iar mulțimea formată cu termenii șirului este: $\{x_n\mid n\in\mathbb{N}\}=\{0,1\}$.

Dacă elementele unei mulțimi se pot scrie în orice ordine (nu contează ordinea în care sunt descrise), **pentru elementele unui șir este esențial locul pe care îl ocupă fiecare.**

De exemplu, șirurile $(x_n):1,2,3,4,\ldots,n,n+1,\ldots$; $(y_n):2,1,4,3,\ldots,n+1,n,\ldots$ sunt diferite, deși sunt formate din aceleași numere: 1, 2, 3, ..., n, ...

Are loc următoarea:

> **Definiție.** Două șiruri (x_n), (y_n) **sunt egale** dacă $x_n=y_n$, $\forall n$ și scriem $(x_n)=(y_n)$.

Așa cum s-a văzut mai sus pentru a denumi un șir utilizăm și alte litere: (a_n), (b_n), ..., (y_n), (z_n), ...

Exemple de șiruri. **1) $(a_n):a,a,a,\ldots$ (șir constant – are toți termenii egali cu a);**

2) $(x_n):1,-1,1,-1,1,\ldots$ **(șir alternant);**

3) $(y_n):1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\ldots,\dfrac{1}{n},\ldots$ **(șirul inverselor numerelor naturale nenule);**

4) $(z_n):1,\sqrt{2},\sqrt{3},\ldots,\sqrt{n},\ldots$ **(șirul rădăcinilor pătrate ale numerelor naturale nenule).**

Deoarece în cele ce urmează este important să vizualizăm o parte din termenii unui șir, este util să-i reprezentăm fie în planul xOy prin puncte (n, x_n), fie pe axa reală, indicând poziția lui x_n pe această axă.

Cum sunt diferite moduri de a nota un șir (x_n), (a_n), (b_n), ..., aceasta înseamnă că n **este variabilă independentă**, iar $x, a, b, \ldots$ **este variabilă dependentă.** Deci, **în reprezentarea grafică într-un reper cartezian ca axă a absciselor avem întotdeauna** On (în locul lui Ox), **iar ca axă a ordonatelor avem:** $Ox, Oa, Ob, \ldots$!

Exemple. **1) $(a_n):1,1,1,\ldots$ (șirul constant 1 are toți termenii egali cu 1) cu reprezentarea în reperul nOa în Fig.1, iar pe axă în Fig.2.**

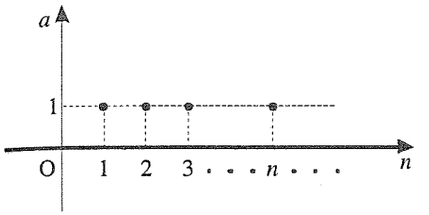


Fig. 1

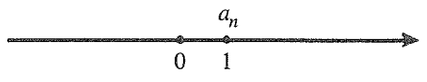


Fig. 2

2) $(b_n):-1,1,-1,1,-1,\ldots$ are reprezentarea grafică în reperul nOb în Fig.3, iar pe axă în Fig.4.

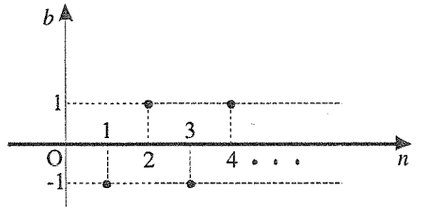


Fig. 3

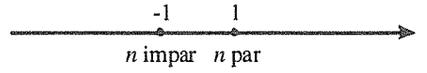


Fig. 4

Modalități de definire a unui șir

În anii precedenți am văzut că putem defini un șir în mai multe moduri.

1) **Șir definit descriptiv**, prin enumerarea termenilor săi.

Exemplu. $a_1=1$, $a_2=10$, $a_3=101$, $a_4=1010$, ...

2) **Șir definit printr-o regulă sau mai multe reguli de calcul.** În acest caz se dă o exprimare analitică pentru termenul de rang n, a_n, care permite calcularea oricărui termen al șirului.

Exemple. 1) $a_n = \frac{n}{2n+1}$, $n \geq 0$, când $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{2}{5}$, ...

2) $x_n = \begin{cases} n+1, n \text{ par} \\ n^2, n \text{ impar} \end{cases}$, $n \geq 0$. Aici $x_0 = 0+1 = 1, x_1 = 1^2 = 1, x_2 = 2+1 = 3, x_3 = 3^2 = 9, \ldots$

3) $y_n = \begin{cases} n, n = 3k \\ 2n+1, n = 3k+1, n \geq 0, k \in \mathbb{N} \\ 2n-1, n = 3k+2 \end{cases}$. Avem: $y_0 = y_{3\cdot 0} = 0, y_1 = y_{3\cdot 0+1} = 3, y_2 = y_{3\cdot 0+2} = 3, \ldots$

3) **Şir definit printr-o relaţie de recurenţă.** Un termen al şirului se exprimă în funcţie de unul sau mai mulţi termeni precedenţi. Pentru a determina bine elementele şirului trebuie, iniţial, daţi unul sau mai mulţi termeni.

Exemple. 1) $(a_n): a_1 = a \in \mathbb{R}$, **fixat,** $a_{n+1} = a_n + r$, $n \geq 1$, $r \in \mathbb{R}$, r **fixat (progresia aritmetică de raţie** r**);**

2) $(b_n): b_1 = b \in \mathbb{R}^*$, **fixat,** $b_{n+1} = q\, b_n$, $n \geq 1$, $q \in \mathbb{R}^*$, q **fixat (progresia geometrică de raţie** q**);**

3) $(c_n): c_0 = 1$, $c_{n+1} = (n+1)c_n$, $n \geq 0$ **(şirul factorialelor);**

4) $(f_n): f_0 = f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, $n \geq 1$ **(şirul lui Fibonacci).**

Subşir al unui şir

Se consideră şirul $(x_n): x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}, \ldots$

În acest şir am pus în evidenţă două tipuri de termeni:

1) $x_1, x_3, x_5, \ldots, x_{2n-1}, \ldots$ (termeni de rang impar – scrişi cu negru);

2) $x_0, x_2, x_4, x_6, \ldots, x_{2n}, \ldots$ (termeni de rang par – scrişi cu roşu).

Termenii din 1) constituie un şir format cu elemente din şirul dat şi anume cu elementele de rang impar, în timp ce termenii din 2) formează un şir având ca termeni elementele şirului dat care au rangul par. Se spune că am construit şirurile 1) şi 2) „selectând" elementele, după o anumită regulă, din şirul dat.

Şirurile 1), 2) se numesc **subşiruri** ale şirului dat. Observaţi că în cele două subşiruri rangurile termenilor sunt în ordine strict crescătoare: $1 < 3 < 5 < \ldots < 2n-1 < \ldots$ şi $0 < 2 < 4 < 6 < \ldots < 2n < \ldots$

Are loc următoarea:

Definiţie. Se numeşte **subşir al şirului** $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ orice compunere $x \circ k$, a lui x cu un şir strict crescător de numere naturale $k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (Fig.5).

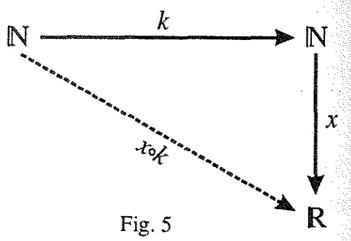


Fig. 5

Avem $(x \circ k)(n) = x(k(n)) = x(k_n) = x_{k_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Deci subşirul $x \circ k$ se scrie $(x_{k_n}): x_{k_0}, x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \ldots$

Observaţie. Arătaţi inductiv că avem: $k_n \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exemple. **1)** $k = 1_{\mathbb{N}}$ **este strict crescătoare şi** $(x_{k_n}) = (x_n)$**. Deci, orice şir** $(x_n)_n$ **este un subşir al său.**

2) $k_n = 2n+1$, $n \in \mathbf{N}$.

Funcţia k **este strict crescătoare şi** $(x_{k_n}) = (x_{2n+1}): x_1, x_3, x_5, \ldots, x_{2n+1}, \ldots$ **se numeşte subşirul termenilor de rang impar al şirului** (x_n)**.**

3) $k_n = 2n, n \in \mathbf{N}$**. Funcţia** k **este strict crescătoare şi** $(x_{k_n}) = (x_{2n}): x_0, x_2, x_4, \ldots, x_{2n}, \ldots$ **se numeşte subşirul termenilor de rang par al şirului** (x_n)**.**

4) $k_n = n+l$, $l \in \mathbf{N}$**. Avem** k **strict crescătoare, iar** $(x_{k_n}) = (x_{n+l}): x_l, x_{l+1}, x_{l+2}, \ldots, x_{n+l}, \ldots$

Subşirul $(x_{n+l})_n$ **se mai notează** $(x_n)_{n \geq l}$**. Acest subşir se obţine din** (x_n) **prin eliminarea termenilor** $x_0, x_1, \ldots, x_{l-1}$**.**

5) $k_n = 2^n$, $n \in \mathbf{N}$**. Din nou** k **este strict crescătoare, iar**

$(x_{k_n}) = (x_{2^n}): x_1, x_2, x_4, x_8, \ldots, x_{2^n}, \ldots$

Observaţie. Subşirul (x_{k_n}) se mai numeşte **şir extras** din şirul (x_n).

Operaţii cu şiruri de numere reale

Am văzut că un şir de numere reale este o funcţie particulară $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Prin urmare operaţiile cu funcţii se regăsesc şi pentru şiruri.

Deci, avem următoarea:

Definiţie. Fie $(x_n), (y_n)$ două şiruri de numere reale.

1) **Suma şirurilor** $(x_n), (y_n)$ este şirul notat
$(x_n + y_n): x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots, x_n + y_n, \ldots$

2) **Diferenţa şirurilor** $(x_n), (y_n)$ este şirul notat
$(x_n - y_n): x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, \ldots, x_n - y_n, \ldots$

3) Produsul dintre o constantă $\alpha \in \mathbb{R}$ şi şirul (x_n) este şirul notat
$(\alpha\, x_n): \alpha\, x_1, \alpha\, x_2, \alpha\, x_3, \ldots, \alpha\, x_n, \ldots$

4) **Produsul şirurilor** $(x_n), (y_n)$ este şirul notat
$(x_n y_n): x_1 y_1, x_2 y_2, x_3 y_3, \ldots, x_n y_n, \ldots$

5) **Câtul şirurilor** $(x_n), (y_n)$, $y_n \neq 0, \forall\, n$ este şirul notat
$\left(\frac{x_n}{y_n}\right): \frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}, \ldots$

Exemple. **1)** $x_n = 1$, $y_n = -1$, $\forall\, n$**. Atunci** $(x_n + y_n): 1-1 = 0, 1-1 = 0, 1-1 = 0, \ldots, 1-1 = 0, \ldots$

2) $\alpha = 3$, $x_n = n$, $\forall\, n$**. Atunci** $3(x_n): 0, 3, 6, 9, \ldots, 3n, \ldots$

3) $(x_n):1,0,1,0,1,...,(y_n):0,1,0,1,0,...$ Atunci $(x_n y_n):1\cdot 0=0,0\cdot 1=0,1\cdot 0=0,0\cdot 1=0,...$

Probleme propuse

Definirea unui şir

1. Să se scrie primii cinci termeni ai şirurilor definite prin formulele:

1) $x_n=1+(-1)^n, n\geq 1$; 2) $x_n=1+(-1)^n n, n\geq 1$; 3) $x_n=n^2-2n, n\geq 0$;

4) $x_n=\frac{n+1}{2n+3}, n\geq 0$; 5) $x_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}, n\geq 0$; 6) $x_n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}, n\geq 1$;

7) $x_n=2^n-1, n\geq 0$; 8) $x_n=\log_{\frac{1}{2}} n, n\geq 1$; 9) $x_n=C_{n+1}^n, n\geq 1$; 10) $x_n=\sin\frac{n\pi}{2}, n\geq 1$;

11) $x_n=\begin{cases}1, n=3k\\ 1-\frac{1}{n}, n=3k+1\\ \sqrt{n}, n=3k+2, k\in\mathbb{N}, n\geq 1\end{cases}$; 12) $x_0=1, x_{n+1}=f(x_n), n\geq 0, f(x)=A_{x+1}^x, x\geq 1$.

2. Stabiliți care din numerele alăturate şirurilor sunt termeni ai acestora:

1) $x_n=3n+5$; 100; 101; 245; 2) $x_n=n-2n^2$; −190; −790; −19900;

3) $x_n=\frac{n^2+1}{2n}$; $\frac{21}{20},\frac{26}{10},\frac{65}{16}$; 4) $x_n=\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$; $3\sqrt{2}-4, 3-\sqrt{5}, 5-\sqrt{23}$;

5) $x_1=1, x_{n+1}=\frac{2x_n}{x_n+3}$; $\frac{3}{7},\frac{2}{7},\frac{4}{23}$; 6) $x_0=1, x_{n+1}=x_n\sqrt{2}$; $128\sqrt{2}, 132\sqrt{2}$.

3. Scrieți primii cinci termeni ai şirurilor definite recurent:

1) $a_1=1, a_n=a_{n-1}+3, n\geq 2$; 2) $a_1=-1, a_{n+1}=2a_n-1, n\geq 1$; 3) $a_1=2, a_{n+1}=\frac{a_n}{1+a_n}, n\geq 1$;

4) $a_1=\frac{1}{2}, a_{n+1}=2a_n, n\geq 1$; 5) $a_0=1, a_1=-1, a_{n+2}=a_{n+1}+a_n, n\geq 0$.

4. Determinați termenul general al şirurilor: 1) −2, 0, 2, −2, 0, 2, ...; 2) 2, 4, 6, 8, 10, ...;

3) 3, −3, 3, −3, 3, −3, ...; 4) 1, 2, 4, 8, 16, ...; 5) $\frac{1}{1},\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16},...$; 6) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},....$

5. Calculând câțiva termeni ai şirurilor definite prin relații de recurență, determinați forma termenului general:

1) $x_1=1, x_{n+1}=2x_n-n+1, n\geq 1$; 2) $x_1=1, x_2=4, x_{n+1}=2x_n-x_{n-1}+2, n\geq 2$;

3) $x_1=1, x_{n+1}=\frac{x_n}{1+x_n}, n\geq 1$; 4) $x_1=1, nx_{n+1}(1+x_n)=1$; 5) $x_1=2, x_{n+1}=\frac{2x_n-1}{x_n}, n\geq 1$.

6. Să se determine mulțimile de valori ale şirurilor:

1) $x_n=(-1)^n 2+3, n\geq 1$; 2) $x_n=\sin\frac{2n\pi}{3}$; 3) $x_1=3, x_{n+1}=\frac{-x_n}{1+x_n}$;

4) $x_1=1, x_{n+1}=x_n^2-1, n\geq 1$; 5) $x_1=2, x_{n+1}=\frac{2-x_n}{1-x_n}, n\geq 1$; 6) $x_1=\frac{1}{2}, x_{n+1}=\frac{2}{2-x_n}, n\geq 1$.

7. Determinați relațiile de recurență pentru şirurile: 1) $x_n=n\left(\frac{1}{3}\right)^n$; 2) $x_n=\frac{5^n}{n!}, n\geq 5$.

8. Fie şirurile $(x_n),(y_n)$ cu $x_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$, $y_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}$. Să se arate că $x_n=y_n, \forall n\geq 1$ (identitatea Botez – Catalan).

9. Să se determine termenul general al şirurilor definite recurent:

1) $a_1=3, a_{n+1}=a_n+4, n\geq 1$; 2) $b_1=2, b_{n+1}=3b_n, n\geq 1$; 3) $c_1=-1, c_{n+1}=3c_n+1, n\geq 1$;

4) $d_1=1, d_{n+1}=d_n+n, n\geq 1$; 5) $e_1=1, e_{n+1}=e_n+n^2, n\geq 1$; 6) $f_1=1, f_{n+1}=f_n+3^n, n\geq 1$;

7) $g_1=0, g_{n+1}=g_n+n\left(\frac{1}{2}\right)^n, n\geq 1$; 8) $h_1=1, h_{n+1}=h_n+n(n+1), n\geq 1$;

10. Fie $(x_n):-1,0,1,-1,0,1,-1,0,1,...$. Determinați subşirurile $(x_{3n}),(x_{3n+1}),(x_{3n+2})$.

11. Fie şirul (x_n) cu $x_n=\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), n\geq 0$. Determinați subşirurile $(x_{2n}),(x_{2n+1}), n\geq 0$.

12. Fie (x_n) un şir de numere şi subşirurile $(x_{2n}),(x_{2n+1}),(x_{3n})$. Construiți un subşir comun subşirurilor $(x_{2n}),(x_{3n})$. Analog pentru $(x_{2n+1}),(x_{3n})$.

2.2. ŞIRURI CARE AU LIMITĂ. ŞIRURI CONVERGENTE

Exemple de şiruri care au limită

Reamintim că V este o vecinătate a numărului real x, dacă şi numai dacă V conține un interval centrat în x, adică dacă există $\varepsilon>0$ astfel încât $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\subset V$. Am numit $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, vecinătate simetrică în x. În particular, pentru fiecare $\varepsilon>0$, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ este o vecinătate a lui x, iar $x_n\in(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\Leftrightarrow |x_n-x|<\varepsilon$.

Pentru $+\infty$ se consideră vecinătăți de forma $(\alpha,+\infty], \alpha\in\mathbb{R}$, iar $x_n\in(\alpha,+\infty]\Leftrightarrow x_n>\alpha$.

Pentru $-\infty$ vecinătățile au forma $[-\infty,\beta), \beta\in\mathbb{R}$, iar $x_n\in[-\infty,\beta)\Leftrightarrow x_n<\beta$.

Mulțimea vecinătăților lui $x\in\overline{\mathbb{R}}$ se notează $\vartheta(x)$.

1) Să analizăm şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, cu termenul general $x_n=\frac{1}{n}, n\geq 1$, din punct de vedere al valorii termenilor lui, poziționând aceşti termeni în reperul xOy sau pe axa reală (Fig.6).

Calculăm câțiva termeni ai acestui şir şi avem: $x_1=1, x_2=\frac{1}{2}, x_3=\frac{1}{3}, x_4=\frac{1}{4}, ...$

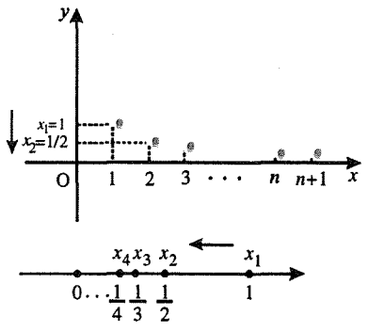


Fig. 6

În reperul cartezian xOy graficul şirului conţine puncte din ce în ce mai apropiate de Ox, cu cât rangul n este mai mare. Valorile termenilor şirului (x_n) sunt reprezentate pe axa Oy. Să mai observăm că şirul este restricţia funcţiei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x}$, la $\mathbb{N}^*$. Graficul acestei funcţii are axa Ox ca asimptotă orizontală la $+\infty$.

Observăm că termenii şirului „se apropie" de valoarea zero. Cu cât rangul n al termenului este mai mare cu atât termenul x_n este mai apropiat de zero. Putem face ca termenii să fie cât mai apropiaţi de zero dacă rangul lor este suficient de mare. Constatăm că termenii se apropie de zero din dreapta. Spunem că şirul (x_n) este **descrescător spre zero**.

Acest aspect intuitiv îl putem explicita şi formula matematic precis.

Pentru aceasta fie $V\in\vartheta(0)$ pentru care $V_\varepsilon'=(-\varepsilon,\varepsilon)\subset V$, $\varepsilon>0$ (Fig.7).

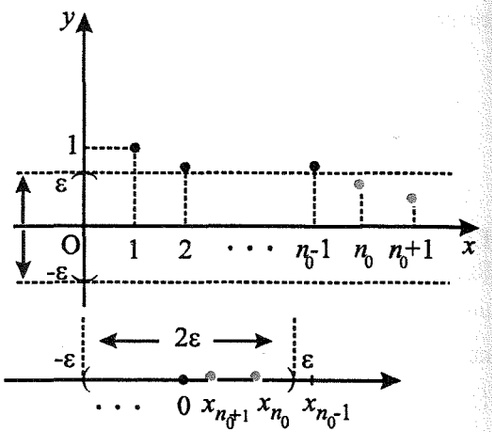


Fig. 7

A spune că $x_n\in V_\varepsilon'$ este echivalent cu $-\varepsilon<x_n<\varepsilon$ sau încă $|x_n-0|<\varepsilon$ ($|x_n-0|$ = distanţa de la termenul x_n la 0) sau $\frac{1}{n}<\varepsilon$. Conform proprietăţii lui Arhimede există un număr natural $n_0>\frac{1}{\varepsilon}$

(Se poate lua $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a).

Acum dacă $n\geq n_0$, atunci $n\geq n_0>\frac{1}{\varepsilon}$, adică $\frac{1}{n}<\varepsilon$ sau $x_n\in V_\varepsilon'$.

Deci, **începând de la un rang, aici n_0, toţi termenii se află în vecinătatea V a lui zero**, $x_n\in V,\forall n\geq n_0$. Deci, **în afara vecinătăţii V se află cel mult un număr finit de termeni** şi anume $x_1,x_2,...,x_{n_0-1}$.

Astfel spus, oricât de mic ar fi un segment de lungime 2ε cu centrul în punctul zero, începând de la un anumit punct (aici x_{n_0}), toate punctele x_n (cu $n\geq n_0$) se află **înăuntrul acestui segment**. Deci, **în afara lui poate rămâne doar un număr finit de astfel de puncte** $(x_1,...,x_{n_0-1})$. Să observăm că numărul n_0 de mai sus depinde de ε (sau mai general de vecinătatea V).

Dacă se dau diferite valori pentru ε, atunci se vor obţine valori diferite pentru n_0. Din acest motiv vom nota $n_0=n_\varepsilon$. Într-adevăr fie $V_2'=(-2,2),(\varepsilon=2)$. Se constată că toţi termenii şirului se află în V_2' pentru că $n_2=\left[\frac{1}{2}\right]+1=1$. Deci pentru $n\geq 1, x_n\in V_2'$. Acum dacă luăm $\varepsilon=\frac{1}{2}$, avem vecinătatea $V_{\frac{1}{2}}'=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ pentru care au loc echivalenţele $x_n\in V_{\frac{1}{2}}'\Leftrightarrow\frac{1}{n}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow n>2$.

Luăm $n_{\frac{1}{2}}=\left[\frac{1}{1/2}\right]+1=2+1=3$ şi pentru $n\geq n_{\frac{1}{2}}$ rezultă $x_n\in V_{\frac{1}{2}}'$. În afara vecinătăţii $V_{\frac{1}{2}}'$ se află doar termenii, **în număr finit**, x_1,x_2 (Fig.8).

Dacă se consideră $\varepsilon=\frac{1}{100}$ şi vecinătatea $V_{\frac{1}{100}}'=\left(-\frac{1}{100},\frac{1}{100}\right)$, atunci $x_n\in V_{\frac{1}{100}}'\Leftrightarrow\frac{1}{n}<\frac{1}{100}\Leftrightarrow n>100$. Aici $n_{\frac{1}{100}}=\left[\frac{1}{1/100}\right]+1=101$.

Deci pentru $n\geq 101, x_n\in V_{\frac{1}{100}}'$, ceea ce arată că în afara acestei vecinătăţi se află primii o sută de termeni (Fig.9).

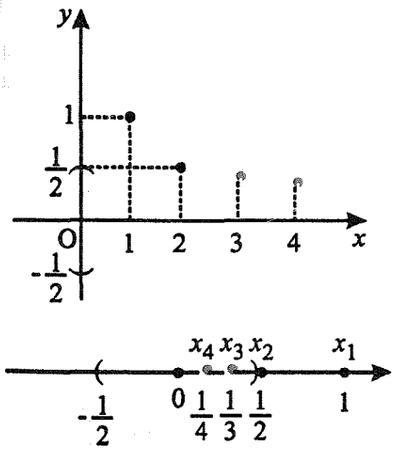


Fig. 8

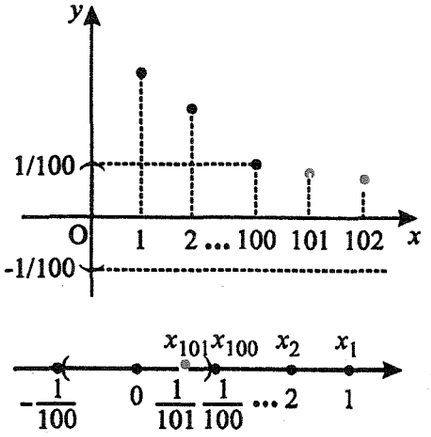


Fig. 9

Se constată uşor că **dacă se micşorează** ε, adică se micşorează vecinătatea lui zero, **atunci rangul** n_ε **creşte**. Cu cât cerem ca valorile termenilor şirului (x_n) să fie mai apropiate de zero, cu atât se consideră valori mai îndepărtate din şirul (n_ε).

Fiecare vecinătate a lui zero conţine toţi termenii şirului $\left(x_n=\frac{1}{n}\right)$, **exceptând un număr finit dintre ei.** Vom spune că **numărul zero este limita şirului** (x_n).

Scriem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ se citeşte: limită din x_n când n tinde la infinit).

În concluzie:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall n\geq n_\varepsilon, -\varepsilon<x_n<\varepsilon$ sau $|x_n-0|<\varepsilon$ sau echivalent (când V nu este explicită în funcţie de ε),

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0 \Leftrightarrow \forall V\in\vartheta(0), \exists n_V\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall n\geq n_V$ să avem $x_n\in V$.

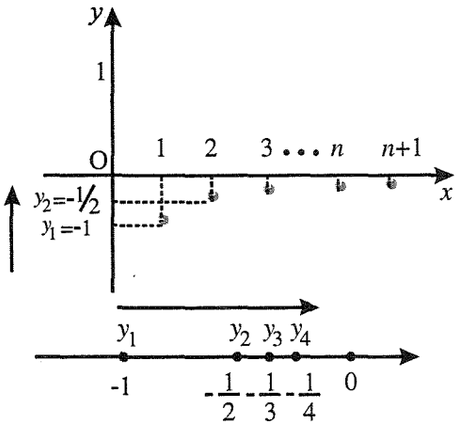


Fig. 10

2) Fie acum şirul (y_n) cu termenul general $y_n=-\frac{1}{n}, n\geq 1$. Dispunând termenii şirului pe axa reală (sau reprezentându-i în reperul xOy), după valoarea pe care o are fiecare termen (Fig.10) constatăm că aceştia „se înghesuie" spre zero din stânga. Spunem că **şirul este strict crescător spre zero**.

Ca mai sus vom încerca să formalizăm matematic această constatare.

Fie $V=(-\varepsilon,\varepsilon)\in\vartheta(0), \varepsilon>0$, o vecinătate simetrică a lui zero, aleasă arbitrar. Avem echivalenţele:

$$y_n\in V \Leftrightarrow -\varepsilon<y_n-0<\varepsilon \Leftrightarrow |y_n-0|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|-\frac{1}{n}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}.$$

Apartenenţa unui termen oarecare al şirului (y_n), y_n la vecinătatea V se traduce printr-o inegalitate care leagă rangul său n şi ε (care defineşte vecinătatea).

Dacă luăm $n_\varepsilon=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, atunci pentru $n\geq n_\varepsilon>\frac{1}{\varepsilon}$ avem $y_n\in V$. Deci, de la rangul n_ε încolo, toţi termenii şirului (y_n) se află în V. În afara acestei vecinătăţi se află

un număr finit de termeni (dacă există) $y_1, y_2, ..., y_{n_\varepsilon-1}$ (Fig.11). Formulaţi o concluzie similară celei de la 1) pentru $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$.

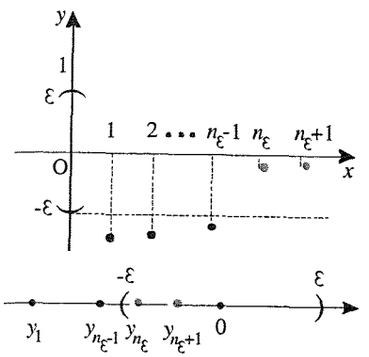


Fig. 11

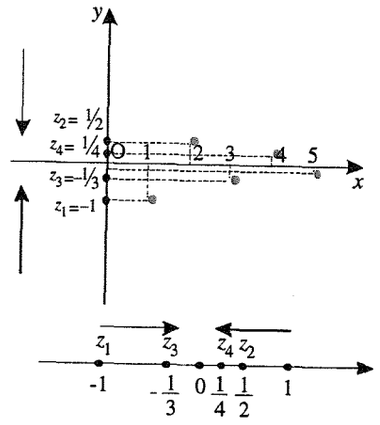


Fig. 12

3) Acest exemplu vine să ilustreze faptul că termenii unui şir se pot apropia de un număr, atât din dreapta cât şi din stânga.

Fie şirul (z_n), definit prin $z_n=\frac{(-1)^n}{n}, n\geq 1$. Dispunem câţiva termeni ai şirului pe axa reală şi în reperul cartezian xOy (Fig.12).

În reperul cartezian xOy, observăm că valorile şirului sunt puse pe Oy: valorile negative (ale termenilor de rang impar) se apropie crescător de zero, iar valorile pozitive (ale termenilor de rang par) se apropie descrescător spre zero.

Cu cât n este mai mare cu atât punctul este mai apropiat de axa Ox.

Se observă că dacă rangul termenului z_n este par, atunci el este situat la dreapta lui zero pe axa reală (subşirul (z_{2n})), iar dacă rangul este impar, atunci el este situat la stânga lui zero (subşirul (z_{2n+1})).

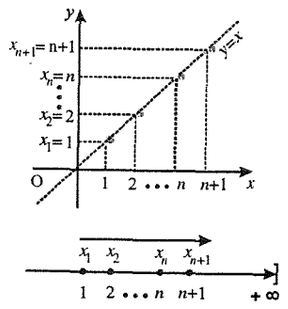


Fig. 13

Dacă $V=(-\varepsilon,\varepsilon), \varepsilon>0$, este o vecinătate simetrică a lui zero, aleasă arbitrar, atunci: $z_n\in V \Leftrightarrow -\varepsilon<z_n-0<\varepsilon \Leftrightarrow |z_n-0|<\varepsilon \Leftrightarrow$

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon},$$

adică aceeaşi condiţie ca la celelalte exemple. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=0$.

Observație. În fiecare din exemplele analizate termenii șirurilor se apropie de o valoare numerică fixă (zero), atunci când n crește indefinit. Am tradus matematic „**apropierea de zero a termenilor**" prin $|x_n-0|, |y_n-0|, |z_n-0|$, iar expresia „*n* **crește indefinit**" prin $\forall n \geq n_0$.

4) Fie șirul (a_n) cu $a_n = n, n \geq 1$. Reprezentarea grafică în reperul xOy și pe axă sunt date în Fig.13. Șirul dat este restricția funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$.

Am văzut că șirul (a_n) este strict crescător și nemărginit. Cum este de așteptat valorile lui nu „se pot
înghesui" către un număr real dat a. Altfel spus, nu există vecinătate a lui a care să conțină aproape toți termenii șirului, cu excepția unui număr finit. Aceasta ar atrage mărginirea șirului, ceea ce-i fals. Să arătăm că $+\infty$ este simbolul spre care „se concentrează" termenii șirului.

Fie $V \in \vartheta(\infty)$. Deci există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $(\alpha, \infty] \subset V$. Atunci se poate găsi un rang $n_\alpha \in \mathbb{N}$, $n_\alpha = [\alpha]+1 > \alpha$. Deci pentru $n \geq n_\alpha$, avem $x_n = n > \alpha$, ceea ce arată că în afara vecinătății V se află cel mult un număr finit de termeni $(x_1, x_2, ..., x_{n_\alpha - 1})$.

Definiția cu vecinătăți a limitei unui șir

Acum putem formula următoarea:

Definiție. Se spune că $x \in \overline{\mathbb{R}}$ **este limita unui șir** (x_n), dacă orice vecinătate a lui x conține toți termenii șirului, exceptând (eventual) un număr finit de termeni.

Formulare echivalentă. Se spune că $x \in \overline{\mathbb{R}}$ **este limita unui șir** (x_n) dacă în afara oricărei vecinătăți a lui x se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului.

Un șir care are limita finită, $x \in \mathbb{R}$, se numește **șir convergent**. Un șir care nu este convergent se numește **șir divergent**.

Un **șir este divergent** în una din situațiile: 1) nu are limită; 2) are limită infinită ($+\infty$ sau $-\infty$).

Dacă x este limita șirului (x_n), atunci scriem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ (citim: limită de x_n când n tinde către infinit este egală cu x) sau $x_n \to x$ (citim: șirul (x_n) tinde către x). Uneori, vom scrie $\lim\limits_{n} x_n = x$ sau simplu $\lim x_n = x$.

Observații. **1)** Un șir (x_n) **este divergent** dacă $\forall a \in \overline{\mathbb{R}}$, există o vecinătate V a lui a astfel încât în afara ei se află o infinitate de termeni ai șirului.

2) Dacă $x_n \to x, x_n \neq x, \forall n$ și $V \in \vartheta(x)$, atunci $(V-\{x\}) \cap \{x_n \mid n \geq 1\} \neq \varnothing$ (altfel spus, orice vecinătate a lui x, conține cel puțin un termen al șirului (x_n), diferit de x). Aceasta înseamnă că: **limita șirului este punct de acumulare pentru mulțimea termenilor șirului.**

Exemple. 1) Șirurile (x_n), (y_n), (z_n) analizate la începutul acestui paragraf sunt convergente la zero. Deci, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$.

2) Șirul (x_n) definit prin $x_n = x$, $\forall n \geq 1$ este șirul constant: x, x, ..., x, ..., în care toți termenii sunt egali cu x. Este clar că orice vecinătate a lui x conține, în acest caz, toți termenii șirului. Deci, șirul este convergent și x este limita șirului. Scriem: $\lim\limits_{n\to\infty} x = x$.

Dacă $x_n = 1$, $\forall n$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$; dacă $x_n = -3$, $\forall n$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(-3) = -3$.

3) Șirul $(x_n): -1, 1, -1, 1, -1, 1, ...$, șirul alternant $\left(x_n = (-1)^n, n \geq 1\right)$, este divergent (vom arăta că nu are limită). Analizăm cazurile:

a) Numărul 1 nu poate fi limită a șirului (x_n) deoarece dacă luăm vecinătatea $V = \left(1-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}\right) \in \vartheta(1)$, în afara ei se află o infinitate de termeni și anume cei de rang impar (Fig.14).

b) Numărul -1 nu poate fi limită a șirului (x_n), deoarece pentru $V = \left(-1-\frac{1}{2}, -1+\frac{1}{2}\right)$, termenii de rang par (x_{2n}), care sunt o infinitate, se află în afara ei (Fig.15).

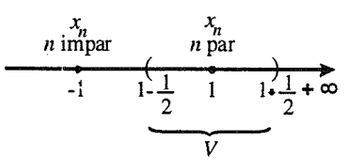


Fig. 14

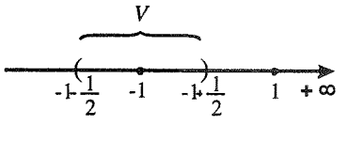


Fig. 15

c) Numărul $x < -1$, nu poate fi limită a șirului deoarece pentru $V = (-\infty, -1) \in \vartheta(x)$, în afara ei se află toți termenii șirului (x_n).

d) Numărul $x \in (-1, 1)$ nu este limită a șirului (x_n) pentru că alegând $V = (-1, 1)$, în afara acestei vecinătăți se află toți termenii.

e) În fine, dacă $x > 1$, atunci pentru $V = (1, \infty) \in \vartheta(x)$ în afara ei se află toți termenii șirului. Deci, x nu poate fi limită a șirului nici în acest caz.

Conform analizei de mai sus rezultă că șirul dat este divergent (nu are limită). Să observăm că acest șir este format din două subșiruri (x_{2n}), (x_{2n+1}) care au limite diferite $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = 1 \neq \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = -1$.

Criteriu de existență a limitei unui șir cu ε (facultativ)

Teorema care urmează constituie un rezultat echivalent cu cel dat în definiția limitei unui șir cu ajutorul vecinătăților, iar demonstrația se constituie într-un exemplu de demonstrație specifică analizei matematice.

Teoremă. 1) (Wallis 1665, **Fourier** 1811, **Bolzano** 1817, **Cauchy** 1821). Șirul (x_n) este convergent la x dacă și numai dacă oricare ar fi numărul pozitiv ε se poate găsi un rang n_ε (care depinde de ε), astfel încât pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ să avem $|x_n - x| < \varepsilon$.

$$(x_n \to x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } \forall n \geq n_\varepsilon, |x_n - x| < \varepsilon).$$

2) Șirul (x_n) are limita $+\infty$ dacă și numai dacă pentru orice număr pozitiv ε se poate găsi un rang n_ε, astfel încât pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ să avem: $x_n > \varepsilon$.

$$(x_n \to \infty) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } \forall n \geq n_\varepsilon, x_n > \varepsilon)$$

3) Șirul (x_n) are limita $-\infty$ dacă și numai dacă pentru orice număr pozitiv ε se poate găsi un rang n_ε, astfel încât pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ să avem $x_n < -\varepsilon$.

$$(x_n \to -\infty) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } \forall n \geq n_\varepsilon, x_n < -\varepsilon).$$

Demonstrație. 1) Presupunem că $x_n \to x$ și să probăm condiția din enunț. Alegem $\varepsilon > 0$, arbitrar. Considerăm vecinătatea $V = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in \vartheta(x)$. Atunci în afara acestei vecinătăți se află cel mult un număr finit de termeni. Fie n_ε cel mai mic rang al unui termen care nu se află printre aceștia (Fig.16). Atunci $x_n \in V$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. Este clar că dacă alegem o altă vecinătate $V' = (x-\varepsilon', x+\varepsilon'), \varepsilon' > 0$, a lui x, atunci avem un alt rang $n_{\varepsilon'}$, cel mai mic pentru care $x_{n_{\varepsilon'}} \in V'$ și toți termenii care nu aparțin lui V' au rang mai mic. Dar $x_n \in V \Leftrightarrow x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \Leftrightarrow x-\varepsilon <$

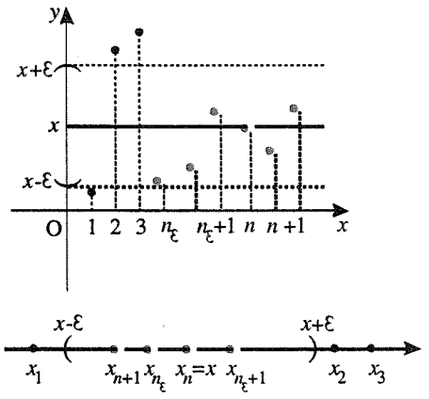


Fig. 16

$x_n < x+\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - x < \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - x| < \varepsilon$. Deci, în ipoteza că $x_n \to x$ pentru $\varepsilon > 0$, am găsit $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ să avem $|x_n - x| < \varepsilon$.

Reciproc, fie îndeplinită condiția din enunțul teoremei și să demonstrăm că $x_n \to x$ (utilizând definiția). Fie $V \in \vartheta(x)$, o vecinătate arbitrară a lui x. Atunci se știe că aceasta conține o vecinătate simetrică V' a lui x, de forma $V' = (x-\varepsilon, x+\varepsilon), \varepsilon > 0$. Conform ipotezei pentru $\varepsilon > 0$, există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ să rezulte $|x_n - x| < \varepsilon$, ceea ce-i echivalent cu $x_n \in V' \subset V$. Deci în afara unei vecinătăți arbitrare a lui x se află un număr finit de termeni, ceea ce arată că $x_n \to x$.

Temă. Arătați că $x_n \to x \Leftrightarrow \exists M > 0$ astfel încât $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ și $\forall n \geq n_\varepsilon$ să avem $|x_n - x| < \varepsilon M$.

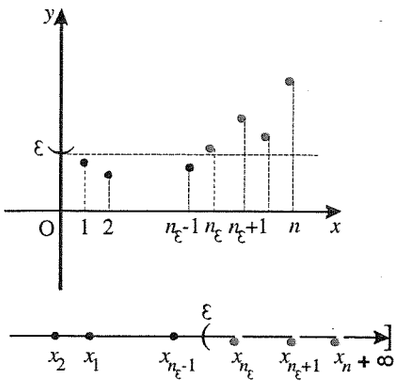


Fig. 17

2) Presupunem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ (definiția cu vecinătăți).

Fie $V \in \vartheta(\infty), V = (\varepsilon, \infty], \varepsilon > 0$. În afara lui V se află cel mult un număr finit de termeni. Dacă $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ este cel mai mic rang al unui termen care nu se află printre aceștia, atunci pentru orice $n \geq n_\varepsilon, x_n \in V$ adică $x_n > \varepsilon$ (Fig.17). Reciproc, dacă $V \in \vartheta(\infty)$, atunci există $V' = (\varepsilon, \infty], \varepsilon > 0$ astfel încât $V' \subseteq V$. Din enunțul teoremei există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ să avem $x_n > \varepsilon$, adică $x_n \in V' \subseteq V$. Deci în afara vecinătății V se află un număr finit de termeni ai șirului (x_n).

3) Temă. ■

Observații. 1) Deoarece condiția din definiția limitei „cu vecinătăți" este echivalentă cu cerința din enunțul teoremei, atunci aceasta din urmă poate fi luată definiție a limitei unui șir („definiția cu ε"), iar definiția limitei „cu vecinătăți" devine teoremă.

2) Exemplele simple studiate la începutul acestui paragraf sunt interesante deoarece caracterizează mulțimea posibilităților pe care le cuprinde definiția șirului. Este neesențial dacă valorile termenilor x_n sunt de o parte a limitei sau nu. De asemenea, este neesențial dacă termenii se apropie rang cu rang de limita ei și, în fine, este neesențial dacă există termeni care coincid cu limita. Este esențial numai ceea ce apare în teoremă, adică **termenul** x_n **trebuie să difere de limită**

oricât de puțin (sau $x_n = x, \forall n \geq n_0, n_0 \in \mathbb{N}$) pentru valori suficient de mari ale lui n.

3) Pentru a determina n_ε care apare în teoremă în 1) se procedează astfel:

a) se consideră $\varepsilon > 0$, arbitrar; b) se rezolvă inecuația în n, $|x_n - x| < \varepsilon$, când găsim $n > E(\varepsilon)$; c) se alege $n_\varepsilon = [E(\varepsilon)] + 1$.

Uneori inecuația în n, $|x_n - x| < \varepsilon$ poate fi dificil de rezolvat. Atunci se arată că $|x_n - x| < x'_n$ și apoi se rezolvă inecuația în n, $x'_n < \varepsilon$. Dacă ultima inecuație are o mulțime soluții de forma $\{n \in \mathbb{N}^* \mid n > r_\varepsilon\}$, atunci $x_n \to x$.

Să observăm că inecuația în n, $|x_n - x| < \varepsilon$, pentru șirul convergent $x_n \to x$, are în mulțimea de soluții o mulțime de forma $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq r_\varepsilon\}$, unde $r_\varepsilon \in \mathbb{R}$.

În rezolvarea inecuației în n, $|x_n - x| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ îl putem considera foarte mic în sensul că inecuația în n, $|x_n - x| < \varepsilon'$, cu $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ are ca mulțime de soluții $\{n \in \mathbb{N}^* \mid n > r'_\varepsilon\}$ care este inclusă în mulțimea de soluții a inecuației date la început. Observații analoage se pot face pentru șirurile divergente cu limita $+\infty$ sau $-\infty$.

4) Să notăm că dacă M este astfel încât $\forall n \geq M$, $|x_n - x| < \varepsilon$ și $M < M'$, atunci $\forall n \geq M'$, avem $|x_n - x| < \varepsilon$. Deci, dacă $x_n \to x \in \mathbb{R}$, **atunci este suficient pentru fiecare $\varepsilon > 0$ să găsim cel puțin un număr M cu proprietatea dorită.**

5) Să observăm că dacă $x_n \to x \in \mathbb{R}$, atunci $x_n - x \to 0$.

6) Jocul n_ε. În cazul șirurilor convergente, un mod de a reține legătura între ε și n_ε este sub formă de joc (numit „jocul n_ε").

Jucătorul A afirmă că x este limita șirului (x_n). Jucătorul B, partener de joc al lui A, dă jucătorului A o anumită valoare $\varepsilon > 0$. Jucătorul A trebuie să răspundă și să vină cu o valoare a lui n_ε astfel încât $|x_n - x| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_\varepsilon$. Dacă jucătorul A poate determina întotdeauna valoarea lui n_ε pentru care $|x_n - x| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$, atunci șirul este convergent și jucătorul A câștigă. Dacă însă, jucătorul B îi dă jucătorului A o valoare a lui $\varepsilon > 0$, pentru care jucătorul A nu poate răspunde adecvat, atunci jucătorul B câștigă și conchidem că șirul nu converge la x.

Exerciții rezolvate

1. Utilizând criteriul de convergență cu ε să se arate că:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2}{3}$; **2)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$; **3)** $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$; **4)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-n^3\right) = -\infty$.

R. 1) Fie $\varepsilon > 0$. Trebuie să găsim un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ (sau altfel formulat: să găsim un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ începând de la care) să avem $\left|x_n - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$. (*)

Rangul n_ε îl determinăm rezolvând inecuația în n din (*), care se scrie echivalent:

$$\left|\frac{2n+1}{3n+2} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-1}{3(3n+2)}\right| \Leftrightarrow \frac{1}{3(3n+2)} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1-6\varepsilon}{9\varepsilon}.$$

Luăm $n_\varepsilon = \begin{cases} \left[\frac{1-6\varepsilon}{9\varepsilon}\right] + 1, \text{ dacă } 0 < \varepsilon \leq \frac{1}{6} \\ 1, \text{ dacă } \varepsilon > \frac{1}{6} \end{cases}$.

Deci, pentru $\varepsilon > 0$ am determinat $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $n \geq n_\varepsilon$ are loc lanțul de inegalități echivalente de mai sus, adică are loc (*) și deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2}{3}$.

2) Fie $\varepsilon > 0$, arbitrar. Pentru a determina $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$ să avem $\left|\sqrt{n+1} - \sqrt{n} - 0\right| < \varepsilon$ aplicăm observația 3).

Avem: $\left|\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \varepsilon$. (1)

Dar $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$ și vom cere ca $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$. De aici $\frac{1}{2\varepsilon} < \sqrt{n} \Leftrightarrow n > \frac{1}{4\varepsilon^2}$.

Luăm $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{4\varepsilon^2}\right] + 1$, când pentru $n \geq n_\varepsilon$ avem: $n > \frac{1}{4\varepsilon^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2\varepsilon} < \sqrt{n} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$ și deci (1) are loc, adică $\left|\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) - 0\right| < \varepsilon$, ceea ce arată că $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$.

3) Fie $\varepsilon > 0$. Soluțiile inecuației $n^2 > \varepsilon$ sunt $n > \sqrt{\varepsilon}$. Luăm $n_\varepsilon = \left[\sqrt{\varepsilon}\right] + 1$. Atunci pentru $n \geq n_\varepsilon$ rezultă $n^2 > \varepsilon$, ceea ce arată că $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

4) Fie $\varepsilon > 0$. Pentru a determina $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ rezolvăm inecuația în n, $-n^2 < -\varepsilon \Leftrightarrow n^2 > \varepsilon$.

De aici $n > \sqrt{\varepsilon}$. Se ia $n_\varepsilon = \left[\sqrt{\varepsilon}\right] + 1$, când pentru $n \geq n_\varepsilon$ avem $n > \sqrt{\varepsilon} \Leftrightarrow n^2 > \varepsilon \Leftrightarrow -n^2 < -\varepsilon$.

Deci, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-n^2\right) = -\infty$.

2. Să se determine rangul începând de la care termenul șirului (x_n) dat de $x_n = \frac{3n+1}{4n+3}, n \geq 0$, diferă de $\frac{3}{4}$ cu mai puțin de: a) $\frac{1}{10}$; b) $\frac{1}{100}$; c) $\frac{1}{1000}$.

R. Fie $\varepsilon > 0$. Rezolvăm inecuația $|x_n - x| < \varepsilon$ pentru determinarea lui $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$.

Avem echivalențele:

$$\left|\frac{3n+1}{4n+3} - \frac{3}{4}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-5}{4(4n+3)}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{5}{4(4n+3)} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{5-12\varepsilon}{16\varepsilon}.$$

Notăm $n_\varepsilon = \begin{cases} \left[\frac{5-12\varepsilon}{16\varepsilon}\right]+1, \text{dacă } 0<\varepsilon\le\frac{5}{12} \\ 1, \text{dacă } \varepsilon>\frac{5}{12} \end{cases}$.

a) Pentru $\varepsilon=\frac{1}{10}$, rezultă $n_\varepsilon=3$; b) Pentru $\varepsilon=\frac{1}{100}$, găsim $n_\varepsilon=31$; c) $n_\varepsilon=312$.

3. Să se arate că şirul (x_n), $x_n=n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ este divergent.

R. Presupunem prin absurd că şirul este convergent. Alegem $\varepsilon=\frac{1}{2}$. Atunci există $x\in\mathbb{R}$ şi $n_0\in\mathbb{N}$ astfel încât $|x_n-x|<\frac{1}{2}, \forall n\ge n_0$. Fie $p=4n_0+1, m=4n_0+5$. Atunci:

$4=|x_p-x_m|=|(x_p-x)+(x-x_m)|\le|x_p-x|+|x_m-x|\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, fals.

Şirul remarcabil: şirul puterilor cu exponent real, (n^α)

Are loc următoarea:

Teoremă . Fie şirul (x_n), cu $x_n=n^\alpha, n\ge1, \alpha\in\mathbb{R}$.

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} \infty, \alpha>0 \\ 1, \alpha=0 \\ 0, \alpha<0 \end{cases}$

Şirul (x_n) cu $x_n=n^\alpha, n\ge1$ se numeşte **şirul puterilor cu exponent real** α.

Exemple .1) $\lim\limits_{n\to\infty} n=\lim\limits_{n\to\infty} n^2=\lim\limits_{n\to\infty} n^3=\lim\limits_{n\to\infty} n^{1000}=\lim\limits_{n\to\infty} n^{2006}=\infty$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[4]{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{n}=\infty \quad (k\in\mathbb{N}, k\ge2)$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0, \lim\limits_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0, \lim\limits_{n\to\infty} n^{-\frac{2}{3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}=0$.

Şirul remarcabil: şirul exponenţial cu baza a, (a^n)

Are loc următoarea:

Teoremă . Fie şirul (x_n), cu $x_n=a^n, n\ge1, a\in\mathbb{R}$.

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty, \text{dacă } a>1 \\ 1, \text{dacă } a=1 \\ 0, \text{dacă } a\in(-1,1) \\ \text{nu există, dacă } a\le-1 \end{cases}$

Şirul (x_n) cu $x_n=a^n, n\ge1, a\in\mathbb{R}$ se numeşte **şir exponenţial cu baza** a.

Exemple .1) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n=\lim\limits_{n\to\infty} 5^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2}^n=\lim\limits_{n\to\infty} e^n=\lim\limits_{n\to\infty}\pi^n=\infty$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{\pi}{4}\right)^n=0$.

O proprietate importantă pentru termenii unui şir convergent este dată de următoarea:

Teoremă . Orice şir convergent este mărginit.

Demonstraţie . Fie $\lim\limits_{x\to\infty} x_n=x\in\mathbb{R}$. Deci pentru $\varepsilon>0$, există $n_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall n\ge n_\varepsilon$ să avem $|x_n-x|<\varepsilon\Leftrightarrow x-\varepsilon<x_n<x+\varepsilon$.

Notăm $\alpha=\min\{x_0, x_1, ..., x_{n_\varepsilon-1}, x-\varepsilon\}, \beta=\max\{x_0, x_1, ..., x_{n_\varepsilon-1}, x+\varepsilon\}$.

Atunci avem $\alpha\le x_n\le\beta, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Deci (x_n) este şir mărginit. ■

Corolar. Dacă (x_n) este nemărginit, atunci el este divergent.

Exemple . 1) Şirul (x_n), cu $x_n=n$, $n\ge1$, **şirul numerelor naturale este nemărginit şi deci divergent.**

2) Şirul: $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, ...$ **este divergent deoarece conţine subşirul nemărginit** $(x_{2n-1}): 1, 3, 5, ...$

Vom da în continuare o caracterizare a punctului de acumulare pentru o mulţime nevidă, cu ajutorul şirurilor convergente. Mai precis are loc următoarea:

Teoremă. Punctul $x \in \mathbb{R}$ este punct de acumulare al mulțimii A dacă și numai dacă există un șir (x_n), $x_n \in A$, $x_n \neq x$, $\forall n$, cu proprietatea $x_n \to x$.

Proprietățile limitei unui șir

Prezentăm, în continuare, câteva proprietăți importante ale limitei unui șir, pe care le vom utiliza în aplicații.

P1. Dacă un șir are limită, aceasta este unică.

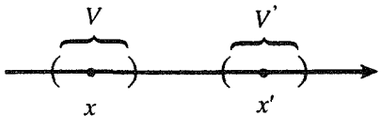


Fig. 18

Demonstrație. **(cu vecinătăți).** Prin reducere la absurd.

Presupunem că $x_n \to x$ și $x_n \to x'$, $x, x' \in \mathbb{R}$, $x \neq x'$.

Să arătăm că ajungem la o contradicție. Să admitem că $x < x'$. Atunci există două vecinătăți $V \in \vartheta(x)$ și $V' \in \vartheta(x')$ astfel încât $V \cap V' = \varnothing$ (Fig.18) ($\overline{\mathbb{R}}$ este spațiu separat).

Cum $x_n \to x$, înseamnă că există $n_V \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall n \geq n_V$ să avem $x_n \in V$, iar din $x_n \to x'$, se deduce existența lui $n_{V'} \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall n \geq n_{V'}$, să avem $x_n \in V'$. Fie $n_0 = \max(n_V, n_{V'})$. Atunci pentru $n \geq n_0$, avem $x_n \in V$ și $x_n \in V'$, adică $V \cap V' \neq \varnothing$, contradicție. ■

Temă. Refaceți demonstrația utilizând pentru limita șirului criteriul cu ε.

P2. Prin schimbarea ordinii termenilor unui șir care are limită se obține un șir care are aceeași limită cu șirul dat.

Demonstrație. Poziția pe dreaptă a termenilor șirului nu depinde de rangul lor, ci numai de valoarea lor numerică. În afara fiecărei vecinătăți a limitei se află un număr finit de termeni ai șirului inițial și același număr de termeni ai șirului modificat.

Prin urmare noul șir are aceeași limită ca șirul inițial. ■

Exemple. **Șirul:** $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ... \to 0$. **Șirul:** $\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}, ... \to 0$, **deoarece termenul de rang par l-am înlocuit cu termenul precedent de rang impar și termenul de rang impar l-am înlocuit cu termenul următor de rang par din șirul dat.**

P3. Prin adăugarea sau înlăturarea unui număr finit de termeni dintr-un șir care are limită se obține un alt șir dar cu aceeași limită.

Demonstrație. Dacă V este o vecinătate a limitei șirului dat, atunci în afara ei se află un număr finit de termeni. Atunci și pentru șirul nou obținut prin adăugarea unui număr finit de termeni în afara lui V se află cel mult un număr finit de termeni (cei ai șirului inițial la care se pot număra cel mult cei adăugați în număr finit). Dacă din șirul inițial se înlătură un număr finit de termeni, atunci în afara lui V, evident se află un număr finit. ■

Deci, dacă $x_n \to x$, atunci șirurile: $(x_{n+1})_{n\geq 1} : x_2, x_3, ...; (x_{n+2})_{n\geq 1} : x_3, x_4, ...;$ $(x_{n+p})_{n\geq 1} : x_{p+1}, x_{p+2}, ..., p$ fixat, sunt de asemenea șiruri (subșiruri) care au limită și mai mult $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+2} = ... = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+p} = x$.

P4. Dacă șirul $x_n \to x \in \mathbb{R}$ și $x_n \geq 0, \forall n$, atunci și limita sa este pozitivă $(x \geq 0)$.

Limita unui șir convergent având termenii pozitivi este pozitivă.

Demonstrație*. Presupunem că $x < 0$ și fie $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$. Cum $x_n \to x$, atunci $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$ să avem $|x_n - x| < \frac{|x|}{2}$.

În particular $|x_{n_\varepsilon} - x| < \frac{|x|}{2}$, adică $-\frac{|x|}{2} + x < x_{n_\varepsilon} < x + \frac{|x|}{2} = x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2} < 0$.

Deci $x_{n_\varepsilon} < 0$, contrar ipotezei. Așadar, $x \geq 0$. ■

Observații. **1)** Afirmația rămâne adevărată dacă $x_n \to x \in \mathbb{R}$ și $x_n \geq 0, \forall n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, fixat.

2) Dacă $x_n \to x, x_n > 0, \forall n$, atunci este posibil ca $x \geq 0$. De exemplu, șirul (x_n) cu $x_n = \frac{1}{n} > 0, \forall n$, dar $x = 0$.

3) Analog dacă $x_n \to x$ și $x_n \leq 0, \forall n$, atunci $x \leq 0$ (**limita unui șir convergent cu termenii negativi, este negativă**).

O afirmație reciprocă a proprietății P4 este dată de

P5. Dacă șirul $x_n \to x \in \mathbb{R}$ și $x > 0$, atunci există un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall n \geq n_0, x_n > 0$.

Demonstrație*. Cum $x > 0$, alegem un $\varepsilon > 0$ astfel încât $x - \varepsilon > 0$. Din criteriul de convergență cu ε se poate găsi un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall n \geq n_0$ să avem $x_n > x - \varepsilon > 0$. ■

* = facultativ

Observații. 1) Proprietatea afirmă că dacă limita unui șir convergent este strict pozitivă, atunci toți termenii șirului de la un rang au aceeași calitate.

a) Fig. 19 b)

2) Dacă $x_n \to x \in \mathbb{R}$ și $x<0$, atunci de la un rang încolo toți termenii sunt strict negativi.

3) Dacă $x_n \to x \neq 0$, atunci există un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall n \geq n_0$, $x_n \neq 0$.

P6 . 1) Dacă $x_n \to x$, (x_n) strict crescător, atunci $x_n < x, \forall n$.

Limita unui șir strict crescător este mai mare decât termenii șirului.

2) Dacă $x_n \to x$, (x_n) strict descrescător, atunci $x_n > x, \forall n$.

Limita unui șir strict descrescător este mai mică decât termenii șirului.

Demonstrație . **1)** Problema este clară dacă $x=\infty$. Presupunem deci șirul (x_n) convergent.

Presupunem, prin absurd, că ar exista un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x_{n_0} \geq x$.

a) Dacă $x_{n_0} > x$ și $\varepsilon > 0$, atunci din $x_n \to x \in \mathbb{R}$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$ să avem $x-\varepsilon < x_n < x+\varepsilon$. Luăm $\varepsilon = x_{n_0} - x > 0$ și din ultima inegalitate deducem $x_n < x_{n_0}$, $\forall n \geq n_\varepsilon$, relație ce contrazice monotonia șirului.

b) Dacă $x_{n_0} = x$, atunci $x_{n_0+1} > x$ și se raționează ca mai sus. ■

2) Temă.

Observație . Propoziția afirmă: 1) Orice șir strict crescător care are limită, are toți termenii strict mai mici decât limita. (Fig.19. a))

2) Orice șir strict descrescător care are limită, are toți termenii strict mai mari decât limita. (Fig.19. b))

P7 . Dacă $x_n \to x \in \mathbb{R}$, atunci $|x_n| \to |x|$.

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right| = |x|$,

Limita modulului este egală cu modulul limitei.

Demonstrație . Fie $\varepsilon > 0$, arbitrar. Din $x_n \to x$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$ să avem $|x_n - x| < \varepsilon$.

Utilizând inegalitatea $\big||x_n|-|x|\big| \leq |x_n - x|$ rezultă că pentru $n \geq n_\varepsilon$ avem $\big||x_n|-|x|\big| < \varepsilon$. Deci, pentru $\varepsilon > 0$, am găsit un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$ să rezulte $\big||x_n|-|x|\big| < \varepsilon$, ceea ce arată că $|x_n| \to |x|$. ■

Subșirurile și teorema Bolzano-Weierstrass(facultativ)

Reamintim că dacă (x_n) este un șir de numere reale, iar $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$ este un șir crescător de numere naturale, atunci șirul (x_{n_k}): $x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}, ...$ se numește subșir al lui (x_n). Subșirul (x_{n_k}) l-am numit șir extras din (x_n).

Subșirurile sunt utilizate adesea pentru a studia convergența sau divergența unor șiruri.

Teoremă. Dacă un șir are limită (finită sau infinită), atunci orice subșir al său are aceeași limită.

Demonstrație . Vom face demonstrația în cazul șirului convergent $x_n \to x \in \mathbb{R}$.

Fie $\varepsilon > 0$. Atunci există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$ să avem $|x_n - x| < \varepsilon$.

Deoarece $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$ este un șir strict crescător de numere naturale, se demonstrează prin inducție că $n_k \geq k$. Deci, pentru $k \geq n_\varepsilon$, avem $n_k \geq k \geq n_\varepsilon$ și $|x_{n_k} - x| < \varepsilon$. Recapitulând, pentru $\varepsilon > 0$, am găsit un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall n_k \geq n_\varepsilon$ să avem $|x_{n_k} - x| < \varepsilon$. Această înseamnă că $x_{n_k} \to x$. ■

Corolar (Criteriu de divergență). Dacă șirul (x_n) conține două subșiruri convergente (x_{n_k}), (x_{n_p}) cu $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \neq \lim\limits_{p\to\infty} x_{n_p}$, atunci (x_n) este divergent.

Un șir este divergent dacă conține două subșiruri convergente cu limite diferite.

Observație . Acesta este un procedeu de a demonstra că un șir este divergent. Să găsim două subșiruri ale sale, care să fie convergente la limite diferite.

Exemple . 1) Șirul (x_n): 1, 0, 1, 0, 1, 0, ... conține subșirurile (x_{2n+1}): 1, 1, 1, ... și (x_{2n}): 0, 0, 0, ... pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = 1 \neq 0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}$. Deci (x_n) este divergent.

2) Şirul (x_n) se numeşte şir periodic, dacă există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x_{n+p} = x_n$, $\forall n \geq 0$. Numărul p se numeşte perioadă a şirului.

Orice şir periodic de perioadă $p \geq 2$ este divergent. Şirul din exemplul precedent are perioada 2.

3) Arătaţi că şirul (a_n) cu $a_{n+1} = \frac{2}{2-a_n}$, $n \geq 1$, $a_1 \neq 0$ este periodic de perioadă $p = 4$.

Deci, (a_n) este divergent.

Am văzut că orice şir convergent este mărginit. Atunci are loc următorul:

Corolar (Alt criteriu de divergenţă). Orice şir nemărginit este divergent.

Exemple. **1) Şirul (x_n), cu $x_n = n$, $n \geq 0$, şirul numerelor naturale este nemărginit (orice şir este un subşir al său) şi deci este divergent cu $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$.**

2) Şirul $(x_n): 1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, \ldots$ este divergent deoarece conţine subşirul nemărginit $(x_{2n+1}): 1, 3, 5, \ldots$

În acest caz nu există limita şirului (x_n), deoarece acesta mai conţine subşirul $(x_{2n}): \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = 0$.

Este limpede că nu orice şir de numere reale este monoton, dar se arată că orice şir de numere reale are un subşir monoton. Are loc:

Teoremă (Subşirului monoton). Dacă (x_n) este un şir de numere reale, atunci există un subşir al său care este monoton.

Rezultatul fundamental relativ la subşiruri este prezentat în următoarea:

Teoremă (Bolzano-Weierstrass). Din orice şir mărginit (x_n) se poate extrage un subşir (x_{n_k}) convergent.

Corolar. Fie (x_n) un şir mărginit de numere reale cu proprietatea că există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât orice subşir al şirului (x_n) este convergent la x. Atunci şirul (x_n) este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Dacă toate subşirurile unui şir mărginit sunt convergente la acelaşi număr, atunci şirul dat este convergent la acelaşi număr.

Din corolar se deduce: un şir este convergent $\Leftrightarrow$ toate subşirurile sale sunt convergente la acelaşi număr.

Un util criteriu pentru a determina limita (finită sau infinită) a unui şir utilizează limitele a două sau a mai multor subşiruri care „acoperă" şirul dat.

Spunem că şirul (x_n) **este reuniunea** a două sau a mai multor (în număr finit) subşiruri ale sale dacă orice termen al şirului este termen al unuia din subşiruri.

De exemplu, şirul (x_n) este reuniunea subşirurilor $(x_{2n}), (x_{2n+1})$ sau reuniunea subşirurilor $(x_{3n}), (x_{3n+1}), (x_{3n+2})$, etc.

Are loc următoarea:

Teoremă. Dacă un şir este reuniunea a două sau mai multor subşiruri care au aceeaşi limită, atunci şirul are aceeaşi limită.

Demonstraţie. De exemplu şirul (x_n) este reuniunea a două subşiruri ale sale $(x_{2n}), (x_{2n+1})$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Fie $V \in \vartheta(\ell)$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \ell$, în afara lui V se află un număr finit de termeni ai subşirului (x_{2n}). Analog, din $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = \ell$ rezultă că în afara lui V se află un număr finit de termeni ai subşirului (x_{2n+1}). Deci, în afara lui V se află un număr finit de termeni ai şirului (x_n) şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$. ■

Exemple. **1) Şirul $(x_n): 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \ldots$ este convergent deoarece subşirurile care-l acoperă $(x_{2n+1}): 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, $(x_{2n}): 0, 0, 0, \ldots$ sunt convergente la 0 şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.**

2) $x_n = \frac{1}{n\cos n\pi}$. Considerăm subşirurile $x_{2n} = \frac{1}{2n} \to 0$ şi $x_{2n+1} = \frac{-1}{2n+1} \to 0$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Probleme rezolvate

1. Să se arate că şirul (x_n), $x_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, $n \geq 0$ este divergent.

R. Să observăm că subşirurile $x_{2n+1} = \cos(2n+1)\frac{\pi}{2} \to 0$, $x_{4n} = \cos 2n\pi = 1 \to 1$ având limite diferite se deduce că şirul (x_n) este divergent.

2. Fie (x_n) un şir de numere reale cu proprietate că subşirurile (x_{2n}), (x_{2n+1}), (x_{3n}) sunt convergente. Să se arate că (x_n) este convergent.

R. Fie $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = c$. Observăm că (x_{6n}) este subşir al şirurilor (x_{2n}) şi (x_{3n}). Deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_{6n} = a = c$. Asemănător se constată că $(x_{3(2n+1)})$ este subşir al şirurilor (x_{2n+1}), (x_{3n}). De aici $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3(2n+1)} = b = c$. În final $a = b = c = x$. Cum şirurile (x_{2n+1}), (x_{2n}) acoperă şirul (x_n) se deduce că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Şiruri convergente la zero

Reamintim că $x_n \to x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $(\exists) n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$ să avem $|x_n - x| < \varepsilon$. Dacă se consideră şirul (y_n) cu $y_n = x_n - x$ atunci $y_n \to 0$ deoarece $\forall \varepsilon > 0$, $(\exists) n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$ să avem $|y_n - 0| < \varepsilon$. Reciproc, dacă $y_n \to 0$, atunci $x_n \to x$. Deci, dacă $x_n \to x$, atunci şirul (x_n) se poate reprezenta sub forma $x_n = x + y_n$ unde $y_n \to 0$ şi reciproc dacă (x_n) admite o astfel de reprezentare, atunci el are limita x.

Proprietăţi

Pentru proprietăţile care urmează demonstraţiile sunt facultative.

P1. Dacă şirul (x_n) de numere strict pozitive este strict crescător şi nemărginit, atunci $\frac{1}{x_n} \to 0$.

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$, arbitrar ales. Deoarece şirul este nemărginit, există un termen $x_{n_\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon}$ (proprietatea lui Arhimede). Cum şirul este strict crescător se deduce că pentru $n \geq n_\varepsilon$ avem $x_n \geq x_{n_\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon}$ sau de aici $\frac{1}{x_n} < \varepsilon$. Deci, pentru $\varepsilon > 0$, am găsit un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $n \geq n_\varepsilon$ avem: $|1/x_n - 0| < \varepsilon$, ceea ce arată că $\lim 1/x_n = 0$. ■

Exerciţii rezolvate

Să se arate că: a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$; b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$; c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 0$; d) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$; e) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$

R.a) Fie $x_n = n, n \geq 1$. Şirul (x_n) are proprietăţile: $x_n > 0, \forall n \geq 1, (x_n)$ este strict crescător şi nemărginit. Conform proprietăţii P1 rezultă $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

b) Se ia $x_n = n^2, n \geq 1$, pentru care au loc cerinţele din P1. Deci $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

c) Se pune $x_n = 3^n, n \geq 0$ şi se verifică P1.În general:

dacă $a > 1$, atunci $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n = 0$. Punând $\frac{1}{a} = b \in (0,1)$ rezultă $b^n \to 0$. ((b^n) este şirul exponenţial de bază b).

d) Dacă $x_n = \sqrt{n}, n \geq 1$, atunci $x_n > 0$, $\forall n, (x_n)$ este strict crescător şi nemărginit. Deci $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

e) În general, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0, \alpha > 0$ pentru că $x_n = n^\alpha, n \geq 1$ verifică cerinţele din P1. (Rezultatul este cel de la şirul puterilor cu exponent real).

P2. 1) Dacă şirul $(x_n), x_n > 0, x_n \to 0$, atunci $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \infty$.

2) Dacă şirul $(x_n), x_n < 0, x_n \to 0$, atunci $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = -\infty$.

Convenţie de scriere: 1) $\frac{1}{0_+} = \infty$; 2) $\frac{1}{0_-} = -\infty$.

Demonstraţie. 1) Fie $\varepsilon > 0$, arbitrar. Din $x_n \to 0$, se obţine un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$ să avem $x_n < \frac{1}{\varepsilon}$. De aici $\frac{1}{x_n} > \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$. Aceasta arată că $\lim x_n = \infty$.

2) Temă. ■

Am văzut la studiul convergenţei unor şiruri utilizând criteriul cu ε, că pentru aflarea lui $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, rangul începând de la care $(n \geq n_\varepsilon)$ are loc inegalitatea $|x_n - x| < \varepsilon$ se rezolvă această inegalitate în n. Când aceasta era complicată se rezolva o inecuaţie de forma $E(n) < \varepsilon$, unde $|x_n - x| < E(n), \forall n$, cu $E(n)$ având o expresie mai simplă. Această observaţie conduce la următoarea proprietate:

P3 (Criteriul majorării). Fie şirul (x_n), $x_n \geq 0, \forall n$, pentru care există şirul (α_n) cu $x_n \leq \alpha_n, \forall n$ şi $\alpha_n \to 0$. Atunci $x_n \to 0$.

Deci, $\left.\begin{matrix} 0 \leq x_n \leq \alpha_n, \forall n \\ \alpha_n \to 0 \end{matrix}\right] \Rightarrow x_n \to 0$.

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$, arbitrar ales. Din $\alpha_n \to 0$ rezultă existenţa unui rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$, $|\alpha_n| < \varepsilon$ sau $\alpha_n < \varepsilon$ $(\alpha_n \geq 0)$. Cum $x_n \leq \alpha_n$, $\forall n$,

deducem $x_n < \varepsilon$. Deci, pentru $\varepsilon > 0$, au găsit $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$ să avem $x_n < \varepsilon$. Aceasta înseamnă că $\lim x_n = 0$. ■

Exemplu. **Pentru orice** $a \in (0,1)$, $\lim_{n\to\infty} na^n = 0$ **şi, în general,** $\lim_{n\to\infty} n^k a^n = 0$, $k \in \mathbb{N}^*$.

R. **Din** $0 < a < 1$ **rezultă** $\frac{1}{a} > 1$. **Deci, există** $b > 0$ **astfel încât** $\frac{1}{a} = 1 + b$. **De aici**

$\left(\frac{1}{a}\right)^n = (1+b)^n$ **sau cu formula binomului lui Newton**

$$\frac{1}{a^n} = 1 + nb + \frac{n(n-1)}{2}b^2 + \ldots + b^n > \frac{n(n-1)}{2}b^2.$$

Se obţine $0 < na^n < \frac{2}{(n-1)b^2} = \alpha_n$. **Cum** $\alpha_n \to 0$, **se deduce** $na^n \to 0$.

Analog pentru cealaltă limită se ia $\left(\frac{1}{a}\right)^n > C_n^{k+1} b^{k+1}$ **etc.**

Observaţie. **Dacă** $a \in (0,1)$, **atunci există** $b > 1$, **astfel încât** $a = \frac{1}{b}$ **şi deci** $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{b^n} = 0$. **Din propoziţia P2 rezultă** $\lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{n^k} = \infty$, $k \in \mathbb{N}^*$. Exemplu. $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n^5} = \infty$.

Am văzut că procesul de determinare a lui $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ pentru $\varepsilon > 0$, arbitrar, este în multe cazuri dificil şi incomod, cu atât mai dificil cu cât şirul dat conţine sume de termeni, produse de factori, etc. care sunt şiruri convergente la zero. De aceea, vom da un rezultat general pentru astfel de şiruri prezentat în următoarea proprietate:

P4 **Dacă** $x_n \to 0, y_n \to 0$ **şi** $\alpha \in \mathbb{R}^*$ **atunci:**

1) $x_n + y_n \to 0$ **(Suma a două şiruri convergente la zero este un şir convergent la zero)**

2) $\alpha x_n \to 0$ **(Produsul dintre o constantă şi un şir convergent la zero este un şir convergent la zero)**

3) $x_n y_n \to 0$ **(Produsul a două şiruri convergente la zero este un şir convergent la zero)**

Exerciţii rezolvate

Să se calculeze limitele de şiruri:

a) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n} + (0,3)^n\right]$; b) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$; c) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{n^3} - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right]$;

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^5}\left(\frac{3}{4}\right)^n$; e) $\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^2}\left[\frac{1}{2^n} - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right]$.

R.a) **Se consideră şirurile** $x_n = \frac{1}{n} \to 0$, $y_n = (0,3)^n \to 0$ **şi se aplică 1) din P4;**

b) **Se iau** $x_n = \frac{1}{n^2} \to 0$, $y_n = \frac{1}{2^n} \to 0$;

c) **Se consideră** $3 \cdot \frac{1}{n^3} \to 0$, $\left(\frac{2}{5}\right)^n \to 0$;

d) $\frac{1}{n^5} \to 0$, $\left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0$ **şi se aplică 3) din P2;**

e) $5\frac{1}{n^2} \to 0$, $\left(\frac{3}{5}\right)^n \to 0$.

P5. Produsul dintre un şir mărginit şi un şir convergent la zero este un şir convergent la zero.

Exerciţiu rezolvat

Să se arate că $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{n\pi}{2} = 0$.

R. **Se consideră şirurile** (x_n), (y_n) **cu termenii** $x_n = \sin\frac{n\pi}{2}, n \geq 1$ **şi** $y_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

Avem $x_n \in [-1,1]$, $\forall n \geq 1$, **ceea ce arată că şirul** (x_n) **este mărginit, iar pentru** (y_n), $y_n \to 0$.

Deci $x_n y_n \to 0$.

P6. $x_n \to 0 \Leftrightarrow |x_n| \to 0$.

Demonstraţie. Şirul (x_n) este convergent la zero $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$ să avem $|x_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \|x_n\| < \varepsilon$, ceea ce arată că $|x_n| \to 0$. ■

Observaţie. Dacă $x_n \to x \neq 0$, atunci $|x_n| \to |x|$. Rezultatul reciproc este fals. Se ia contraexemplul dat de şirul (x_n): $1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ Este clar că $|x_n| = 1 \to 1$, dar şirul (x_n) este divergent.

Exemple. a) $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n^2}\right) = 0$ **pentru că** $\lim_{n\to\infty}\left|-\frac{1}{n^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{-n^3-n}=0$ deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{-n^3-n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3+n}=0$.

Probleme propuse

Definirea limitei unui şir. Subşiruri

1. Arătaţi că următoarele şiruri sunt divergente:

1) $1,2,1,2,\ldots$; 2) $x_n=1+(-1)^n, n\geq 1$; 3) $x_n=n+(-1)^n n, n\geq 1$; 4) $x_n=(-1)^n n, n\geq 1$;

5) $x_n=(-1)^n\frac{n}{n+1}, n\geq 1$; 6) $x_n=(-3)^n, n\geq 1$; 7) $x_n=\sin\frac{n\pi}{2}, n\geq 0$.

2. Să se determine punctele de acumulare pentru mulţimile:

1) $\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\, n\geq 1, n\in\mathbb{N}\right\}$; 2) $\left\{\frac{n}{n+1}\,\middle|\, n\geq 0, n\in\mathbb{N}\right\}$; 3) $\left\{1+(-1)^n\,\middle|\, n\in\mathbb{N}^*\right\}$;

4) $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$; 5) $\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$.

3. Utilizând criteriul de convergenţă cu ε să se arate că:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+3}=2$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+2}{3n+4}=\frac{5}{3}$;3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3+1}=0$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{n^2}=\frac{1}{2}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n}\right)=0$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{2n+1}{n+1}=\ln 2$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^3+1\right)=\infty$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-n^4+6\right)=-\infty$; 10) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+1}=\infty$; 11) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n^2}{n+1}=-\infty$;

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+3^n\right)=\infty$, 13) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-5^n\right)=-\infty$; 14) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n}{2^n+3^n}=\infty$; 15) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{5^n}=0$.

4. a) Să se determine rangul începând de la care termenii şirului (x_n) cu $x_n=\frac{2n}{3n+1}$, $n\geq 1$, diferă de $x=\frac{2}{3}$ cu mai puţin de : 1) $\frac{1}{100}$; 2) $\frac{1}{500}$; 3) $\frac{1}{10000}$.

b) Aceleaşi cerinţe pentru $x_n=\frac{n^2-1}{n^2}$ şi $x=1$. Fie (y_n) cu $y_n=\prod\limits_{k=2}^{n}x_k$.

Arătaţi că există un rang $n_0\in\mathbb{N}$, astfel încât $\forall n\geq n_0, y_n\in\left(\frac{125}{251},\frac{125}{249}\right)$.

5. Determinaţi numărul de termeni ai şirului (x_n), $x_n=\frac{n^2}{3n^2+1}$, $n\geq 1$, care rămân în afara vecinătăţii $V=\left(\frac{1}{5},\frac{17}{50}\right)$ a lui $\frac{1}{3}$.

6. Arătaţi că şirul (x_n) cu $x_n=\frac{n}{2n+1}$ nu converge la 2.

7. Construiţi câte un şir: a) cu limita 3; b) cu limita 3 având termenii mai mari ca 3; c) cu limita 3 având termeni de o parte şi alta a lui 3.

8. Construiţi câte un şir: a) crescător cu limita 1, b) descrescător cu limita $\sqrt{2}$; c) cu limita 1, dar nemonoton; d) cu limita $\sqrt{2}$, dar nemonoton.

9. Arătaţi că dacă $x_n\to x\in\mathbb{R}$, iar y este punct de acumulare pentru $\{x_n\,|\, n\geq 1\}$, atunci $x=y$.

10. Să se calculeze limitele: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^2+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[5]{n^2+n}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{1-n^3}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}3^n$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty}(-2)^{2n}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}(-2)^{2n+1}$.

11. Dacă şirul (x_n) are proprietatea că şirul modulelor $(|x_n|)$ este convergent la $|x|\neq 0$, atunci (x_n) este convergent la x ?

12. Arătaţi că dacă $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x\in\mathbb{R}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n+x_{n+1}}{2}=x$.

13. Arătaţi că dacă $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x>0$, atunci există $k\in\mathbb{N}$ astfel încât $\forall n\geq k$, $\frac{x}{2}<x_n<2x$.

Subşiruri

1. Studiaţi convergenţa şirului (x_n) definit prin: 1) $x_n=1+(-1)^n$, $n\geq 1$; 2) $x_n=n\left[1+(-1)^n\right]$, $n\geq 1$; 3) $x_n=\left(-\frac{1}{3}\right)^n$, $n\geq 1$, utilizând subşirurile (x_{2n}), (x_{2n+1}); 4) $x_n=\frac{n-1}{n}$, dacă $n=2k$ şi $x_n=\frac{n}{n+1}$, dacă $n=2k+1$, $k\in\mathbb{N}$; 5) $x_n=\left\{\frac{n}{2}\right\}$, $n\geq 1$, unde $\{a\}$ este partea fracţionară a lui $a\in\mathbb{R}$, $\{a\}=a-[a]$; 6) $x_n=\sin n\pi$, $n\geq 1$; 7) $x_n=\sin\frac{2n\pi}{3}$, $n\geq 0$, utilizând subşirurile (x_{3n}), (x_{3n+1}), (x_{3n+2}); 8*) $x_n=\sin n$, $n\geq 0$.

2. Determinaţi subşirurile convergente ale şirului (x_n): 1) $x_n=\sin\frac{2n\pi}{3}$; 2) $x_n=(-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $n\geq 1$.

3. 1) Fie (a_n), (b_n) două şiruri convergente cu $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq b=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.
Ce se poate spune despre şirul: $a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots,a_n,b_n,\ldots$?

2) Fie (a_n), (b_n) două şiruri convergente la acelaşi număr. Ce se poate spune despre şirul: $a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots,a_n,b_n,\ldots$?

4. Să se arate că şirul (x_n) este convergent dacă şi numai dacă $\forall k\in\mathbb{N}$, subşirul $(x_n)_{n\geq k}$ este convergent şi în plus $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+k}$.

5. Fie şirul (x_n). Arătaţi că dacă subşirurile (x_{3n}), (x_{3n+1}), (x_{3n+2}) sunt convergente la acelaşi număr x, atunci şirul (x_n) este convergent la x.

6. Arătaţi că dacă subşirurile (x_{2n-1}), (x_{2n}), (x_{5n}) ale şirului (x_n) sunt convergente, atunci şirul (x_n) este convergent.

7. Fie (x_n), (y_n) două şiruri convergente la x. Se definesc şirurile $a_n=\min(x_n,y_n)$, $b_n=\max(x_n,y_n)$, $n\geq 1$. Arătaţi că şirurile (a_n), (b_n) sunt convergente la aceeaşi limită x.

8. Dacă x este punct de acumulare al mulţimii $\{x_n\,|\, n\geq 0\}$, atunci există un subşir al şirului (x_n) care converge la x.

9Fie (x_n) un şir convergent la x, iar $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ funcţie bijectivă. Atunci şirul $\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$ este convergent la x. Explicaţi legătura cu subşirurile.

10Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

1) Orice şir care conţine un subşir convergent este mărginit.

2) Orice şir care conţine un subşir monoton, este monoton.

3) Orice subşir al unui şir divergent este divergent.

11Orice şir de numere reale are un subşir monoton.

12Daţi un exemplu de şir divergent (x_n) cu proprietatea că subşirurile (x_{2n}), (x_{2n+1}) sunt convergente.

Şiruri convergente la zero

1Construiţi: 1) un şir de numere reale crescător, convergent la zero; 2) un şir descrescător, convergent la zero; 3) un şir alternant convergent la zero.

2Pentru $\varepsilon>0$ şi x_n indicate în tabelul de mai jos, determinaţi rangul $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ astfel încât pentru $n\geq n_\varepsilon$ să avem $|x_n|<\varepsilon$.

	a)	b)	c)	d)	e)
$x_n=$	$\frac{3}{n^2}$	$\frac{2}{n+1}$	$\frac{3(-1)^n}{2n+1}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$\frac{1}{\sqrt{n+1}}$
$\varepsilon=$	0,01	0,001	0,01	0,01	0,001
$n_\varepsilon=$					

3Să se calculeze limitele de şiruri:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}\right)$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n^3}\right)$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n-2}{n^3}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}-\frac{3}{2^n}\right)$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-3\cdot 3^n}{5^n}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+0{,}5^n\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n-1+\frac{2}{\sqrt[3]{n}}\right]\left(1+\frac{3}{\sqrt{n}}-\frac{5}{3^n}\right)$; 10) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2(-1)^n}{3n-1}$; 11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{5^n}$;

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)\frac{n}{n^2+1}$; 13) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n}}{3+\frac{1}{n^2}-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$; 14) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{3-0{,}2^n}$; 15) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sin n$; 17) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}-\frac{1}{3^n}\right)\cos n$; 18) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sin\frac{n\pi}{2}$;

19) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(3\sin n-6\cos n)$.

4Arătaţi că: 1) $\forall n\geq 4$, $2^n\geq\frac{n^3}{24}$ şi deduceţi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}$;

2) $\forall n\geq 6$, $\left(\frac{n}{3}\right)^n<n!<\left(\frac{n}{2}\right)^n$ şi deduceţi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$.

5Arătaţi că dacă şirul (x_n), $x_n\geq 0$, $\forall n$ este convergent la zero, atunci şirul $\left(\sqrt{x_n}\right)$ este de asemenea convergent la zero.

2.3. OPERAŢII CU ŞIRURI CARE AU LIMITĂ

Fie $(x_n),(y_n)$ două şiruri care au limitele (finite – şiruri convergente sau infinite – şiruri divergente) x şi respectiv y. Cu aceste şiruri am construit şirurile :

1) **sumă** $(x_n+y_n)=(x_n)+(y_n)$, $\forall n$;

2) **produs** $(x_ny_n)=(x_n)(y_n)$, $\forall n$;

3) **înmulţirea cu scalari** $(\alpha x_n)=\alpha(x_n)$, $\forall n$, $\alpha\in\mathbb{R}$;

4) **cât** $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=\frac{(x_n)}{(y_n)}$, $y_n\neq 0$, $\forall n$, etc.

De asemenea, am văzut cum se definesc operaţiile aritmetice în $\overline{\mathbb{R}}$ şi ce proprietăţi au (comutativitate, etc.). În acest paragraf vom vedea cum se comportă aceste şiruri prin trecerea la limită şi ce legătură există între limitele lor şi limitele şirurilor date, astfel spus se evidenţiază compatibilitatea între trecerea la limită şi structura algebrică a lui $\overline{\mathbb{R}}$. Deoarece pentru un şir care are limită, adăugarea sau înlăturarea unui număr finit de termeni, conduce la un şir cu aceeaşi limită vom considera şiruri $(x_n)_{n\geq 0}$.

Analizăm pe rând aceste operaţii. Ele constituie un important instrument pentru determinarea limitelor.Demonstraţiile teoremelor sunt facultative.

1) Adunarea

Fie $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, $y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$. Notăm şir convergent prin s.c., iar şir divergent prin s.d.

Are loc următoarea:

Teoremă. Fie $x_n \to x$, $y_n \to y$, $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dacă		$\lim x_n$	$\lim y_n$	atunci	$\lim(x_n + y_n)$	Scrierea simbolică a operaţiei în $\overline{\mathbb{R}}$	Concluzia
	1)	$x \in \mathbb{R}$ s.c.	$y \in \mathbb{R}$ s.c.		$x+y$ s.c.	$x+y$	Sumă de s.c. este un s.c.
	2)	$x = \infty$ s.d.	$y \in \mathbb{R}$ s.c.		∞ s.d.	$\infty + y = \infty$	Suma dintre un s.d. şi un s.c. este un s.d.
	3)	$x = -\infty$ s.d.	$y \in \mathbb{R}$ s.c.		$-\infty$ s.d.	$-\infty + y = -\infty$	
	4)	$x = \infty$ s.d.	$y = \infty$ s.d.		∞ s.d.	$\infty + \infty = \infty$	Şiruri divergente cu limită $+\infty$ sau $-\infty$
	5)	$x = -\infty$ s.d.	$y = -\infty$ s.d.		$-\infty$ s.d.	$-\infty - \infty = -\infty$	
	6)	$x = -\infty$ s.d.	$y = \infty$ s.d.		Nu are sens	$-\infty + \infty$	Operaţii fără sens $-\infty + \infty$, $\infty - \infty$
	7)	$x = \infty$ s.d.	$y = -\infty$ s.d.		Nu are sens	$\infty - \infty$	

Dacă şirurile (x_n) şi (y_n) au limită (finită sau infinită) şi dacă suma limitelor are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci şirul $(x_n + y_n)$ are limită şi **limita sumei este egală cu suma limitelor**, adică $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Demonstraţie. 1) Presupunem că ambele şiruri sunt convergente, adică $x, y \in \mathbb{R}$. Utilizăm criteriul de convergenţă cu ε. Fie $\varepsilon > 0$, arbitrar. Deoarece $x_n \to x$, există $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n'_\varepsilon$ să avem $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$, (1).

Din $y_n \to y$, există $n''_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n''_\varepsilon$ să avem $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$, (2).

Alegem $n_\varepsilon = \max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon)$. Avem $n_\varepsilon \geq n'_\varepsilon$, $n_\varepsilon \geq n''_\varepsilon$. Pentru $n \geq n_\varepsilon$ evaluăm diferenţa:

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

unde am folosit inegalitatea triunghiului $|a+b| \leq |a| + |b|$ şi relaţiile (1) şi (2).

Aşadar, pentru $\varepsilon > 0$ am găsit $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$, $|x_n + y_n - (x+y)| < \varepsilon$, ceea ce arată că $x_n + y_n \to x + y$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

2) Fie $\varepsilon > 0$, arbitrar. Din $x_n \to \infty$, există $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n'_\varepsilon$ să avem $x_n > 2\varepsilon - y$. Din $y_n \to y$ se deduce existenţa lui $n''_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n''_\varepsilon$ să avem $|y_n - y| < \varepsilon$ sau $y - \varepsilon < y_n < y + \varepsilon$.

Luăm $n_\varepsilon = \max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon)$. Pentru $n \geq n_\varepsilon$ avem: $x_n + y_n > 2\varepsilon - y + y - \varepsilon = \varepsilon$.

Deci, pentru $\varepsilon > 0$, am găsit un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ începând de la care $(n \geq n_\varepsilon)$ să avem $x_n + y_n > \varepsilon$, ceea ce înseamnă $x_n + y_n \to \infty$ sau $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty + y = \infty$.

Celelalte cazuri temă. ■

Observaţii. 1) Se poate arăta că o sumă finită de şiruri convergente este un şir convergent şi limita sumei este egală cu suma limitelor.

În particular, $\lim\limits_{n\to\infty}(px_n) = p \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $p \in \mathbb{N}^*$. Vom vedea că relaţia are loc pentru orice $p \in \mathbb{R}$. Se spune că o constantă iese în faţa limitei.

2) În proprietăţile 2) şi 3) din teoremă, ţinând seama de $\infty + y = y + \infty = \infty$, $-\infty + y = y - \infty = -\infty$, $\forall y \in \mathbb{R}$, se pot schimba între ele şirurile $(x_n), (y_n)$ şi rezultatele se păstrează (adunarea lui $y \in \mathbb{R}$ cu $+\infty$ sau $-\infty$ este comutativă).

3) Avem $x_n - y_n = x_n + (-y_n)$ şi este diferenţa şirurilor $(x_n), (y_n)$. Dacă diferenţa limitelor are sens, atunci şirul $(x_n - y_n)$ are limită şi **limita diferenţei este egală cu diferenţa limitelor**, adică $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n - \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Dacă $(x_n), (y_n)$ sunt convergente, atunci diferenţa lor este tot un şir convergent.

În plus, dacă $(x_n), (y_n)$ sunt convergente şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci:

$\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \beta \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ (**liniaritatea limitei**)

4) Dacă $x_n = x, \forall n$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(x + y_n) = x + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

5) Dacă $(x_n), (y_n)$ **sunt şiruri convergente** $x_n \to x$, $y_n \to y$, atunci şirurile $(z_n), (v_n)$ definite prin $z_n = \max(x_n, y_n)$, $v_n = \min(x_n, y_n)$ sunt convergente.

Se utilizează egalităţile:

$$\max(a,b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|), \quad \min(a,b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|),$$

şi operaţiile cu şiruri convergente.

Exemple. 1) Fie $x_n=\frac{2n}{3n+1}$, $y_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{2}{3}$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$ şi deci

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n}{3n+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n+1}+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{2}{3}+0=\frac{2}{3}.$$

2) $x_n=\frac{2n^2}{n+1}$, $y_n=n^2$. Din $x_n=\frac{2n^2}{n+1}\geq n\to\infty$ rezultă $x_n\to\infty$. Şirul tip $\left(n^\alpha\right)$ cu $\alpha=2$, arată că $\lim\limits_{n\to\infty}n^2=\infty$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{n+1}+n^2\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n+1}+\lim\limits_{n\to\infty}n^2=\infty+\infty=\infty$.

3) $x_n=-\sqrt{n^2+1}$, $y_n=\frac{n}{n+1}$. Din $x_n\leq -n\to-\infty$, deducem $x_n\to-\infty$. Cum $y_n\to1$, avem

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}+\frac{n}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-\sqrt{n^2+1}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=-\infty+1=-\infty.$$

4) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=-\infty$ (sau $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\infty$), atunci despre şirul sumă (x_n+y_n) nu se poate afirma nimic. Este posibil ca (x_n+y_n) să fie convergent sau divergent (cu limita $+\infty$ sau $-\infty$, iar în alte cazuri limita să nu existe).

Într-adevăr fie:

a) $(x_n):1+1,2+1,...,n+1,...\to\infty$, $(y_n):-1,-2,-3,...,-n,...\to-\infty$. Atunci $(x_n+y_n):1,1,1,...\to1$ (şir convergent);

b) $(x_n):2,4,6,...,2n,...\to\infty$, $(y_n):-1,-2,-3,...,-n\to-\infty$, iar $(x_n+y_n):1,2,3,...,n,...\to\infty$ (şir divergent cu limita $+\infty$);

c) $(x_n):1,2,...,n,...\to\infty$, $(y_n):-2,-4,-6,...,-2n,...\to-\infty$, iar $(x_n+y_n):-1,-2,...,-n,...\to-\infty$ (şir divergent cu limita $(-\infty)$;

d) $(x_n):2,2,4,4,...,2n,2n,...\to\infty$, $(y_n):-1,-2,-3,...,-2n+1,-2n,...\to-\infty$, iar $(x_n+y_n):1,0,1,0,1,...$ nu are limită (şir divergent).

Pentru eliminarea nedeterminării se prelucrează şirul (x_n+y_n) convenabil.

Exemplu. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

R. Luând limita fiecărui termen găsim $\lim\sqrt{n+1}=\lim\sqrt{n}=\infty$ şi deci suntem în cazul de nedeterminare $\infty-\infty$. Pentru eliminarea nedeterminării se amplifică cu expresia conjugată şi avem:

$$\lim\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Din $0<\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$ şi $\frac{1}{\sqrt{n}}\to0$ (vezi şirul $\left(n^\alpha\right)$, cu $\alpha=\frac{1}{2}$), via criteriul majorării de la şiruri convergente la zero, deducem $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\to0$. Deci $\lim\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0$.

2) Produsul

Are loc următoarea:

Teoremă. Fie $x_n\to x$, $y_n\to y$, $x,y\in\overline{\mathbb{R}}$

Dacă

	$\lim x_n$	$\lim y_n$
1)	$x\in\mathbb{R}$ s.c.	$y\in\mathbb{R}$ s.c.
2)	$x>0$ s.c.	∞ s.d.
3)	$x<0$ s.c.	∞ s.d.
4)	$x>0$ s.c.	$-\infty$ s.d.
5)	$x<0$ s.c.	$-\infty$ s.d.
6)	∞ s.d.	∞ s.d.
7)	∞ s.d.	$-\infty$ s.d.
8)	$-\infty$ s.d.	$-\infty$ s.d.
9)	0 s.c.	$\pm\infty$ s.d.

atunci

	$\lim(x_ny_n)$	Scrierea simbolică a operaţiei în $\overline{\mathbb{R}}$	Concluzia
1)	$x\ y$ s.c.	$x\ y$	Produs de s.c. este s.c.
2)	∞ s.d.	$x\cdot\infty=\infty$	Şir divergent
3)	$-\infty$ s.d.	$x\cdot\infty=-\infty$, $x<0$	
4)	$-\infty$ s.d.	$x\cdot(-\infty)=-\infty$, $x>0$	
5)	∞ s.d.	$x\cdot(-\infty)=\infty$, $x<0$	
6)	∞ s.d.	$\infty\cdot\infty=\infty$	
7)	$-\infty$ s.d.	$\infty\cdot(-\infty)=-\infty$	
8)	∞ s.d.	$(-\infty)\cdot(-\infty)=\infty$	
9)	Nu are sens	$0(\pm\infty)$	Operaţie fără sens: $0(\pm\infty)$

Dacă şirurile $(x_n),(y_n)$ au limită (finită sau infinită) şi dacă produsul limitelor are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci şirul (x_ny_n) are limită şi limita **produsului este egală cu produsul limitelor**, adică $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=\left(\lim\limits_{n\to\infty}x_n\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty}y_n\right)$.

Corolar. Dacă $x_n=c\in\mathbb{R},\forall n$ şi dacă operaţia $c\cdot y$ are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(c\cdot y_n)=c\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

O constantă iese în faţa limitei.

Demonstraţie. 1) Cum şirul (y_n) este convergent, el este mărginit. Aşadar există $M>0$ astfel încât $|y_n|\leq M_1,\forall n$.

Avem de evaluat diferența $|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - xy_n + xy_n - xy| =$

$= |(x_n - x) y_n + x(y_n - y)| \le |x_n - x||y_n| + |x||y_n - y|$. Fie $M = \max(M_1, |x|)$.

Atunci $|x_n y_n - xy| \le |x_n - x| M + M|y_n - y|$. $(*)$

Din convergența șirurilor $(x_n), (y_n)$ via criteriul cu ε, conchidem că $\forall \varepsilon > 0$, arbitrar există numerele naturale (rangurile) n'_ε, n''_ε astfel încât $\forall n \ge n'_\varepsilon$, $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2M}$ și $\forall n \ge n''_\varepsilon$, $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Fie $n_\varepsilon = \max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon)$.

Dacă $n \ge n_\varepsilon$, utilizând $(*)$ avem: $|x_n y_n - xy| \le M|x_n - x| + M|y_n - y| <$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Așadar pentru $\varepsilon > 0$, arbitrar există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $n \ge n_\varepsilon$ să avem $|x_n y_n - xy| < \varepsilon$, ceea ce arată că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = xy = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

2) Fie $\varepsilon > 0$, arbitrar. Din $x_n \to x > 0$, există $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \ge n'_\varepsilon$ să rezulte $x_n \in \left(\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}\right)$. Din $y_n \to \infty$, există $n''_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \ge n''_\varepsilon$ să avem $y_n > \frac{2\varepsilon}{x}$. Punem $n_\varepsilon = \max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon)$ și pentru $n \ge n_\varepsilon$ avem:

$x_n y_n > \frac{x}{2} \cdot \frac{2\varepsilon}{x} = \varepsilon$. Așadar, pentru $\varepsilon > 0$, am determinat un rang n_ε astfel încât $x_n y_n > \varepsilon, \forall n \ge n_\varepsilon$, ceea ce arată că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \infty = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x \cdot \infty = \infty$.

Celelalte cazuri se tratează analog (Temă). ■

Observații. **1)** Se arată inductiv că un produs finit de șiruri convergente este tot un șir convergent și limita produsului este egală cu produsul limitelor.

În particular, dacă $x_n \to x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n^k = \lim_{n\to\infty} \underbrace{x_n \cdot x_n \cdot \ldots \cdot x_n}_{k} = \underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \ldots \cdot \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)}_{k} = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^k$$

Exemplu. $x_n = \frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{2}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^5 = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$.

2) Nu se acordă nici un sens operațiilor $0 \cdot \infty, 0 \cdot (-\infty)$. În acest caz șirul produs $(x_n y_n)$ poate fi convergent sau divergent (cu limita $+\infty$ sau $-\infty$ sau să nu aibă limită). Ilustrăm această situație prin cazurile:

a) $(x_n): 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \to 0, (y_n): 1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2, \ldots \to \infty$, iar

$(x_n y_n): 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots \to \infty$ (șir divergent cu limita ∞);

b) $(x_n): 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots \to \infty, (y_n): 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots \to 0$, iar

$(x_n y_n): 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \to 0$ (șir convergent);

c) $(x_n): -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots, \frac{(-1)^n}{n}, \ldots \to 0, (y_n): 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots \to \infty$, iar

$(x_n y_n): -1, 1, -1, 1, \ldots$ (șir divergent – nu are limită).

Exemple. 1) $x_n = \frac{3n+1}{5n+1} \to \frac{3}{5}$, $y_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0$. **Atunci** $\frac{3n+1}{5n+1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \to \frac{3}{5} \cdot 0 = 0$.

2) $x_n = \frac{n^2}{n+1} \to \infty$, $y_n = \sqrt{n^3} \to \infty$. **Atunci** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty \cdot \infty = \infty$.

3) $x_n = -3^n \to -\infty$, $y_n = -n^4 \to -\infty$. **Atunci** $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(-3^n\right)\left(-n^4\right)\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \left(-3^n\right) \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(-n^4\right) =$

$= (-\infty)(-\infty) = \infty$.

4) $x_n = n \to \infty$, $y_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \to 0$. **Suntem în cazul de nedeterminare** $\infty \cdot 0$.

Se prelucrează șirul produs astfel: $x_n y_n = n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \to 0$.

5) $x_n = 3^n \to \infty$, $y_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n \to 0$. **Suntem în cazul de nedeterminare** $\infty \cdot 0$. **Se scrie șirul produs sub forma** $x_n y_n = 3^n \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n = \left(\frac{6}{5}\right)^n \to \infty$ **(șirul exponențial de bază** $\frac{6}{5}$**).**

Șir remarcabil: șirul definit printr-o funcție polinomială

Avem următoarea:

Teoremă. Fie șirul (x_n) cu termenul general

$$x_n = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_{k-1} n + a_k, a_0 \ne 0, k \in \mathbb{N}^*.$$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_0 n^k = a_0 \infty = \begin{cases} \infty, \text{dacă } a_0 > 0 \\ -\infty, \text{dacă } a_0 < 0 \end{cases}$.

Regulă. Limita unui șir definit printr-o funcție polinomială este egală cu limita termenului de grad maxim $a_0 n^k$: este egală cu ∞ dacă $a_0 > 0$ sau $-\infty$, dacă $a_0 < 0$.

Demonstrație. O funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_{k-1} x + a_k$, $a_0 \ne 0$ **se numește funcție polinomială de grad** $k \ge 1, k \in \mathbb{N}$.

Atunci $x_n = f(n)$. Pentru a calcula limita șirului se prelucrează termenul general

astfel (forțare de factor comun n la puterea cea mai mare, n^k)

$$x_n = n^k\left(a_0+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+...+\frac{a_k}{n^k}\right).$$

Cum $\frac{a_i}{n^i}\to 0, i=\overline{1,k}$, șirul din paranteză converge la a_0 (adunare de șiruri convergente). Ținând seama de operația de înmulțire a șirurilor avem:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} n^k \cdot \lim_{n\to\infty} a_0 = \infty\cdot a_0 = \begin{cases}\infty, \text{dacă } a_0>0\\ -\infty, \text{dacă } a_0<0\end{cases}. \blacksquare$$

Exemple. 1) $x_n = 3n^5-1000n^4+3$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} 3n^5 = 3\cdot\infty=\infty$;

2) $x_n = -n^{10}+99999n^9+1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\left(-n^{10}\right) = -\infty$.

Nedeterminări de forma $\infty-\infty$ se pot elimina utilizând limita produsului în urma forțării de factor comun

Să se calculeze limitele șirurilor a) 2^n-3^n; b) 3^n-n^5.

R. a) Luăm limita, termen cu termen, obținem nedeterminarea $\infty-\infty$ (am ținut seama de șirul remarcabil $\left(a^n\right), a>1$).

Pentru eliminarea nedeterminării se forțează factor comun exponențiala cu baza supraunitară cea mai mare (aici 3^n) și avem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(2^n-3^n\right) = \lim_{n\to\infty} 3^n\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n-1\right] = \infty(0-1) = -\infty$$ (am ținut seama de limita

șirului exponențial de bază $3>1$ și respectiv $\frac{2}{3}\in(0,1)$);

b) Am arătat la șiruri convergente la zero că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0, k\in\mathbb{N}, a>1$. Aceasta se traduce prin a spune că pentru valori mari ale lui n $(n\to\infty)$ exponențiala de bază supraunitară $(a>1)$ crește mult mai repede decât funcția putere. Se forțează factor comun 3^n și avem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(3^n-n^5\right) = \lim_{n\to\infty} 3^n\left(1-\frac{n^5}{3^n}\right) = \infty(1-0)=\infty.$$

3) Câtul

Pentru câtul a două șiruri avem următoarea:

Teoremă. Fie $x_n\to x$, $y_n\to y$, $y_n\neq 0, \forall n, x, y\in\overline{\mathbb{R}}$.

Dacă		$\lim x_n$	$\lim y_n$	atunci		$\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$	Scrierea simbolică a operației în $\overline{\mathbb{R}}$	Concluzia
	1)	$x\in\mathbb{R}$ s.c.	$y\in\mathbb{R}, y\neq 0$ s.c.		1)	$\frac{x}{y}$ s.c.	$\frac{x}{y}$	Cât de s.c. este s.c.
	2)	$x\in\mathbb{R}$ s.c.	$\pm\infty$ s.d.		2)	$\frac{0}{\pm\infty}$ s.c.	$\frac{x}{\pm\infty}=0$	Câtul dintre un s.c. și unul div. cu $y=\pm\infty$ este s.c. la zero
	3)	∞ s.d.	$y>0$ s.c.		3)	∞ s.d.	$\frac{\infty}{y}=\infty, y>0$	Șir divergent
	4)	∞ s.d.	$y<0$ s.c.		4)	$-\infty$ s.d.	$\frac{\infty}{y}=-\infty, y<0$	
	5)	$-\infty$ s.d.	$y>0$ s.c.		5)	$-\infty$ s.d.	$\frac{-\infty}{y}=-\infty, y>0$	
	6)	$-\infty$ s.d.	$y<0$ s.c.		6)	∞ s.d.	$\frac{-\infty}{y}=\infty, y<0$	
	7)	$x>0$ s.c.	$y_n>0, y=0$ s.c.		7)	∞ s.d.	$\frac{x}{0_+}=\infty, x>0$	
	8)	$x>0$ s.c.	$y_n<0, y=0$ s.c.		8)	$-\infty$ s.d.	$\frac{x}{0_-}=-\infty, x>0$	
	9)	$x<0$ s.c.	$y_n>0, y=0$ s.c.		9)	$-\infty$ s.d.	$\frac{x}{0_+}=-\infty, x<0$	
	10)	$x<0$ s.c.	$y_n<0, y=0$ s.c.		10)	∞ s.d.	$\frac{x}{0_-}=\infty, x<0$	
	11)	0 s.c.	0 s.c.		11)	Nu are sens	$\frac{0}{0}$	Operație fără sens: $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
	12)	$\pm\infty$ s.d.	$\pm\infty$ s.d.		12)	Nu are sens	$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	

Dacă şirurile $(x_n),(y_n)$ au limită (finită sau infinită) şi dacă raportul limitelor are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci şirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ are limită şi **limita câtului este egală cu câtul limitelor**, adică $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$.

Observaţie . Dacă suntem în situaţia de nedeterminare $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, atunci nu se poate afirma nimic în privinţa existenţei limitei şirului $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ şi nici a valorii acesteia în $\overline{\mathbb{R}}$.

Exemple.

a) $x_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\to 0, y_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n\to 0$ **. Atunci** $\frac{x_n}{y_n}=\left(\frac{3}{2}\right)^n\to\infty$ **(şir divergent cu limita** $+\infty$**);**

b) $x_n=\left(\frac{1}{5}\right)^n\to 0, y_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ **. Atunci** $\frac{x_n}{y_n}=\left(\frac{2}{5}\right)^n\to 0$ **(şir convergent);**

c) $x_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\to 0, y_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n\to 0$ **. Atunci** $\frac{x_n}{y_n}=(-2)^n:-2,4,-8,16,\ldots$ **(şir divergent, nu are limită);**

d) $x_n=2n\to\infty, y_n=n\to\infty$ **. Atunci** $\frac{x_n}{y_n}=2\to 2$ **(şir convergent);**

e) $x_n=n^2\to\infty, y_n=n\to\infty$ **. Atunci** $\frac{x_n}{y_n}=n\to\infty$ **(şir divergent cu limita** $+\infty$**);**

f) $x_n=\left(3+(-1)^n\right)n\to\infty, y_n=\left(2+(-1)^n\right)n+1\to\infty$ **.**

Atunci $\frac{x_{2n}}{y_{2n}}=\frac{8n}{6n+1}\to\frac{4}{3}, \frac{x_{2n+1}}{y_{2n+1}}=\frac{2n+1}{n+1}\to 2$ **arată că** $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ **nu are limită (şir divergent).**

Şir remarcabil: şirul definit prin câtul a două funcţii polinomiale

Avem următoarea:

Teoremă. Fie şirul (x_n) cu $x_n=\frac{P(n)}{Q(n)}$, unde :

$P(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\ldots+a_{k-1}x+a_k, a_0\neq 0, k\geq 1, k\in\mathbb{N},$

$Q(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m, b_0\neq 0, m\geq 1, m\in\mathbb{N},$

sunt două funcţii polinomiale.

Atunci

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\begin{cases}\infty\left(\frac{a_0}{b_0}\right), \text{dacă } k>m & \text{(gradul numărătorului este strict mai mare decât gradul numitorului)}\\ \frac{a_0}{b_0}, \text{dacă } k=m & \text{(gradul numărătorului este egal cu gradul numitorului)}\\ 0, \text{dacă } k<m & \text{(gradul numărătorului este strict mai mic decât gradul numitorului)}\end{cases}$$

Demonstraţie. Dacă am lua direct $\lim\limits_{n\to\infty}P(n)$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}Q(n)$ am obţine nedeterminarea $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Pentru eliminarea ei forţăm factor comun la numărător şi numitor n la puterea cea mai mare, respectiv n^k şi n^m.

Să considerăm un număr natural N mai mare decât orice rădăcină reală a lui Q.

Pentru $n>N$, x_n se poate scrie sub forma:

$$x_n=\frac{P(n)}{Q(n)}=\frac{n^k\left(a_0+\frac{a_1}{n}+\ldots+\frac{a_k}{n^k}\right)}{n^m\left(b_0+\frac{b_1}{n}+\ldots+\frac{b_m}{n^m}\right)}=n^{k-m}\cdot\frac{a_0+\frac{a_1}{n}+\ldots+\frac{a_k}{n^k}}{b_0+\frac{b_1}{n}+\ldots+\frac{b_m}{n^m}}=n^{k-m}\cdot y_n.$$

Cum $y_n\to\frac{a_0}{b_0}$ din operaţiile cu şiruri convergente şi $\frac{a_i}{n^i}\to 0, \frac{b^l}{n^l}\to 0,$

$i=\overline{1,k}, l=\overline{1,m}$), avem că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ se discută după valorile lui k şi m gradele funcţiilor P şi Q şi anume:

a) Pentru $k>m$ (adică, **gradul numărătorului strict mai mare decât gradul numitorului**), $\lim\limits_{n\to\infty}n^{k-m}=\infty$ şi deci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty\left(\frac{a_0}{b_0}\right) = \begin{cases} \infty, \text{ dacă } \dfrac{a_0}{b_0} > 0 \\ -\infty, \text{ dacă } \dfrac{a_0}{b_0} < 0 \end{cases}.$$

b) Pentru $k = m$ **(gradul numărătorului este egal cu gradul numitorului),**

$\lim_{n\to\infty} n^{k-m} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$ **şi deci** $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{a_0}{b_0}$, **adică limita este egală cu câtul coeficienţilor termenilor de grad maxim de la numărător şi numitor).**

c) Pentru $k < m$ **(gradul numărătorului este strict mai mic decât gradul numitorului),** $\lim_{n\to\infty} n^{k-m} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{m-k}} = \frac{1}{\infty} = 0$ **şi deci** $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. ■

Exemplu. **Să se calculeze: a)** $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{n^2+1}$; **b)** $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{3n^2+n}$; **c)** $\lim_{n\to\infty} \frac{1000n+1}{n^2+2}$.

R. a) Avem succesiv

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} n\cdot\frac{1+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^2}} = \lim_{x\to\infty} n\cdot\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \infty\cdot\frac{1+0}{1+0} = \infty.$$

Conform teoremei $k = 3 > 2 = m$ **şi deci limita este egală cu** $\infty\cdot\frac{1}{1} = \infty$. **Am preferat să nu aplicăm direct teorema, pentru că această tehnică a forţării de factor comun se aplică şi în alte situaţii.**

b) Conform teoremei $k = 2 = m$ **şi deci limita este egală cu câtul coeficienţilor termenilor** n^2 **de la numărător şi numitor, adică egală cu** $\frac{2}{3}$.

Desfăşurat limita se scrie succesiv:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n^2}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}}{3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3}.$$

c) Suntem în cazul teoremei cu $k = 1 < 2 = m$ **şi deci limita este egală cu zero.**

Desfăşurat limita devine:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1000+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\frac{1000+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1000+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = 0\cdot\frac{1000+0}{1+0} = 0.$$

Exerciţii rezolvate

1. **Să se calculeze limitele: 1)** $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+1}$; **2)** $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n+2^n}$; **3)** $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n+n}$;

4) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+5^n}{3^{n+1}+5^{n+1}}$; **5)** $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n\cdot n+1}{3^{n+1}\cdot n+1}$.

R. 1) Trecând la limită la numărător şi numitor obţinem ∞. **Deci suntem în cazul de nedeterminare** $\frac{\infty}{\infty}$. **Avem:** $\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+1} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(2+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{n}}} \to \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2}$ **(am forţat factor comun la numitor pe** $\sqrt{n}$ **).**

2) Dacă am lua limita din numărător şi numitor separat am obţine nedeterminarea $\frac{\infty}{\infty}$.

Pentru eliminarea ei procedăm astfel:

$$\frac{3^n}{3^n+2^n} = \frac{3^n}{3^n\left[1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]} = \frac{1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n} \to \frac{1}{1+0} = 1$$ **(la numitor am forţat factor comun exponenţiala cu bază supraunitară cea mai mare, adică** 3^n **).**

3) În încercarea de a calcula $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ **după formula** $\frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$ **constatăm că obţinem nedeterminarea** $\frac{\infty}{\infty}$. **Pentu eliminarea ei prelucrăm astfel şirul (forţare de factor comun)**

$$\frac{2^n}{3^n+n} = \frac{2^n}{3^n\left(1+\frac{n}{3^n}\right)} = \left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\frac{1}{1+\frac{n}{3^n}} \to 0\cdot\frac{1}{1+0} = 0$$ **(unde** $\frac{n}{3^n} = n\left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0$ **)**

Observaţi că la numitor am scos factor comun „funcţia cea mai tare", în sensul că $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^n} = 0$.

De obicei pentru scrierea cursivă a limitei se procedează astfel:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n+n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n\left(1+\frac{n}{3^n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\frac{1}{1+\frac{n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\frac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}} = 0\cdot\frac{1}{1+0} = 0.$$

Scrierea $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, **atenţionează că nu se poate aplica formula** $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$ **şi că urmează să se prelucreze şirul astfel încât să se elimine nedeterminarea şi să se calculeze limita utilizând operaţiile cu limite de şiruri.**

4) Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+5^n}{3^{n+1}+5^{n+1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n\left[\left(\frac{3}{5}\right)^n+1\right]}{5^{n+1}\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}+1\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5}\cdot\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}{\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}+1} = \frac{1}{5}\cdot\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}+1} =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{0+1}{0+1} = \frac{1}{5}.$$

$$\text{5) } \lim_{n\to\infty} \frac{3^n\cdot n+1}{3^{n+1}\cdot n+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot 3^n\left(1+\frac{1}{n\cdot 3^n}\right)}{n\cdot 3^{n+1}\left(1+\frac{1}{n\cdot 3^{n+1}}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\cdot\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n\cdot 3^n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n\cdot 3^{n+1}}\right)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1+0}{1+0} = \frac{1}{3}.$$

2. **Să se determine parametrii $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ pentru care pe rând:**

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n+1}-\alpha n-\beta\right)=0$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\alpha n-\beta\right)=0$.

R. **1) Trecînd la limită, termen cu termen, rezultă $\infty-\alpha\cdot\infty-\beta$. Dacă $\alpha\le 0$, se obține limita ∞, fals, iar dacă $\alpha>0$ suntem în cazul de nedeterminare $\infty-\infty$. Pentru eliminarea nedeterminării se aduce, în paranteză, la același numitor.**

Avem: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1-\alpha)n^2-(\alpha+\beta)n-\beta}{n+1}=0$. Aceasta are loc dacă $1-\alpha=0$ și dacă $\alpha+\beta=0$.

De aici $\alpha=1$, $\beta=-1$.

2) Trecem la limită, termen cu termen, și obținem $\infty-\alpha\cdot\infty-\beta$.

Dacă $\alpha\le 0$, se obține limita $+\infty$, fals, iar dacă $\alpha>0$ suntem în cazul de nedeterminare $\infty-\infty$.

Pentru calculul limitei se amplifică cu expresia conjugată.

Avem: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\alpha n-\beta\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n-(\alpha n+\beta)^2}{\sqrt{n^2+n}+\alpha n+\beta}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1-\alpha^2)n^2+(1-2\alpha\beta)n-\beta^2}{n\left[\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\alpha+\frac{\beta}{n}\right]}=0,$

dacă $1-\alpha^2=0$ și $1-2\alpha\beta=0$. Cum $\alpha>0$ se reține $\alpha=1$ și apoi $\beta=\frac{1}{2}$.

3. **Să se determine $\alpha\in\mathbb{R}$ astfel încât șirul (x_n), $x_n=\alpha\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ să fie convergent.**

R. **Dacă $\alpha<0$, atunci limita șirului este $-\infty$ și avem șir divergent.**

Pentru $\alpha=0$ șirul are limita $-\infty$ și este, din nou, divergent.

Pentru $\alpha>0$, luând limita termen cu termen, se obține nedeterminarea $\infty-\infty$.

Avem: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\alpha^2-1)n+\alpha^2}{\alpha\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\left[\alpha^2-1+\frac{\alpha^2}{n}\right]}{\sqrt{n}\left[\alpha\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right]}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\,\frac{\alpha^2-1+\frac{\alpha^2}{n}}{\alpha\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\infty\cdot\frac{\alpha^2-1}{\alpha+1}.$

Dacă $\alpha\ne 1\,(\alpha>0)$, atunci șirul este divergent.

Deci $\alpha=1$, când limita șirului este $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$.

4) Logaritmi

Se adoptă următoarele convenții:

1) $\log_a\infty=\infty$ și $\log_a 0=-\infty$, dacă $a>1$

2) $\log_a\infty=-\infty$ și $\log_a 0=\infty$, dacă $a\in(0,1)$

Suportul intuitiv al acestor convenții este oferit de graficul funcției logaritmice $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_a x$ când $a>1$ sau $a\in(0,1)$.

Are loc următoarea:

Teoremă. Fie $x_n>0$, $x_n\to x\in\overline{\mathbb{R}}$.

Dacă

	$\lim x_n$
1)	$x\in(0,\infty)$ s.c.
2)	∞ s.d.
3)	0 s.c.

atunci

		$\lim\log_a x_n$	Scrierea simbolică a operației în $\overline{\mathbb{R}}$	
1)		$\log_a x$ s.c.	$\log_a x$	
2)	∞	$a>1$	$\log_a\infty=\infty$	$a>1$
	$-\infty$	$a\in(0,1)$	$\log_a\infty=-\infty$	$a\in(0,1)$
3)	$-\infty$	$a>1$	$\log_a 0=-\infty$	$a>1$
	∞	$a\in(0,1)$	$\log_a 0=\infty$	$a\in(0,1)$

Dacă $x_n>0,\forall n,\ x_n\to x\in\overline{\mathbb{R}}$ și dacă $\log_a\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, $a>0$, $a\ne 1$, are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci șirul $\log_a x_n$ are limită în $\overline{\mathbb{R}}$ și mai mult $\lim\limits_{n\to\infty}\log_a x_n=\log_a\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, adică **limita logaritmului este egală cu logaritmul limitei.**

Exemple 1) Fie $x_n=\lg\frac{100n^2+n}{10n^2+1}$; $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lg\lim\limits_{n\to\infty}\frac{100n^2+n}{10n^2+1}=\lg\frac{100}{10}=\lg 10=1$.

2) $x_n=\ln\frac{3n^2+n+1}{2n+3}$; $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\ln\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+1}{2n+3}=\ln\left(\frac{3}{2}\cdot\infty\right)=\ln\infty=\infty$.

3) $x_n=\log_{\frac{1}{10}}\frac{n}{n^2+1}$; $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\log_{\frac{1}{10}}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\log_{\frac{1}{10}}0=\infty$.

4) $x_n=\lg\frac{n}{n^3+n+1}$; $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lg\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^3+n+1}=\lg 0=-\infty$.

5) $x_n=\log_{\frac{1}{3}}\frac{n^2}{n+1}$; $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\log_{\frac{1}{3}}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+1}=\log_{\frac{1}{3}}\infty=-\infty$.

6) $x_n=\frac{\ln\left(n^2+1\right)}{\ln\left(n^3+1\right)}$; $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\ln n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{3\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)\left[2+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\ln n}\right]}{(\ln n)\left[3+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{\ln n}\right]}=\frac{2}{3}.$$

5) Ridicarea la putere

Are loc următoarea:

Teoremă. Fie $x_n \to x,\ x_n > 0,\ \forall n,\ x > 0,\ x \in \overline{\mathbb{R}},\ y_n \to y \in \overline{\mathbb{R}}$

Dacă

	$\lim x_n$	$\lim y_n$
1)	$x > 0$ s.c.	$y \in \mathbb{R}$ s.c.
2)	$x > 1$ s.c.	$y = \infty$ s.d.
		$-\infty$ s.d.
3)	$x \in (0,1)$ s.c.	∞ s.d.
		$-\infty$ s.d.
4)	∞ s.d.	$y > 0$
		$y < 0$
5)	0 s.c.	∞ s.d.
6)	∞ s.d.	∞ s.d.
7)	∞ s.d.	$-\infty$ s.d.
8)	0 s.c.	0 s.c.
9)	∞ s.d.	0 s.c.
10)	1 s.c.	$\pm\infty$ s.d.

atunci

	$\lim\left(x_n^{y_n}\right)$	Scrierea simbolică a operației în $\overline{\mathbb{R}}$		Concluzia
1)	x^y	x^y		șir convergent
2)	∞ s.d.	$x^{\infty} = \infty$	$x > 1$	
	0 s.c.	$x^{-\infty} = 0$		
3)	0 s.c.	$x^{\infty} = 0$	$0 < x < 1$	
	∞ s.d.	$x^{-\infty} = \infty$		
4)	∞ s.d.	$\infty^y = \infty,\ y > 0$		
	0 s.c.	$\infty^y = 0,\ y < 0$		
5)	0 s.c.	$0^{\infty} = 0$		
6)	∞ s.d.	$\infty^{\infty} = \infty$		
7)	0 s.c.	$\infty^{-\infty} = 0$		
8)	Nu are sens	0^0		Operații fără sens: $0^0, \infty^0, 1^{\pm\infty}$
9)	Nu are sens	∞^0		
10)	Nu are sens	$1^{\pm\infty}$		

Dacă $x_n^{y_n}$ are sens pentru orice n, iar șirurile $(x_n), (y_n)$ au limite (finite sau infinite) și dacă $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$ are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci șirul $\left(x_n^{y_n}\right)$ are limită și mai mult $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, adică **limita se distribuie în bază și exponent.**

a) Dacă $y_n = \frac{1}{k},\ \forall n,\ k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$, iar $x_n > 0,\ \forall n,\ x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n^{\frac{1}{k}}\right) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} x_n}$$ (dacă $x = \infty$, atunci $\sqrt[k]{x_n} \to \infty$).

b) Dacă $y_n = \frac{1}{2k+1},\ \forall n,\ k \in \mathbb{N},\ k \geq 1$, iar $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n^{\frac{1}{2k+1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[2k+1]{x_n} = \sqrt[2k+1]{\lim_{n\to\infty} x_n}$$ (dacă $x = -\infty$, atunci $\sqrt[2k+1]{x_n} \to -\infty$), iar dacă $x = \infty$, atunci $\sqrt[2k+1]{x_n} \to \infty$.

Convenție : $\sqrt[k]{\infty} = \infty,\ \sqrt[2k+1]{-\infty} = -\infty$.

Rezultatele din a) și b) se pot formula astfel : **limita radicalului este egală cu radicalul limitei.**

Exemple. 1) Fie $x_n = \frac{2n}{3n-2} \to \frac{2}{3},\ y_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0$. **Atunci** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n} = \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$.

2) $x_n = \frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{2},\ y_n = 2^n \to \infty$. **Atunci** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} = 0$.

3) $x_n = \frac{3n}{n+1} \to 3 > 1,\ y_n = n^2 \to \infty$ **și** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n} = 3^{\infty} = \infty$.

4) $x_n = n^2 + n \to \infty,\ y_n = \frac{5n+1}{n} \to 5$ **și** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n} = \infty^5 = \infty$.

5) $x_n = \frac{1}{n} \to 0,\ y_n = 3^n \to \infty$, **iar** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n} = 0^{\infty} = 0$.

6) $x_n = n^2 + 3 \to \infty,\ y_n = n^3 + n^2 \to \infty$ **și** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n} = \infty^{\infty} = \infty$.

7) $x_n = n^2 + 3n + 1 \to \infty,\ y_n = -\frac{n}{n+1} \to -1$ **și** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n} = \infty^{-1} = \frac{1}{\infty} = 0$.

8) $x_n = \sqrt{n^2+n}$ **și** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2+n\right)} = \sqrt{\infty} = \infty$.

9) $x_n = \sqrt[3]{-n^3+2n^2+3}$ **și** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt[3]{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-n^3+2n^2+3\right)} = \sqrt[3]{-\infty} = -\infty$.

10) $x_n=\sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Nedeterminările $0^0,\infty^0$ **se elimină** utilizând scrierea $a_n^{\,b_n}=e^{b_n\ln a_n}$.

Exemplu. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3^n+1\right)^{\frac{1}{n}}=\left(\infty^0\right)=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(3^n+1\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln 3^n\left[1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln 3^n+\ln\left[1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{n}}=$

$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\ln 3+\frac{1}{n}\ln\left[1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]\right\}}=e^{\ln 3}=3$.

Probleme propuse

Operaţii cu şiruri care au limită

1. **Să se calculeze limitele şirurilor cu termenul general:**

I. 1) $x_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{\sqrt{n}}$; 2) $x_n=\frac{2n}{n+3}+\frac{5n+2}{3n+4}$; 3) $x_n=2^n+\left(-\frac{1}{2}\right)^n$; 4) $x_n=2^n+3^n$.

II. 1) $x_n=2n^2-3n$; 2) $x_n=-5n^3+10n^2+100$; 3) $x_n=\frac{2n}{n+3}\cdot\frac{5n+2}{3n+4}$; 4) $x_n=\sqrt{n^2+1}\cdot 2^n$.

III. 1) $x_n=\frac{-n^2+1}{2n^4+3n^2}$; 2) $x_n=\frac{3n^4+n-1}{2n^4+1}$; 3) $x_n=\frac{-5n^4-2n^3+1}{2n^3+n^2-1}$; 4) $x_n=\frac{n^3-2n-5}{3n^2+n}$;

5) $x_n=\frac{n}{2n+1}+\frac{2n^2}{n^2+1}$; 6) $x_n=-\frac{n^2}{n+1}+\frac{n}{n+1}$; 7) $x_n=-3^n+\frac{n}{n+1}$; 8) $x_n=\frac{\sqrt{n^2+n+1}}{2n+3}$;

9) $x_n=\frac{\sqrt{n^2-n+2}}{\sqrt{n^3+n-1}}$; 10) $x_n=\frac{5n^2-\sqrt{n^3+2n}}{3n^2+n}$; 11) $x_n=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$;

12) $x_n=\frac{n^2}{n+1}-\frac{n^2+1}{n+2}$; 13) $x_n=\frac{n^3+n}{n^2-n+1}-\frac{n^2-1}{n+1}$; 14) $x_n=\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$;

15) $x_n=n\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)$; 16) $x_n=\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-2\sqrt{n}\right)$.

IV. 1) $x_n=\frac{1+3+5+\ldots+2n-1}{n+1}-\frac{2n+1}{2}$; 2) $x_n=\frac{1+2+2^2+\ldots+2^n}{1+3+3^2+\ldots+3^n}$; 3) $x_n=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k}{3n^2}$;

4) $x_n=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^2}{5n^3}$; 5) $x_n=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^3}{4n^4+3n^2+1}$; 6) $x_n=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k(k+1)}{n^3+2n^2-1}$; 7) $x_n=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k(k+1)}{\sum\limits_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)}$.

V. 1) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$; 2) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$; 3) $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$.

VI. 1) $x_n=\prod\limits_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$; 2) $x_n=\prod\limits_{k=2}^{n}\frac{k^2+k-2}{k(k+1)}$; 3) $x_n=\prod\limits_{k=2}^{n}\frac{2k^2-k-1}{2k^2+k-1}$.

VII. 1) $x_n=\frac{3^n}{3^n-1}$; 2) $x_n=\frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$; 3) $x_n=\frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}$; 4) $x_n=\frac{2^n+n^2}{2^n+n}$;

5) $x_n=\frac{2^n+\alpha^n}{3^n+4^n},\alpha>0$; 6) $x_n=\frac{2^n+\alpha^n}{3^n+\beta^n},\alpha,\beta>0$; 7) $x_n=\frac{\alpha^n+\beta^n}{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}},\ \alpha,\beta>0$.

VIII. 1) $x_n=\sqrt{\frac{n}{n+1}}$; 2) $x_n=\sqrt[3]{\frac{n^2+3n}{8n^2-n+1}}$; 3) $x_n=\sqrt{n^2+3n}$; 4) $x_n=\sqrt[3]{-27n^5+3n^3}$;

5) $x_n=\sqrt{\frac{n^2}{n+1}}$; 6) $x_n=\sqrt[5]{\frac{-n^3+n+1}{n^2+1}}$; 7) $x_n=\sqrt{\frac{2^n+3^n}{3\cdot 4^n+4\cdot 5^n}}$; 8) $x_n=\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{4n^2+n}+2n}$;

9) $x_n=\cos\sqrt{n+1}-\cos\sqrt{n}$; 10) $x_n=\sin\left(\pi\sqrt{4n^2+n}\right)$.

IX. 1) $x_n=\log_3\left(\frac{n+1}{3n+1}\right)$; 2) $x_n=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{n+1}{2n^2+1}\right)$; 3) $x_n=\log_5\left(\frac{3n^2+n}{n^3+1}\right)$;

4) $x_n=\lg\left(\frac{100n^3+n^2}{10n^3+1}\right)$; 5) $x_n=\log_2\left(\frac{\sqrt{2n}+\sqrt{3n}}{\sqrt{4n}+\sqrt{5n}}\right)$; 6) $x_n=\lg\left(\frac{3^n+10^n}{7^n+10^{n+1}}\right)$;

7) $x_n=\ln\left(n^2+3n\right)-\ln\left(3n^2+2\right)$; 8) $x_n=\frac{\ln(2+n)}{\ln(3+n)}$; 9) $x_n=\frac{\ln\left(n^2+n\right)}{\ln n}$.

X. 1) $x_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n+1}{3n+1}}$; 2) $x_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2n-1}{n^2+1}}$; 3) $x_n=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{n^2+n+1}{2n+1}}$; 4) $x_n=3^{\frac{1}{n+1}}$; 5) $x_n=5^{\frac{n^2}{n+1}}$;

6) $x_n=\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{\frac{3n+1}{n+2}}$; 7) $x_n=\left(\frac{3n^2}{n+1}\right)^{\frac{n^2}{n+2}}$; 8) $x_n=\left(\frac{2n}{n+1}\right)^{\frac{-n^2+n+1}{n+3}}$.

2. **Să se determine** $a,b,c\in\mathbb{R}$ **astfel încât:**

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2}{n+1}-an-b\right)=1$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\left(1-a^2\right)^2n^2+2n}}{n}=3$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\left(1-a^2\right)^2n^2+1}}{5an+(1/2)^n}>3$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+4n+1}-an-b\right)=2\sqrt{2}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+an+b}+cn\right)=3$.

3. **Să se determine funcţiile** $f:D\to\mathbb{R}$, **precizând domeniile lor de definiţie:**

1) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2+xe^{nx}}{1+e^{nx}}$; 2) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-x^2+6}{x^{2n}+x^2+4}$; 3) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x^n\left(x^2+4\right)}{x\left(x^n+1\right)}$.

4. **Fie şirul convergent** (x_n) **şi un şir** (y_n) **cu proprietatea că** $\forall\varepsilon>0$, **există un rang** $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ **astfel încât** $\forall n\geq n_\varepsilon$, $|x_n-y_n|<\varepsilon$. **Este şirul** (y_n) **convergent ?**

5. **Fie** $(x_n),(y_n)$ **două şiruri astfel încât şirurile** (x_n) **şi** (x_n+y_n) **sunt convergente.**
Arătaţi că (y_n) **este şir convergent.**
Daţi un exemplu în care şirurile $(x_n),(y_n)$ **sunt divergente, dar** (x_n+y_n) **este convergent.**

6. **Fie** $(x_n),(y_n)$ **două şiruri astfel încât şirul** (x_n) **converge la** $x\neq 0$ **şi** (x_ny_n) **converge.**

Arătați că (y_n) este un șir convergent.

7. Dacă $(x_n),(y_n)$ sunt două șiruri cu proprietatea că (x_n+y_n), $(x_n y_n)$ și $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ sunt convergente, atunci $(x_n),(y_n)$ sunt convergente ?

2.4. ALTE CRITERII PENTRU EXISTENȚA LIMITEI UNUI ȘIR

1. Criteriul majorării

Am văzut la studiul convergenței unor șiruri (x_n) utilizând criteriul cu ε, că pentru determinarea rangului $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, începând de la care $(n \geq n_\varepsilon)$ are loc inegalitatea $|x_n - x| < \varepsilon$ se rezolvă această inegalitate. Acest lucru se face ușor dacă x_n are o expresie simplă. Dacă forma lui x_n este mai complicată, atunci se caută o inegalitate de forma $|x_n - x| < |y_n|$ (se spune că $|x_n - x|$ se majorează cu $|y_n|$), unde y_n este dat printr-o expresie mai simplă. Se rezolvă inegalitatea în n, $|y_n| < \varepsilon$ pentru determinarea rangului $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, începând de la care $|y_n| < \varepsilon$. Atunci pentru $n \geq n_\varepsilon$ avem evident inegalitatea $|x_n - x| < \varepsilon$. **În criteriul de convergență cu ε pentru un șir nu se cere primul $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ pentru care să avem $|x_n - x| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$, ci o valoare posibilă a lui n_ε pentru care să aibă loc inegalitatea $|x_n - x| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon$.**

O analiză similară are loc și pentru șiruri divergente cu limita $+\infty$ sau $-\infty$.

Să precizăm că aplicând acest criteriu se determină limita șirului.

Are loc următoarea:

Teoremă. Fie (x_n) un șir de numere reale.

1) (Criteriul majorării pentru șiruri convergente)

Dacă există $x \in \mathbb{R}$ și șirul (α_n) astfel încât $|x_n - x| \leq \alpha_n, \forall n$ și $\alpha_n \to 0$, atunci $x_n \to x$.

2) (Criteriul majorării pentru șiruri divergente)

a) Dacă există șirul (α_n) astfel încât $x_n \leq \alpha_n, \forall n$ și $\alpha_n \to -\infty$, atunci $x_n \to -\infty$.

b) Dacă există șirul (α_n) astfel încât $x_n \geq \alpha_n, \forall n$ și $\alpha_n \to \infty$, atunci $x_n \to \infty$.

Demonstrație. 1) Fie $\varepsilon > 0$, arbitrar ales. Cum $\alpha_n \to 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ să avem $\alpha_n < \varepsilon$ (din ipoteză $\alpha_n \geq 0$).

Atunci $|x_n - x| \leq \alpha_n < \varepsilon$ (Fig.20), $\forall n \geq n_\varepsilon$, ceea ce arată că $x_n \to x$.

2) a) Fie $\varepsilon > 0$, arbitrar ales. Din $\alpha_n \to -\infty$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$ să avem $\alpha_n < -\varepsilon$. Din ipoteză rezultă $x_n \leq \alpha_n, \forall n$. Așadar, pentru $\varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$ să avem: $x_n \leq \alpha_n < -\varepsilon$ (Fig.21).

Deci, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

b) Temă (Fig.22)

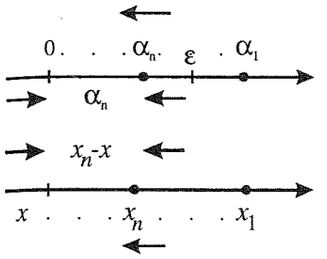


Fig. 20

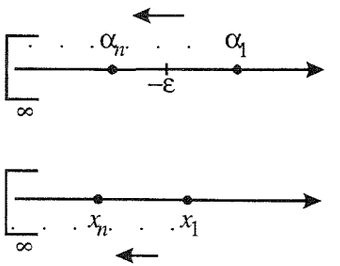


Fig. 21

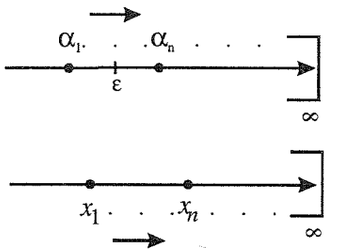


Fig. 22

Observație. Afirmațiile din teoremă rămân valabile dacă inegalitățile sunt adevărate $\forall n \geq n_0, n_0 \in \mathbb{N}$, fixat.

Corolar. 1) Dacă $|x_n| \leq \alpha_n, \forall n$ și $\alpha_n \to 0$, atunci $x_n \to 0$.

2) Dacă $0 \leq x_n \leq \alpha_n, \forall n$ și $\alpha_n \to 0$, atunci $x_n \to 0$.

Şir remarcabil: $x_n = n^k a^n, a \in (-1,1), k \in \mathbb{N}^*$

Are loc următoarea:

Teoremă. Dacă $a \in (-1,1)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} n^k a^n = 0, \forall\, k \in \mathbb{N}^*$.

Demonstrație. Arătăm că $n^k |a|^n \to 0$ şi atunci $n^k a^n \to 0$.

Punem $b = |a| \in (0,1)$ şi $b = \dfrac{1}{1+\varepsilon}, \varepsilon > 0$.

Deci $0 \le n^k b^n = \dfrac{n^k}{(1+\varepsilon)^n} = \dfrac{n^k}{1 + C_n^1\varepsilon + \ldots + C_n^{k+1}\varepsilon^{k+1} + \ldots} < \dfrac{n^k}{C_n^{k+1}\varepsilon^{k+1}} \to 0$,

deoarece în C_n^{k+1}, n apare la puterea $k+1$. ■

Exerciții rezolvate

1. Utilizând criteriul majorării să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+1}{5n+2} = \dfrac{3}{5}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-n}{n^2+n+1} = 1$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$; **d)** $\lim\limits_{n\to\infty} (n + \sin n) = \infty$.

R. a) Se calculează $|x_n - x| = \left|\dfrac{3n+1}{5n+2} - \dfrac{3}{5}\right| = \dfrac{1}{5(5n+2)} < \dfrac{1}{25n}$.

Dar $\alpha_n = \dfrac{1}{25n} \to 0$ **şi deci conform criteriului** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{3}{5}$.

b) Avem: $|x_n - x| = \left|\dfrac{n^2-n}{n^2+n+1} - 1\right| = \dfrac{2n+1}{n^2+n+1} < \dfrac{3n}{n^2} = \dfrac{3}{n} \to 0$ **şi deci** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

c) Cum: $|\sin n| \le 1$ **rezultă** $\left|\dfrac{\sin n}{n}\right| \le \dfrac{1}{n} \to 0$ **şi deci** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Observație. Nu se poate aplica regula pentru limita câtului, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$ **, nu există !**

d) Cum $-1 \le \sin n \le 1$, $\forall n$, **avem** $n + \sin n \ge n - 1 \to \infty$. **Deci** $\lim\limits_{n\to\infty} (n + \sin n) = \infty$.

2. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n!}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n}$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$, $a > 0$; **d)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{n!}$; **e)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n!}$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{1}{n^2+2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2+n}\right)$; **g)** $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n$; **h)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^n + 2^n + \ldots + n^n}$.

R. a) Avem $0 < \dfrac{1}{n!} \le \dfrac{1}{n} = \alpha_n \to 0$. **Deci** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n!} = 0$

b) $0 \le \dfrac{n}{2^n} = \dfrac{n}{(1+1)^n} = \dfrac{n}{1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots} = \dfrac{n}{1 + n + \dfrac{n(n-1)}{2} + \ldots} < \dfrac{n}{\dfrac{n(n-1)}{2}} = \dfrac{2}{n-1} = \alpha_n \to 0$.

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$.

Observații. 1) Prin raportul $\dfrac{n}{2^n}$ **se studiază comportarea comparativă a două funcții particulare (pe** $\mathbb{N}$**); funcția liniară şi funcția exponențială de bază** > 1**, pentru valori foarte mari ale lui** n.

Din $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$**, rezultă că: pentru valori foarte mari ale lui** n**, exponențiala crește mult mai repede decât funcția liniară.**

Mai general, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_k(n)}{a^n} = 0$**, dacă** $a > 1$, $P_k(n) = a_k n^k + \ldots + a_1 n + a_0$.

2) Scriem şirul (x_n) **cu** $x_n = \dfrac{n}{2^n}$ **sub forma** $x_n = n \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Am văzut, că mai general, $\lim\limits_{n\to\infty} n^k a^n = 0$, $k \in \mathbb{N}$, $a \in (0,1)$.

c) Avem cazurile: *i)* $a = 1$**. Atunci se obține şirul constant 1. Deci** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

ii) $a > 1$**. Atunci există** $\alpha_n > 0$ **astfel încât** $\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n$**. De aici** $a = (1+\alpha_n)^n$**, iar cu inegalitatea lui Bernoulli deducem** $a = (1+\alpha_n)^n \ge 1 + n\alpha_n$, $n \in \mathbb{N}$.

De aici $\alpha_n \le \dfrac{a-1}{n}$**. Aşadar** $\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| = \alpha_n \le \dfrac{a-1}{n} \to 0$ **şi deci** $\alpha_n \to 0$**, adică** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

iii) $0 < a < 1$**. Avem:** $\sqrt[n]{a} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}} \to 1$ **(din** *ii)*).

d) Pentru $n > 4$ **avem:** $0 < x_n = \dfrac{3}{1} \cdot \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{3}{3} \cdot \ldots \cdot \dfrac{3}{n} < \dfrac{9}{2} \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-3} \to 0$**. Deci** $x_n \to 0$.

e) Pentru $n > 3$, $0 < \dfrac{n^2}{n!} = \dfrac{n^2}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} < \dfrac{n^2}{n(n-1)(n-2)} = \alpha_n \to 0$**. Deci** $\dfrac{n^2}{n!} \to 0$

f) Avem inegalitățile: $0 < x_n < \dfrac{n}{n^2+1} = \alpha_n \to 0$**. Deci** $x_n \to 0$

g) $2^n \ge n$, $\forall n$**. Cum** $\alpha_n = n \to \infty$**, rezultă** $2^n \to \infty$

h) $\sqrt[n]{1^n + \ldots + n^n} > \sqrt[n]{n^n} = n = \alpha_n \to \infty$ **şi deci** $\sqrt[n]{1^n + \ldots + n^n} \to \infty$.

2. Trecerea la limită în inegalități. Criteriul „cleştelui"

Următorul rezultat spune că dacă între termenii a două şiruri $(x_n), (y_n)$ care au limită, există o relație de ordine $x_n \le y_n, \forall\, n$ (sau $\forall\, n \ge n_0, n_0 \in \mathbb{N}$, fixat), atunci prin trecere la limită relația se conservă, adică $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Are loc următoarea:

Teoremă. Fie $(x_n), (y_n)$ două şiruri care au limită (finită sau infinită). Dacă $x_n \le y_n, \forall\, n$ (sau $\forall\, n \ge n_0, n_0 \in \mathbb{N}$, fixat), atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Demonstrație. Este interesant cazul șirurilor convergente. Fie deci $x_n \to x$, $y_n \to y$, $x, y \in \mathbb{R}$. Atunci șirul (z_n), $z_n = y_n - x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ (sau $\forall n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, fixat), este convergent (diferența a două șiruri convergente). Din proprietățile limitei unui șir convergent $(P4)$ se deduce că $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) \geq 0$, iar de la operații cu șiruri convergente $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n - \lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq 0$. ■

Observații. **1)** Demonstrați teorema prin reducere la absurd, utilizând vecinătățile.

2) Dacă $x_n < y_n, \forall n$ și $(x_n), (y_n)$ au limită, nu rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Într-adevăr, fie $x_n = 0 < \frac{1}{n} = y_n, \forall n \geq 1$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

3) Are loc și reciproca: dacă șirurile $(x_n), (y_n)$ au limită și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, atunci există un rang $k \in \mathbb{N}$, astfel încât $x_n < y_n, \forall n \geq k$. Pentru demonstrație fie $x_n \to x$, $y_n \to y$. Fie $V \in \vartheta(x)$ și $U \in \vartheta(y), V \cap U = \varnothing$ (Fig.23).

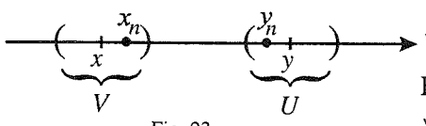


Fig. 23

Există rangurile n_V, n_U astfel încât $\forall n \geq n_V, x_n \in V$ și $\forall n \geq n_U, y_n \in U$. Fie $k = \max(n_V, n_U)$, deci $\forall n \geq k, x_n \in V, y_n \in U$.

De aici, rezultă $x_n < y_n, \forall n \geq k$.

Corolar. 1) Fie $(x_n) \to x \in \mathbb{R}$, $a \leq x_n \leq b, \forall n$, $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci $a \leq x \leq b$.

2) Dacă (x_n) este șir crescător de numere reale, $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci $x_n \leq x, \forall n$. (**Orice termen al unui șir crescător care are limită, este cel mult egal cu limita**).

3) Dacă (x_n) este șir descrescător de numere reale, $x_n \to x \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci $x_n \geq x, \forall n$. (**Orice termen al unui șir descrescător care are limită, este cel puțin egal cu limita**).

Demonstrație. **1)** Fie $y_n = a, \forall n$, $z_n = b, \forall n$. Evident $y_n \to a$, $z_n \to b$ și se aplică teorema pentru (y_n) și (x_n) și apoi pentru (x_n) și (z_n).

2) Dacă $x = \infty$, atunci $x_n < \infty, \forall n$. Fie $x \in \mathbb{R}$. Ținând seama de monotonia șirului avem $x_n \leq x_m, \forall n \leq m$. Trecând la limită după m rezultă $x_n \leq x, \forall n$. **3)** Temă.

Criteriul „cleștelui"

Este un criteriu util pentru determinarea limitei unui șir, în situația în care aceasta nu se poate realiza direct. Pentru calculul ei ne ajutăm de calculul limitelor altor șiruri mai simple. Are loc următoarea:

Teoremă. Fie $(x_n), (u_n), (v_n)$ trei șiruri de numere reale care satisfac condițiile:

1) $u_n \leq x_n \leq v_n, \forall n$ (sau $\forall n \geq n_0, n_0 \in \mathbb{N}, n_0$ fixat);

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = a$.

Atunci șirul (x_n) are limită și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Schematic:

$$u_n \leq x_n \leq v_n$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$a \quad a \quad a$$

Demonstrație. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$, via criteriul majorării, avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = -\infty$, atunci (conform aceluiași criteriu) rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Fie acum $a \in \mathbb{R}$, deci (u_n) și (v_n) șiruri convergente.

Utilizând vecinătățile. Fie $V \in \vartheta(a)$, o vecinătate arbitrară. Din $u_n \to a$, $v_n \to a$, există $n'_V \in \mathbb{N}, n''_V \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n'_V, u_n \in V$ și $\forall n \geq n''_V$, $v_n \in V$. Fie $n_v = \max(n'_v, n''_v)$. Atunci $\forall n \geq n_v$ rezultă $u_n, v_n \in V$.

Cum $u_n \leq x_n \leq v_n$, rezultă că $\forall n \geq n_V, x_n \in V$ ceea ce arată că $x_n \to a$.

Observație. În literatura matematică mai este cunoscut și sub denumirea de teorema „celor doi jandarmi". Șirurile (u_n) și (v_n) fiind „jandarmi" ce încadrează șirul (x_n).

Exemple. **1)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$.

R. Avem $u_n = -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n} = v_n$ și $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n} = 4$.

R. Avem $u_n = 4 = \sqrt[n]{4^n} < \sqrt[n]{3^n + 4^n} < \sqrt[n]{2 \cdot 4^n} = 4\sqrt[n]{2} = v_n$

(Am minorat și majorat $3^n + 4^n, 4^n < 3^n + 4^n < 4^n + 4^n = 2 \cdot 4^n$). Am arătat că dacă $a > 1$, atunci $\sqrt[n]{a} \to 1$. Cu acestea $u_n = 4 \to 4, v_n \to 4$. Deci, conform criteriului „cleștelui"

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n} = 4$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+1}+...+\frac{n}{n^2+n}\right)=1$.

R. Vom majora fiecare termen al sumei cu cel mai mare termen, aici $\frac{n}{n^2+1}$.

Deci, $x_n\le\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+1}+...+\frac{n}{n^2+1}=n\cdot\frac{n}{n^2+1}=\frac{n^2}{n^2+1}$. (1)

Vom minora fiecare termen din sumă cu cel mai mic, aici $\frac{n}{n^2+n}$.

Deci, $x_n\ge\frac{n}{n^2+n}+\frac{n}{n^2+n}+...+\frac{n}{n^2+n}=n\cdot\frac{n}{n^2+n}=\frac{n^2}{n^2+n}$. (2)

Din (1) și (2) avem: $u_n=\frac{n^2}{n^2+n}\le x_n\le\frac{n^2}{n^2+1}=v_n,\forall n$.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}v_n=1$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

4*) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[x]+\left[3^2x\right]+...+\left[(2n-1)^2x\right]}{n^3}=\frac{4x}{3}$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real a.

R. Din definiția părții întregi rezultă

$x-1<[x]\le x$

$3^2x-1<\left[3^2x\right]\le 3^2x$

.....

$(2n-1)^2x-1<\left[(2n-1)^2x\right]\le(2n-1)^2x$,

care adunate, membru cu membru, dau:

$x\left[1^2+3^2+...+(2n-1)^2\right]-n\le S_n\le x\left[1^2+3^2+...+(2n-1)^2\right]$.

Dar $1^2+3^2+...+(2n-1)^2=\frac{n\left(4n^2-1\right)}{3}$.

Deci, $u_n=\frac{n\left(4n^2-1\right)x}{3n^3}-\frac{1}{n^2}<x_n\le\frac{n\left(4n^2-1\right)}{3n^3}x=v_n$.

Avem $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}v_n=\frac{4x}{3}$ și deci $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{4x}{3}$.

Probleme propuse

Criteriul majorării

1. Utilizând criteriul majorării să se arate că:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+5}=\frac{2}{3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)=0$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n+n}=0$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sin n}{n^2+n+1}=0$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(2006\sin n+2007\cos n)=0$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin1+\sin2+...+\sin n}{n^3}=0$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)=\infty$.

2. Să se calculeze limitele:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{1}{2}\right)^n+n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{1}{5}\right)^n+2^n\right]$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot2^n+3\cdot5^n}{n^2\cdot3^n+6\cdot5^n}$;

5) Fie $\left(1+\sqrt{3}\right)^n=a_n+b_n\sqrt{3},\forall n\ge1,a_n,b_n\in\mathbb{Q}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$.

3. Să se calculeze limitele șirurilor date prin termenul general:

1) $x_n=\frac{n}{n^2+1}$; 2) $x_n=\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$; 3) $x_n=\sqrt[n]{3^n+1}$; 4) $x_n=\frac{n^2}{3^n}$; 5) $x_n=\frac{n^2\cdot3^n+1}{n^2\cdot3^{n+1}+1}$; 6) $x_n=\frac{n!}{n^n}$;

7) $x_n=\frac{2^n}{n!}$; 8) $x_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+...+\frac{1}{n^2+n}$; 9) $x_n=\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^3+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^3+n}}$.

4. Fie șirul $(x_n),x_n>0$, cu proprietatea $(n+1)x_{n+1}-nx_n<0,\forall n$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

5. a) Fie șirul $(x_n),x_0\in[0,2],x_{n+1}=\frac{1}{3}(x_n+4),n\ge0$. Arătați că $|x_n-2|=\frac{1}{3}|x_{n-1}-2|,\forall n$ și deduceți $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

b) Se consideră șirul $(x_n),x_1=1,x_{n+1}=\sqrt{12+x_n},n\ge1$. Arătați că $|4-x_{n+1}|<\frac{1}{4}|4-x_n|,\forall n$ și deduceți că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=4$.

Criteriul „cleștelui"

1. Să se calculeze limitele șirurilor definite prin termenul general:

1) $x_n=\sqrt[n]{n}$; 2) $x_n=\sqrt[n]{a},a>1$; 3) $x_n=\sqrt[n]{2^n+3^n+5^n}$; 4) $x_n=\sqrt[n]{1^k+2^k+...+n^k},k\in\mathbb{N}^*$;

5) $x_n=\frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}$; 6) $x_n=\frac{[an]}{n},[a]$ reprezintă partea întreagă a lui $a\in\mathbb{R}$;

7) $x_n=\frac{[x]+[2x]+...+[nx]}{n^2},x\in\mathbb{R}$; 8) $x_n=\frac{[x]+\left[2^2x\right]+...+\left[n^2x\right]}{n^3},x\in\mathbb{R}$;

9) $x_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$; 10) $x_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+...+\frac{n}{n^2+n}$.

2. Fie $(x_n),x_0=0,x_n=\sqrt{n^2+x_{n-1}},n\ge1$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-n)$.

Limite remarcabile: $\lim\limits_{x_n\to 0}\dfrac{\sin x_n}{x_n}$, $\lim\limits_{x_n\to\infty}\dfrac{e^{x_n}}{x_n}$, $\lim\limits_{x_n\to\infty}\dfrac{\ln x_n}{x_n}$

Are loc următoarea:

Teoremă. Fie (x_n) un şir de numere reale, $x_n\neq 0, \forall n, x_n\to 0$.

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x_n}{x_n}=1$.

Corolar. Dacă $x_n\to 0, x_n\neq 0, \forall n$, atunci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg} x_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\arcsin x_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg} x_n}{x_n}=1.$$

Exemple. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$. Aici $x_n=\dfrac{1}{n}\to 0$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2}{3n+1}\sin\dfrac{n}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{n}{n^2+1}}{\frac{n}{n^2+1}}\cdot\dfrac{n}{n^2+1}\cdot\dfrac{2n^2}{3n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x_n}{x_n}\cdot\dfrac{2n^3}{3n^3+n^2+3n+1}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x_n}{x_n}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3}{3n^3+n^2+3n+1}=1\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$, unde $x_n=\dfrac{n}{n^2+1}\to 0$.

Observaţi că am forţat scrierea pentru a pune în evidenţă şirul $x_n\to 0$, amplificând cu $\dfrac{n}{n^2+1}$.

Următoarea teoremă dă comportarea la infinit a exponenţialei şi a logaritmului. Mai precis avem:

Teoremă. 1) Dacă $(x_n)\to\infty$, atunci pentru $k\in\mathbb{N}^*$ avem:

$$\lim_{x_n\to\infty}\frac{e^{x_n}}{x_n^k}=\infty.\ \text{În particular,}\ \lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n^k}=\infty.$$

Se spune că exponenţiala de bază supraunitară creşte mult mai repede decât orice putere, pentru valori mari ale argumentului.

2) Dacă $(x_n)\to\infty, x_n>0, \forall n$, atunci pentru $k\in\mathbb{N}^*$ avem:

$$\lim_{x_n\to\infty}\frac{\ln x_n}{x_n^k}=0.\ \text{În particular}\ \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^k}=0.$$

Se spune că logaritmul de bază supraunitară creşte mult mai încet decât orice putere, pentru valori mari ale argumentului.

Observaţie. Rezultatele din teoremă se păstrează pentru orice bază supraunitară: $\lim\limits_{x_n\to\infty}\dfrac{a^{x_n}}{x_n^k}=\infty$, $\lim\limits_{x_n\to\infty}\dfrac{\log_a x_n}{x_n^k}=0, k\in\mathbb{N}^*, a>1$.

Exemple. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n}3^{\frac{n^2}{n+1}}=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{\frac{n^2}{n+1}}}{\frac{n^2}{n+1}}\cdot\left(\dfrac{n^2}{n+1}\cdot\dfrac{1}{2n}\right)=\infty\cdot\dfrac{1}{2}=\infty$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n+1)}{n^2+1}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}\cdot\dfrac{n+1}{n^2+1}=0\cdot 0=0$.

Probleme propuse

Limite remarcabile

1.Să se calculeze limitele şirurilor cu termenul general:

1) $x_n=n\sin\dfrac{1}{n}$; **2)** $x_n=n^2\sin\dfrac{\pi}{n^2}$; **3)** $x_n=\dfrac{3n^2+1}{4n}\sin\dfrac{2n}{n^2+1}$; **4)** $x_n=(n^2+3)\sin\dfrac{1}{n(n+1)}$;

5) $x_n=4^n\sin\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$; **6)** $x_n=n^2\sin\dfrac{1}{n}\cdot\sin\dfrac{1}{3n}$; **7)** $x_n=n\operatorname{tg}\dfrac{n+1}{3n^2+1}$;

8) $x_n=(-3n+1)\operatorname{tg}\dfrac{n}{(n+1)(n+2)}$; **9)** $x_n=\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\operatorname{tg}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; **10)** $x_n=(n+1)\arcsin\dfrac{1}{n}$.

2.Fie şirul (x_n) cu $x_n=\sin^2\dfrac{\pi}{n}+\sin^2\dfrac{\pi}{n+1}+\ldots+\sin^2\dfrac{\pi}{2n}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

3.Fie şirul (x_n) cu $x_n=\cos a\cos\dfrac{a}{2}\cdot\cos\dfrac{a}{2^2}\cdot\ldots\cdot\cos\dfrac{a}{2^n}, a\in\mathbb{R}$.

a) Arătaţi că $x_n=\dfrac{\sin 2a}{2^{n+1}\sin\frac{a}{2^n}}$; b) Studiaţi convergenţa şirului pentru $a\in\left\{-\dfrac{\pi}{2},0,\dfrac{\pi}{2}\right\}$;

c) Dacă $a\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)-\{0\}$, arătaţi că şirul este convergent.

4.Fie şirul $(x_n), x_1=1, x_{n+1}=x_n+\sqrt{x_n^2+1}, n\geq 1$. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{x_n}$.

5.Se consideră şirul (a_n) definit prin $a_0=1, a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}4^n(a_n-2)$.

6.Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$, numărul de radicali fiind egal cu n.

2.5. LIMITA ŞIRURILOR MONOTONE. PROPRIETATEA LUI WEIERSTRASS

Rezultatul fundamental al acestui paragraf se poate formula astfel:
Orice şir monoton are limită (finită – dacă şirul este mărginit, infinită – dacă şirul este nemărginit). Analizăm pe rând cele două situaţii.

1. Limita şirurilor monotone nemărginite

Are loc următoarea:

Teoremă. 1) Orice şir crescător şi nemărginit superior are limita ∞.
2) Orice şir descrescător şi nemărginit inferior are limita $-\infty$.

Demonstraţie. 1) Fie (x_n) un şir crescător, nemărginit superior. Pentru $\varepsilon>0$, arbitrar există $x_N>\varepsilon$. Cum şirul este crescător pentru $n\geq N$ avem $x_n\geq x_N>\varepsilon$, ceea ce arată că $x_n\to\infty$ (Fig.24).
2) Temă (Fig.25). ■

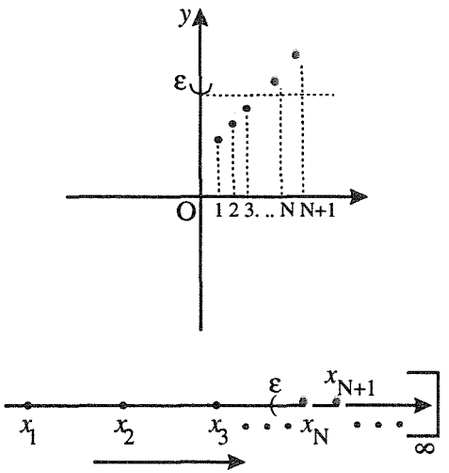


Fig. 24

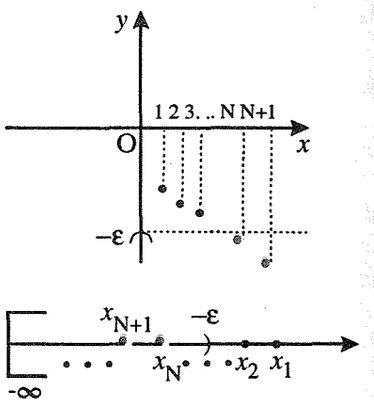


Fig. 25

Observaţie. Dacă şirul (x_n) este nemărginit nu rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ (sau $-\infty$).

Fie şirul $(x_n):1,2,1,4,1,8,1,\ldots$ Conţine două subşiruri $(x_{2n+1}):1,1,1,\ldots\to 1$ şi $(x_{2n}):2,4,8,\ldots\to\infty$. Deci (x_n) nu are limită.

Alteori şirul este divergent cu limită infinită. Fie (x_n) cu $x_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$, $n\geq 1$. Evident că $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}>0,\forall n$ şi deci şirul (x_n) este strict crescător.

Construim un subşir al lui (x_n). Fie acesta (x_{2^n}). Avem:

$$x_{2^n}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)\geq$$

$$\geq 1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+\ldots+2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n}=1+\frac{n}{2}.$$

Cum $1+\frac{n}{2}\to\infty$, via criteriul majorării pentru şiruri divergente, rezult $x_{2^n}\to\infty$. Se ştie că dacă un şir are limită, atunci orice subşir al său are aceeaşi limită ca şirul dat. Deoarece (x_{2^n}) este divergent cu limita ∞ se deduce că şi (x_n) este divergent şi $x_n\to\infty$.

Exemple. **1) $x_n=n^\alpha,\alpha>0$, este crescător şi nemărginit superior. Deci $\lim\limits_{n\to\infty}n^\alpha=\infty$, regăsind astfel rezultatul pentru şirul puterilor cu exponent real. În particular $\lim\limits_{n\to\infty}n^2=\lim\limits_{n\to\infty}n^3=\lim\limits_{n\to\infty}n^k=\infty,k\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{n}=\infty,k\in\mathbb{N}^*,k\geq 2$.**

2) $x_n=a^n,a>1$ (şirul exponenţial cu bază a). Din $\frac{x_{n+1}}{x_n}=a>1$, rezultă şirul este strict crescător. Şirul nu este mărginit deoarece, dacă ar fi mărginit, atunci există $M>0$ astfel încât $|x_n|<M,\forall n$. Luăm $n=[\log_a M]+1$ şi se constată că $x_n>M$, contradicţie. Deci, $x_n\to\infty$.

De exemplu, $3^n\to\infty,5^n\to\infty$.

3) $x_n=a^n,a<-1$ este divergent (nu are limită) deoarece $(x_{2n})=(a^{2n})$ este divergent cu limita $+\infty$, iar $(x_{2n+1})=(a\cdot a^{2n})$ este divergent cu limita $-\infty$.

2. Limita şirurilor monotone mărginite

Am văzut că orice şir convergent este mărginit. Reciproca nu este valabilă. Este suficient să luăm următorul contraexemplu: şirul (x_n), cu $x_n=(-1)^n,n\geq 1$ este şirul alternant $-1,1,-1,1,\ldots$ care este divergent $(x_{2n}\to 1,x_{2n+1}\to -1)$. Ce ar mai trebui să adăugăm la mărginire ca şirul să fie convergent? Vom vedea mai jos că dacă la condiţia de mărginire pentru un şir adăugăm şi monotonia lui, el este convergent.
Să trecem în revistă metodele descrise prin care putem proba convergenţa unui şir.
1) Utilizarea definiţiei cu vecinătăţi sau a criteriului cu ε. Metoda poate fi uneori dificil de aplicat din cauza structurii şirului.
2) Aplicarea criteriului majorării, prin majorarea diferenţelor $|x_n-x|$ cu elementele unui şir (α_n) pentru care $\alpha_n\to 0$.
3) Să observăm că şirul are în structura lui alte şiruri convergente şi să aplicăm operaţiile algebrice cu astfel de şiruri.
4) Să aplicăm criteriul „cleştelui", încadrând şirul între două şiruri convergente la aceeaşi limită.

Cu excepția lui 3), toate celelalte metode reclamă că noi știm valoarea limitei (sau cel puțin o anticipăm), după care verificăm corectitudinea ei.
Există multe situații în care nu este clar care este limita șirului, deși șirul este convergent. Următorul rezultat este un criteriu pentru a proba că un astfel de șir este convergent.
Are loc următoarea:

Proprietate (Weierstrass). Orice șir monoton și mărginit este convergent.

1) Orice șir (x_n) crescător și mărginit superior este convergent și în plus $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ (marginea superioară a mulțimii termenilor șirului).

2) Orice șir (x_n) descrescător și mărginit inferior este convergent și în plus $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ (marginea inferioară a mulțimii termenilor șirului).

Observații. **1)** Dacă șirul (x_n) **este crescător** și $x_n \to x$, atunci $x_n \le x, \forall n$.
Într-adevăr, în relația $x_n \le x_{n+p}$ se trece la limită după p și rezultă $\lim\limits_{p\to\infty} x_n \le \lim\limits_{p\to\infty} x_{n+p}$, adică $x_n \le x, \forall n$. Analog, dacă șirul (x_n) **este descrescător** și $x_n \to x$, atunci $x_n \ge x, \forall n$.
2) Pentru a preciza că un șir (x_n) **este crescător și convergent la** x, se scrie $x_n \nearrow x$, iar dacă (x_n) **este descrescător și convergent la** x se scrie $x_n \searrow x$.
3) Prin acest criteriu de convergență a unui șir **nu este implicată limita sa.**
4) Teorema dă **condiția suficientă de convergență**. Am văzut că orice șir convergent este mărginit, dar nu-i necesar monoton.
Iată șirul (x_n) cu $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n\ge 1$, analizat la începutul paragrafului de șiruri care are limita 0, fără a fi monoton.
5) Totuși teorema enunțată este restrictivă, „tratând" doar șiruri monotone și mărginite. Există șiruri care au limită fără a fi monotone $\left(x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n\ge 1\right)$. Dacă șirul (x_n) are limita x, atunci, de la un rang, termenii sunt tot mai apropiați de x, dar în același timp sunt apropiați și unul de altul.

Un astfel de șir se numește **șir Cauchy** ($\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât $\forall n, m \ge n_\varepsilon$ să avem: $|x_m - x_n| < \varepsilon$).
Aici limita șirului nu intervine explicit. Are loc următorul rezultat fundamental: un șir este convergent $\Leftrightarrow$ este șir Cauchy.

Probleme rezolvate

1.Să se demonstreze convergența următoarelor șiruri:
1) $x_n = \frac{2n+1}{n}, n\ge 1$; **2)** $x_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}, n\ge 1$; **3)** $x_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2^k}\right), n\ge 1$.

R.1) Studiem mărginirea și monotonia șirului.

Mărginirea șirului. Să observăm că $0 < x_n = 2+\frac{1}{n} \le 3, \forall n\ge 1$, **ceea ce arată că șirul este mărginit.**

Monotonia șirului. Pentru monotonie se calculează diferența a doi termeni consecutivi oarecare ai șirului, când avem:

$x_{n+1}-x_n = \frac{2(n+1)+1}{n+1} - \frac{2n+1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0, \forall n$, **adică** $x_{n+1} < x_n, \forall n\ge 1$. **Prin urmare** (x_n) **este strict descrescător. Conform proprietății lui Weierstrass rezultă** (x_n) **convergent. Se găsește ușor** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_n x_n = 2$.

Observație. Dacă am fi studiat monotonia șirului și se găsea că (x_n) **este strict descrescător, atunci era suficient să arătăm că șirul** (x_n) **este mărginit inferior deoarece** $\max x_n = x_1 = 3$.

2) Mărginirea șirului. Avem: $0 < x_n < \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1, \forall n$.
Deci șirul (x_n) **este mărginit.**

Monotonia șirului. Se calculează $x_{n+1}-x_n = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$, **ceea ce dă** $x_n < x_{n+1}, \forall n$ **adică șirul este strict crescător.**
Din proprietatea lui Weierstrass șirul (x_n) **este convergent.**

Observație. Cu mijloacele dezvoltate până acum nu putem calcula această limită.

3) Mărginirea șirului. Cum toți factorii produsului sunt $0 < 1-\frac{1}{2^k} < 1, \forall k$, **atunci** $x_n \in (0,1), \forall n$.

Monotonia șirului. Șirul fiind definit printr-un produs de factori pozitivi, atunci este recomandabil să se calculeze raportul $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1-\frac{1}{2^{n+1}} < 1$, **ceea ce arată că** $x_{n+1} < x_n, \forall n$ **adică șirul este strict descrescător. Deci șirul** (x_n) **este convergent.**

Șiruri definite prin relații de recurență(facultativ)

Problema care se pune este de a decide dacă șirul este convergent sau nu, iar în

cazul în care este convergent, eventual, să-i determinăm limita.

Pentru a demonstra că un astfel de şir (x_n) este convergent, neavând expresia lui x_n, utilizând proprietatea lui Weierstrass, trebuie probată monotonia şi mărginirea şirului. Admitem că şirul este convergent şi punem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Trecând la limită în relaţia de recurenţă $x_n = f\left(x_{n-1}, x_{n-2,\dots}\right)$ şi ţinând seama de $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n-2} = \dots = x$ şi de operaţiile cu şiruri convergente se obţine o ecuaţie în x. Pentru a stabili monotonia şirului se calculează câţiva termeni şi se ordonează pe axa reală. Dacă $x_0 \le x_1 \le x_2$ (sau $x_0 \ge x_1 \ge x_2$ sau $x_0 \le x_2 \le x_4$ şi $x_1 \ge x_3 \ge x_5$), atunci se formulează propoziţia $p(n): x_n \le x_{n+1}, \forall n$ (sau $p(n): x_n \ge x_{n+1}, \forall n$ sau $p(n): x_{2n} \le x_{2n+2}$, $x_{2n+1} \ge x_{2n+3}, \forall n$) şi se demonstrează prin inducţie matematică.

Dacă şirul este crescător (descrescător; $(x_{2n})\nearrow$ şi $(x_{2n+1})\searrow$; $(x_{2n})\searrow$ şi $(x_{2n+1})\nearrow$), atunci se alege acea valoare x care majorează (minorează; majorează şi minorează) termenii şirului. Demonstraţia mărginirii, de regulă, se face inductiv (sau aplicând majorări, minorări, inegalităţi).

Cu acestea şirul este convergent şi s-au argumentat astfel acţiunile făcute la începutul prezentării teoretice.

Problemele care urmează vor ilustra această tehnică.

Observaţii : 1) Prin simpla trecere la limită se poate preciza că un şir este divergent cu limita $-\infty$ sau $+\infty$. Şirul (x_n), $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n^2 + 1$ dacă ar fi convergent atunci rezultă ecuaţia $x^2 - x + 1 = 0$, care nu are rădăcini reale. Şirul este strict crescător nemărginit. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

2) Nu întotdeauna trecerea la limită în relaţia de recurenţă dă posibila limită a şirului. Contraexemplul este furnizat de şirul (x_n), $x_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{2+\sqrt{k}}$. Relaţia de recurenţă este $x_{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{2+\sqrt{n+1}} \cdot x_n$.

Trecând la limită rezultă $l = l$. În acest caz se demonstrează că $x_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Probleme rezolvate

1. Să se demonstreze convergenţa următoarele şiruri recurente:

1) $x_0 = 15, x_{n+1} = 0{,}2 \cdot x_n + 10, n \ge 0$; **2)** $x_1 \in [1,2], x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2, n \ge 1$;

R. 1)Recomandăm mai jos un mod de tratare a acestor probleme.

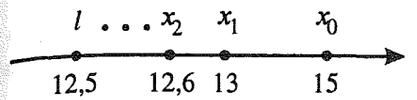


Fig. 26

Presupunem că şirul (x_n) este convergent. Fie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$. Trecând la limită în relaţia de recurenţă rezultă ecuaţia $l = 0{,}2l + 10$. De aici $l = 12{,}5$. Deci în cazul convergenţei şirului, termenii acestuia ar trebui să se „aglomereze" spre valoarea 12,5. Se calculează de asemenea câţiva termeni şi îi dispunem pe axa reală pentru a vedea şi cum se aranjează ei (monotonia) pe axă (Fig.26). Avem: $x_0 = 15, x_1 = 13, x_2 = 12{,}6, \dots$

Deci remarcăm dispunerea termenilor $x_0 > x_1 > x_2 > \dots 12{,}5$.

Acum demonstrăm riguros convergenţa şirului probând că şirul este monoton şi mărginit prin inducţie matematică.

Mărginirea (inferioară) a şirului. $P(n): x_n > 12{,}5, \forall n \ge 0$.

1. Verificarea propoziţiei. Pentru $n = 0$, $P(0): x_0 = 15 > 12{,}5$. De asemenea pentru $n = 1$, $P(1): x_1 = 13 > 12{,}5$, adevărat.

2. Demonstraţia. $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Propoziţia de demonstrat este $P(n+1): x_{n+1} > 12{,}5$.

Din relaţia de recurenţă $x_{n+1} = 0{,}2\,x_n + 10$ şi deci trebuie demonstrat că $0{,}2\,x_n + 10 > 12{,}5 \Leftrightarrow x_n > 12{,}5$, adevărat deoarece $P(n)$ este adevărată.

Concluzie. Deci propoziţia $P(n)$ este adevărată $\forall n \ge 0$.

Monotonia şirului. Are loc propoziţia $Q(n): x_n > x_{n+1}, \forall n \ge 0$.

1. Verificarea propoziţiei. $Q(0): x_0 = 15 > x_1 = 13$, adevărat.

2. Demonstraţia. $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$.

Propoziţia de demonstrat este: $Q(n+1): x_{n+1} > x_{n+2}$.

Aceasta se poate face în două moduri:

1) Se scriu x_{n+1}, x_{n+2} din relaţia de recurenţă şi apoi se utilizează faptul că $Q(n)$ este adevărată. Într-adevăr relaţia de demonstrat devine $0{,}2\,x_n + 10 > 0{,}2\,x_{n+1} + 10 \Leftrightarrow x_n > x_{n+1}$.

2) Se scrie x_{n+2} din relaţia de recurenţă şi se utilizează mărginirea şirului. Relaţia de demonstrat devine: $x_{n+1} > 0{,}2x_{n+1} + 10 \Leftrightarrow x_{n+1} > 12{,}5$, ceea ce-i adevărat. Deci, prin ambele moduri am arătat că $Q(n+1)$ este adevărată. În final $Q(n)$ este adevărată $\forall n \ge 0$.

Cum şirul $Q(n)$ este strict descrescător şi mărginit inferior, el este convergent. Fie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$. Trecând la limită în relaţia de recurenţă rezultă $l = 0{,}2l + 10$, cu soluţia $l = 12{,}5$.

Interpretare geometrică

Construcţia lui x_{n+1} pe axa Ox când se cunoaşte punctul de abscisă x_n (Fig.27).

Fie dreptele de ecuaţii $d: y = 0{,}2x + 10$ şi $d': y = x$ şi $d \cap d' = \{A\}, A(12{,}5; 12{,}5)$. Pentru $x = x_n$ rezultă $y = x_{n+1}$ şi avem punctul $B \in d, B(x_n, x_{n+1})$. Punctul C de intersecţie al paralelei prin B la Ox cu d' are coordonate egale (fiind pe prima bisectoare $y = x$). Deci $C(x_{n+1}, x_{n+1})$. Proiecţia lui C pe Ox este un punct de abscisă x_{n+1}, pentru care se

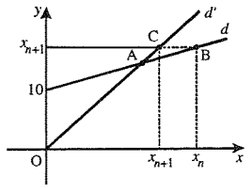


Fig. 27

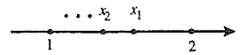


Fig. 28

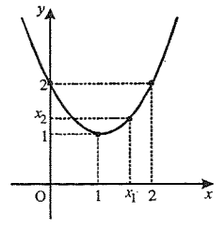


Fig. 29

observă că $x_{n+1} < x_n$.

2) Dacă şirul ar fi convergent $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l\right)$, atunci din relaţia de recurenţă se obţine $l = l^2 - 2l + 2$ cu soluţiile $l_1 = 1, l_2 = 2$.

În acest caz nu se pot calcula efectiv termenii $x_2, x_3, ...$, dar îi putem compara (Fig.28).

Avem $x_2 - x_1 = x_1^2 - 3x_1 + 2 = (x_1 - 1)(x_1 - 2) \le 0$, adică $x_2 \le x_1$.

Mai mult $x_2 = (x_1 - 1)^2 + 1 \ge 1$ şi $x_2 \le 2 \Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1 + 2 \le 2 \Leftrightarrow x_1(x_1 - 2) \le 0$, adevărat.

Analog, $1 \le x_3 \le x_2$.

Acum se pot demonstra riguros.

Mărginirea şirului. Formulăm propoziţia $P(n): x_n \in [1,2], \forall n \ge 1$.

1)Verificarea propoziţiei $P(1): x_1 \in [1,2], P(2): x_2 \in [1,2]$.

2)Demonstraţia $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Avem $P(n+1): x_{n+1} \in [1,2] \Leftrightarrow x_n^2 - 2x_n + 2 \in [1,2] \Leftrightarrow \begin{cases} x_n^2 - 2x_n + 2 \ge 1 \\ x_n^2 - 2x_n + 2 \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_n - 1)^2 \ge 0 \\ x_n(x_n - 2) \le 0 \end{cases}$,

care sunt evident adevărate.

Deci $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Monotonia şirului. Formulăm propoziţia $Q(n): x_n \ge x_{n+1}, \forall n \ge 1$.

1)Verificarea propoziţiei $Q(1): x_1 \ge x_2$, adevărat.

2)Demonstraţia $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$

Trebuie demonstrat că $Q(n+1): x_{n+1} \ge x_{n+2}$ este adevărată.

Ori avem (din relaţia de recurenţă)

$x_{n+1} \ge x_{n+1}^2 - 2x_{n+1} + 2 \Leftrightarrow (x_{n+1} - 1)(x_{n+1} - 2) \le 0$, ceea ce-i adevărat dacă ţinem seama că $x_{n+1} \in [1,2]$. Prin urmare $Q(n)$ este adevărată $\forall n \ge 1$. Deci şirul este descrescător şi mărginit (inferior), adică convergent. Fie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$. Trecând la limită în relaţia de recurenţă rezultă ecuaţia $l^2 - 3l + 2 = 0$ cu soluţiile $l_1 = 1, l_2 = 2$. Dacă $x_1 = 1$, atunci $x_n = 1, \forall n$ şi deci $l = 1$; dacă $x_1 \in (1,2)$ şirul termenilor este descrescător spre 1, deci limita $l = 1$; dacă $x_1 = 2$, atunci $x_n = 2, \forall n$, adică $l = 2$.

Observaţie. Dacă $f(x) = x^2 - 2x + 2$, atunci pentru $x_1 \in [1,2]$, avem (Fig.29)

$x_2 = f(x_1) \in [1,2], x_3 = f(x_2) \in [1,2], ..., x_n \in [1,2], \forall n$. Altfel spus $f([1,2]) = [1,2]$, ceea ce arată mărginirea şirului.

Probleme propuse

Proprietatea lui Weierstrass

1.Să se studieze convergenţa următoarelor şiruri:

I. 1) $x_n = \frac{2n-1}{n}$; 2) $x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$; 3) $x_n = \frac{n(n+2)}{n+1}$; 4) $x_n = \frac{\alpha n}{n+2}, \alpha \in \mathbb{R}$; 5) $x_n = \frac{n+\alpha}{n+3}$;

6) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; 7) $x_n = \sqrt[n]{a}, a \in (0,1)$; 8) $x_n = a^n, a \in \mathbb{R}$;

II. 1) $x_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{(n-1)n}$; 2) $x_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + ... + \frac{1}{n^\alpha}, \alpha \in \{2,3\}$;

3) $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$; 4) $x_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{n}}}$; 5) $x_n = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot ....\cdot (2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot ....\cdot (2n-1)}$.

III. 1) $x_1 = 0, x_{n+1} = 2x_n + 1, n \ge 1$; 2) $x_0 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{3}{2}, n \ge 0$;

3) $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{4}(2x_n + 3), n \ge 1$; 4) $x_1 = 0, x_{n+1} = x_n + n\left(\frac{1}{2}\right)^n, n \ge 1$;

5) $x_1 = 1, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n(n+1)}, n \ge 1$; 6) $x_1 = 1, x_{n+1} = x_n + \frac{n}{(n+1)!}, n \ge 1$.

IV. 1) $x_0 = \frac{1}{4}, x_{n+1} = \frac{1}{4} + x_n^2, n \ge 0$; 2) $x_1 = 1, x_{n+1} = x_n^2 + x_n + 1, n \ge 1$;

3) $x_1 \in (0,1), x_{n+1} = x_n - x_n^3, n \ge 1$; 4) $x_1 = \frac{3}{2}, x_{n+1} = \frac{x_n^2 - x_n + 1}{x_n}, n \ge 1$.

V. 1) $x_1 = 0, x_2 = -1, x_{n+2} = \frac{5}{6}x_{n+1} + \frac{1}{6}x_n, n \ge 1$; 2) $x_1 = x_2 = 1, x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1}, n \ge 1$.

VI. 1) $x_0 = 2, x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}, n \ge 0$; 2) $x_0 = 1, x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{2x_n + 3}, n \ge 0$;

3) $x_1 = 1, x_{n+1} = 1 - \frac{1}{4x_n}, n \ge 1$; 4) $x_0 = a, x_{n+1} = \frac{4}{3 + x_n}, n \ge 0$;

5) $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{2x_n - 1}{x_n}, n \ge 1$.

VII. 1) $x_0 < y_0, x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + y_{n-1}), y_n = \frac{1}{3}(x_{n-1} + 2y_{n-1}), n \ge 1$;

2) $x_0 = 1, y_0 = 2, 4x_{n+1} = x_n + y_n, 5y_{n+1} = 3x_n + 2y_n, n \ge 0$;

3) $x_0 = 0, y_0 = 1, x_{n+1} = x_n + 2y_n, y_{n+1} = 2x_n + y_n, n \ge 0$.

VIII. 1) $x_0 = 0, x_{n+1} = \alpha + x_n^2, \alpha > 0$; 2) $x_0 = b > 0, x_{n+1} = x_n^2 + a, a > 0$;

3) $x_0 = a > 0, x_{n+1} = x_n^2 + ax_n, a \ge 0$; 4) $x_0 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), n \ge 0$.

IX. 1) $x_n > 0, \forall n, (n+1)x_{n+1} - nx_n < 0$; 2) $x_n + x_{n+1} > 0, x_{n+1}^2 < x_n^2, \forall n$;

3) $0 < x_n < 2, (2 - x_n)x_{n+1} > 1, \forall n$; 4) $x_n > 0, \forall n, x_0 = 1, x_{n+1} \le \frac{x_n^2}{1 + x_n}, \forall n$.

2. a) Se consideră şirul $(a_n), a \in (0,1), a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1, n \geq 1$. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} a_1, a_2, ..., a_n$; b) Fie şirul $(a_n), a_1 \in (0,1), a_{n+1} = a_n^3 - a_n^2 + 1$. Calculaţi $\lim_{n\to\infty} a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$.

3. Fie şirul $(x_n), x_1 = \frac{1}{6}, x_{n+1} = \frac{nx_n}{n+3}, n \geq 1$, iar $y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Studiaţi convergenţa şirului (y_n).

4. Fie x_n rădăcina reală a ecuaţiei $x^3 + nx - n = 0, n \geq 0$. Arătaţi că şirul (x_n) este convergent şi calculaţi $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Şirul remarcabil: $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Definiţia numărului real iraţional e

Se consideră şirul (e_n) definit prin $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, n \geq 1$.

Vom arăta că acest **şir este crescător şi mărginit superior** (majorat).

Mărginirea şirului. Utilizând binomul lui Newton rezultă:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+...+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+$$
$$+...+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \leq 1+\frac{1}{1!}+...+\frac{1}{k!}+...\frac{1}{n!}$$

Dar $\forall k \in \mathbb{N}^*$ avem $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ şi deci, $\forall n$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1+1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^{k-1}}+...+\frac{1}{2^{n-1}} = 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \leq 3.$$

Aşadar şirul (e_n) este majorat de 3.

Monotonia şirului. Conform formulei lui Newton avem:

$$x_0 = 1 \leq x_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+...+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+$$
$$+...+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \leq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+$$

$$+...+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+...+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot...\cdot$$
$$...\cdot\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{n}{n+1}\right) = x_{n+1}, \forall n \geq 1,$$

ceea ce arată că şirul (e_n) este strict crescător.

Cum el este mărginit superior se deduce că este convergent.

Limita acestui şir joacă un rol foarte important în analiza matematică. Această limită se notează cu litera e.

Numărul real e este un **număr iraţional**, având valoarea aproximativă $e \approx 2,71828...$

Aşadar $e_n \nearrow e$, ceea ce arată că $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e, \forall n$.

Observaţii. 1) Şirul $(e'_n)_{n\geq 1}$, definit prin $e'_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ este strict **descrescător** **mărginit inferior** (de exemplu de 1) şi deci convergent.

Cum $e'_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) \to e$.

Aşadar $e'_n \searrow e$ şi deci $e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \forall n \geq 1$.

Deci

$$\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \forall n \geq 1}$$

2) Faptul că şirul (e_n) cu $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, n \geq 1$ este strict crescător poate fi probat utilizând inegalitatea mediilor (geometrică şi aritmetică):

$$e_{n-1} < e_n \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \Leftrightarrow \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} < 1+\frac{1}{n}.$$

Dar:

$$\sqrt[n]{1\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} < \frac{1+\left(1+\frac{1}{n-1}\right)+...+\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}{n} = 1+\frac{1}{n}.$$

Analog pentru a proba monotonia şirului (e'_n) cu $e'_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, n \geq 1$ avem:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}\Leftrightarrow\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}<\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}\Leftrightarrow\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}<\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt[n+1]{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}}<\frac{n}{n+1}.$$

Dar $\sqrt[n+1]{1\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}}<\frac{1+\frac{n-1}{n}+\ldots+\frac{n-1}{n}}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

Altă definiție posibilă a numărului irațional e

Fie şirul (E_n), $E_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$. Vom arăta că acest şir este, de asemenea, convergent către e.

Monotonia şirului. Avem: $E_{n+1}-E_n=\frac{1}{(n+1)!}>0$, ceea ce arată că şirul este strict crescător.

Mărginirea şirului. Din studiul şirului (e_n) cu $e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$, $n\geq 1$ se deduce că $E_n<3$ (fiecare paranteză $1-\frac{k}{n}<1$ şi evident $E_n>2$). Deci $E_n\in(2,3),\forall n$, adică şirul este mărginit. Conform proprietății lui Weierstrass, şirul este convergent. Fie $\lim\limits_{n}E_n=E$. Cum $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\leq E_n,\forall_n$ rezultă prin trecere la limită $e\leq E$, (1).

Dar $e\geq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}>1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$.

Trecând la limită după $n\to\infty$ rezultă $e\geq E_k,\forall k\geq 2$. Trecând aici la limită după $k\to\infty$ rezultă $e\geq E$, (2). Din (1) şi (2) rezultă $E=e$.

Aşadar

$$\lim_{n}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)=e.$$

Consecințe remarcabile

Din $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$, deducem:

Corolar 1. **1)** Dacă $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}=e$.

2) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}=e$.

3) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}=e$.

Notație. În loc de 1) se va scrie $\lim\limits_{x_n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}=e$; în loc de 2) $\lim\limits_{x_n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}=e$, iar în loc de 3) $\lim\limits_{x_n\to 0}(1+x_n)^{x_n}=e$.

Eliminarea nedeterminării. $1^{\pm\infty}$ se face cu ajutorul limitelor din corolar 1.

Nedeterminările $0^0,\infty^0$ se elimină utilizând scrierea $a_n^{b_n}=e^{b_n\ln a_n}$.

Exerciții rezolvate

1.Să se calculeze limitele: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n+3}$; **2)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^{3\sqrt{n}+1}$; **3)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{n}{n^2+1}\right)^{n+5}$.

R.1) Trecând la limită în bază şi exponent suntem în cazul de nedeterminare 1^{∞}. Pentru a ajunge la una din limitele din corolar 1, se adună şi se scade 1 în bază.

Avem: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+2}{n+1}-1\right)^{2n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{2n+3}{n+1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n+1}}=e^2$

Observație. **Baza se poate scrie** $\frac{n+2}{n+1}=\frac{n+1+1}{n+1}=\frac{n+1}{n+1}+\frac{1}{n+1}=1+\frac{1}{n+1}$.

2) Trecând la limită în bază şi în exponent se ajunge la nedeterminarea 1^{∞}.

În acest caz $x_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}\to 0$ **şi suntem în situația 3) din corolar 1. Punem în evidență structura de acolo şi apoi trecem la limită în bază şi exponent. Avem:**

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^{3\sqrt{n}+1}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^{\sqrt{n+1}}\right]^{\frac{3\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+1}}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(3+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}}}=e^3.$$

3) Suntem în cazul de nedeterminare 1^∞. Utilizăm limita 3) din corolar 1. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n}{n^2+1}\right)^{n+5}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{n}{n^2+1}\right)^{\frac{n^2+1}{n}}\right]^{\frac{(n+5)n}{n^2+1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+5)}{n^2+1}}=e^1=e.$$

2. Să se determine constanta $a\in\mathbb{R}$ dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^n=e^3$.

R. Dacă distribuim limita în bază şi exponent ajungem la nedeterminarea 1^∞. Scriem limita (pentru a aplica 3) din corolar 1) sub forma:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{a}}\right]^{\frac{an}{n+1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{an}{n+1}}=e^a=e^3.$$ **De aici $a=3$.**

Limitele din corolar 1 conduc la determinarea altor limite importante. Avem:

Corolar 2. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0, x_n\neq 0, \forall n$, atunci:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x_n)}{x_n}=1$; **2)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{x_n}-1}{x_n}=\ln a, a>0, a\neq 1$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+x_n)^\alpha-1}{x_n}=\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$.

Notaţie. În loc de **1)** se scrie $\lim\limits_{x_n\to 0}\frac{\ln(1+x_n)}{x_n}=1$, în loc de **2)** vom scrie

$\lim\limits_{x_n\to 0}\frac{a^{x_n}-1}{x_n}=\ln a$, iar în loc de **3)** vom pune $\lim\limits_{x_n\to 0}\frac{(1+x_n)^\alpha-1}{x_n}=\alpha$.

Exerciţii rezolvate

1. Să se calculeze limitele: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}3^n\cdot\ln\left(1+0{,}5^n\right)$; **2)** $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{2}-1\right)$; **3)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{3}-1}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\left(1+0{,}3^n\right)^5-1\right]$.

R. 1) Suntem în cazul de nedeterminare $0\cdot\infty$. Se prelucrează limita astfel:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{2^n}\ln\left(1+0{,}5^n\right)^{\frac{1}{0{,}5^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+0{,}5^n\right)^{\frac{1}{0{,}5^n}}=\infty\cdot 1=\infty$$

2) Suntem în cazul de nedeterminare $\infty\cdot 0$. Rescriem limita sub forma $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\ln 2$.

3) Suntem în cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$ ($\sqrt[n]{a}\to 1$, dacă $a>0$).

Pentru eliminarea nedeterminării utilizăm scrierea de la 2). Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[n]{2}-1}{\frac{1}{n}}}{\frac{\sqrt[n]{3}-1}{\frac{1}{n}}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2}-1}{\frac{1}{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{3}-1}{\frac{1}{n}}}=\frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

4) Luând limita produsului ca produs de limite ajungem la nedeterminarea $0\cdot\infty$. Prelucrăm limita astfel:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+0{,}3^n\right)^5-1}{0{,}3^n}\cdot\frac{n}{\left(\frac{1}{0{,}3}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+0{,}3^n\right)^5-1}{0{,}3^n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\left(\frac{1}{0{,}3}\right)^n}=5\cdot 0=0,$$

deoarece am demonstrat că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$, dacă $a>1, k\in\mathbb{N}^*$.

2. Să se determine parametrul real a astfel încât să avem (pe rând):

1) $\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\frac{n^2+an+1}{n^2+1}\geq 3$; **2)** $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(2^{\frac{an}{n^2+1}}-1\right)=\ln 4$.

R. 1) Pentru limită suntem în cazul de nedeterminare $\infty\cdot 0$. Prelucrăm limita astfel:

$$\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\frac{an}{n^2+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\ln\left[\left(1+\frac{an}{n^2+1}\right)^{\frac{n^2+1}{an}}\right]^{\frac{an^2}{n^2+1}}=\ln\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{an}{n^2+1}\right)^{\frac{n^2+1}{an}}\right]^{\frac{an^2}{n^2+1}}=\ln e^a=a$$

Deci, $a\geq 3$.

2) Suntem în cazul de nedeterminare $\infty\cdot 0$. Rescriem limita astfel:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2a}{n^2+1}\cdot\frac{2^{\frac{an}{n^2+1}}-1}{\frac{an}{n^2+1}}=a\cdot\ln 2$. **Deci,** $a\ln 2=\ln 4\Leftrightarrow\ln 2^a=\ln 4\Leftrightarrow 2^a=4\Leftrightarrow a=2$.

Probleme propuse

Numărul e. Limite remarcabile

1.Știind că $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $\forall n \geq 1$, arătați că:

1) $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$; 2) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) < 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)=\infty$.

2.Să se calculeze limitele șirurilor:

I. 1) $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n+1}$; 2) $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{3n+1}$; 3) $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}$; 4) $\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{n^2}$; 5) $\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n+2}\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{2n+1}$;

6) $\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n+2}\right)^{n^2+1}$; 7) $\left(\frac{n^3-1}{n^3+n^2}\right)^{2n+1}$; 8) $\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2\sqrt{n+1}}$; 9) $\left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}{2\sqrt{n+1}}\right)^n$.

II. 1) $n\left(\sqrt[n]{3}-1\right)$; 2) $n\left(\sqrt[n+1]{2}-1\right)$; 3) $n^2\left(\sqrt[n]{3}-1\right)$; 4) $n^2\left(\sqrt[n(n+1)]{5}-1\right)$; 5) $n^2\left(\sqrt[n]{3}-1\right)\left(\sqrt[n]{4}-1\right)$;

6) $\sqrt{n+1}\left(\sqrt[\sqrt{n}]{5}-1\right)$; 7) $n\left(\sqrt[n^2+3n]{2}-1\right)$; 8) $n^2\left(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n+1]{3}\right)$; 9) $\frac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{2}-1}$; 10) $n\left(\sqrt[n]{5}-\sqrt[n]{3}\right)$.

III. 1) $\frac{2^n+3^n}{3^n+4^n}$; 2) $\frac{\ln\left(1+e^n\right)}{n}$; 3) $\frac{\ln\left(1+e^{5n}\right)}{\ln\left(1+e^{2n}\right)}$; 4) $\frac{\ln\left(n^3+n-1\right)}{\ln\left(n^6+2n^3+n\right)}$; 5) $\frac{\ln\left(n^3+e^{2n}\right)}{\ln\left(n^6+e^{3n}\right)}$.

IV. 1) $\left(5^n+1\right)^{\frac{1}{n}}$; 2) $\left(\frac{1}{e^n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$; 3) $\left(3^n+5^n\right)^{\frac{1}{n}}$; 4) $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$; 5) $\left(n^2+n\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$; 6) $\left(\frac{2^n+1}{3^n+2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

3.Să se determine parametrii $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât, pe rând: 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n+1}\right)^{2n+1}=e^2$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{an}=e^2$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a+\frac{bn}{n^2-1}\right)^n=e^2$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+an+1}{n^2+3n-2}\right)^n=e$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{an^2+bn+2}{bn^2+4n+3}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}=\frac{1}{e}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+an+2}\right)^{\frac{bn^2+n}{n+1}}=\frac{1}{e}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[2n]{a}\right)=1, a>0$.

2.6. ȘIRURI ÎN PROBLEME PRACTICE

1.(Jocurile de societate și șirurile) Se expediază câte o scrisoare (care conține o listă cu cinci nume de persoane) la cinci persoane, care trebuie să trimită 1 € la numele din topul listei și apoi să șteargă acea persoană. Fiecare dintre aceste cinci persoane care au primit scrisoarea își adaugă numele lor la baza listei și trimit scrisoarea astfel completată la cinci prieteni. Presupunând că nimeni nu rupe lanțul, câți euro au primit cei cinci de pe scrisoarea de la începutul jocului ?

Jocul poate fi gândit ca fiind organizat pe nivele. Nivelul 1 corespunde trimiterii listei inițiale la primele cinci persoane. Deci, prima persoană de pe listă va primi în total 5 €. Nivelul 2 înseamnă trimiterea de liste de către cele cinci persoane, care au primit liste la nivelul 1, la câte alte cinci. În total apar în joc la acest nivel $5\cdot 5 = 5^2 = 25$ de persoane. Deci, a doua persoană de pe lista inițială va primi 25 €. A treia persoană va primi $5^3 = 125$ €, a patra 625 €, iar a cincea 3125 €.

2.(Medicina și șirurile) Cantitatea unui antibiotic în sânge este dată de formula $c_n = c\left[1+e^{kt}+e^{2kt}+...+e^{(n-1)kt}\right]$, unde c este cantitatea de antibiotic în miligrame, n este numărul de doze, t este timpul între doze, iar k este o constantă care precizează cât de repede sângele metabolizează antibioticul. Presupunem că o doză de antibiotic crește nivelul sângelui cu 0,5 mg/l. Dacă antibioticul este dat la 4 ore și $k=-0,867$, să se determine concentrația de antibiotic înainte de a cincea doză.

Avem de calculat elementul $c_4 = c\left(1+e^{4k}+e^{8k}+e^{12k}\right)$. Găsim $c_4 \approx 0,516$ mg.

3.(Tenisul, probabilitățile și șirurile) Într-un ghem de tenis de câmp la scorul 40-40, un jucător are nevoie, pentru adjudecarea ghemului, de două puncte consecutive (avantaj și apoi câștigă ghemul). Se demonstrează că probabilitatea de a câștiga ghemul este limita șirului (p_n), unde $p_n = p^2\left(1+\left[2p(1-p)\right]+\left[2p(1-p)\right]^2+...+\left[2p(1-p)\right]^{n-1}\right)$, unde p este probabilitatea ca jucătorul să câștige un punct. De exemplu, pentru $p=0,55$ obținem $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 0,599$.

4.(Rata inflației) Când un economist calculează rata inflației pentru obiecte de uz casnic, alimente, motorină sau sănătate el calculează dobânda compusă cu care crește prețul acelui obiect, aliment, motorină etc. De exemplu, dacă litrul de motorină este de 0,85 € și se estimează o rată a inflației de 4,3 % anuală la motorină, atunci peste trei ani valoarea unui litru se calculează astfel: 1) după un an: $0,85+0,85\cdot\frac{4,3}{100}\approx 0,886$; 2) după doi ani: $0,886+0,886\cdot\frac{4,3}{100}\approx 0,924$;

3) după trei ani: $0,924+0,924\cdot\frac{4,3}{100}\approx 0,964$.

În general, am văzut că dacă p este prețul la momentul actual, iar d este inflația anuală (sau dobânda la depozite), atunci după n ani valoarea este dată de $p_n = p(1+d)^n$.

5.(Aria unui cerc (lungimea cercului)) Se definește ca limita ariilor (perimetrelor) poligoanelor cu n laturi înscrise și circumscrise cercului. Când $n\to\infty$ și lungimile laturilor tind la zero, atunci poligoanele tind să coincidă cu cercul. Ariile (perimetrele) poligoanelor I_n (înscrise) și C_n (circumscrise) tind la o limită comună A (perimetrul P), care reprezintă aria (perimetrul) cercului. Dacă $A(I), P(I)$ este aria și respectiv perimetrul (suma lungimilor laturilor) poligonului I, atunci $A = \lim\limits_{n\to\infty} A(I_n) = \lim\limits_{n\to\infty} A(C_n)$, $P = \lim\limits_{n\to\infty} P(I_n) = \lim\limits_{n\to\infty} P(C_n)$.

În mod similar se definește aria și lungimea unei figuri convexe.

REZUMATUL CAPITOLULUI

Noțiuni	Definiție. Caracterizare	Comentarii
Șir de numere reale	$x:\mathbb{N}-A_k\to\mathbb{R}, A_k=\{0,1,...,k\}$ $x(n)=x_n$ = termenul general (de rang n) al șirului x. Notație (x_n)	
Șir mărginit	(x_n) este mărginit $\Leftrightarrow \exists \alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha\le x_n\le\beta,\forall n$	
Șir strict monoton	(x_n) este strict crescător $\Leftrightarrow x_n<x_{n+1},\forall n$ (x_n) este strict descrescător $\Leftrightarrow x_n>x_{n+1},\forall n$	
Limita unui șir	$x\in\overline{\mathbb{R}}$ este limita șirului (x_n) dacă oricare vecinătate a lui x conține toți termenii șirului exceptând(eventual) un număr finit de termeni. Scriem $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$	Dacă $x\in\mathbb{R}$, șirul (x_n) se numește convergent. În caz contrar se numește divergent
Șiruri remarcabile	1) șirul puterilor cu exponent real $\lim\limits_{n\to\infty}n^\alpha=\begin{cases}\infty,\alpha>0\\1,\alpha=0\\0,\alpha<1\end{cases}$ 2) șirul exponențial de bază a $\lim\limits_{n\to\infty}a^\alpha=\begin{cases}\infty,a>1\\1,a=1\\0,a\in(-1,1)\\\text{nu există},a\le-1\end{cases}$ 3) șirul definit printr-o funcție polinomială $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_0n^k+...+a_{k-1}n+a_k\right)=\lim\limits_{n\to\infty}a_0n^k$ 4)șirul definit printr-o funcție rațională $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_0n^k+...+a_{k-1}n+a_k}{b_0n^m+...+b_{m-1}n+b_m}=\begin{cases}\infty\left(\dfrac{a_0}{b_0}\right),k>m\\\dfrac{a_0}{b_0},k=m\\0,k<m\end{cases}$ 5) $e_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$; $E_n=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+...+\dfrac{1}{n!}$ $\lim\limits_{n\to\infty}e_n=\lim\limits_{n\to\infty}E_n=e$, unde $e\approx2,71828...\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$	

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$	• criteriul majorării pentru șiruri convergente $\lvert x_n-x\rvert\le\alpha_n,\forall n$ și $\alpha_n\to0\Rightarrow x_n\to x$. • criteriul "cleștelui" $u_n\le x_n\le v_n,\forall n$ și $u_n\to x, v_n\to x\Rightarrow x_n\to x$	
	Proprietatea lui Weiestrass. Orice șir monoton și mărginit este convergent	
Operații cu limite de șiruri $x_n\to x, y_n\to y;\ x,y\in\overline{\mathbb{R}}$	1) dacă $x+y$ are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 2) dacă xy are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 3) dacă $y_n\ne0,\forall n$ și dacă $\dfrac{x}{y}$ are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$ 4) dacă $x_n>0,\forall n$ și dacă x^y are sens în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{y_n}=\left(\lim\limits_{n\to\infty}x_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$	Caz exceptat: $\infty-\infty$ Caz exceptat: $0\cdot\infty$ Cazuri excetate: $\dfrac{0}{0},\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ Cazuri exceptate: $0^0,\infty^0,1^\infty$
Limite remarcabile	1) $\lim\limits_{x_n\to0}\dfrac{\sin x_n}{x_n}=\lim\limits_{x_n\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x_n}{x_n}=\lim\limits_{x_n\to0}\dfrac{\arcsin x_n}{x_n}=\lim\limits_{x_n\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}x_n}{x_n}=1$ 2) $\lim\limits_{x_n\to0}\dfrac{\ln(1+x_n)}{x_n}=1$; $\lim\limits_{x_n\to0}\dfrac{a^{x_n}-1}{x_n}=\ln a, a>0, a\ne1$ 3) $\lim\limits_{x_n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x_n}\right)^{x_n}=\lim\limits_{x_n\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x_n}\right)^{x_n}=\lim\limits_{x_n\to0}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}=e$	

Testul 1 (1 punct din oficiu)

1. Să se determine cel mai mic termen al şirului cu termenul general $a_n=\frac{n^2}{3}-3n$ şi cel mai mare termen al şirului având termenul general $b_n=\frac{n}{2}-\frac{n^2}{3}$. (2 puncte)

2. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin termenul general $x_n=\frac{n^2+3n-2}{(n+1)(n+2)}, n\geq 1$, iar $y_n=x_1+x_2+...+x_n$, $n\geq 1$. Să se arate că: a) şirul (x_n) este convergent; b) $y_n=n-2+\frac{4}{n+2}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{y_n}{n}\right)^n=\frac{1}{e^2}$. (2 puncte)

3. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit astfel: $x_1\in\mathbb{R}^*, x_{n+1}=\frac{nx_n}{n+2}, n\geq 1$.
Să determine: a) termenul general x_n; b) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_1+x_2+...+x_n)$. (2 puncte)

4. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit astfel: $x_1=1, x_{n+1}=\sqrt{1+nx_n}$, $n\geq 1$. Să se arate că:
a) $n-2\leq x_n\leq n+2, \forall n\geq 1$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=1$. (2 puncte)

5. Dacă $\left(1+\sqrt{3}\right)^n=a_n+b_n\sqrt{3}, a_n, b_n\in\mathbb{Q}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\sqrt{3}$. (1 punct)

Testul 2 (1 punct din oficiu)

1. Să se calculeze limitele : 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+1}\right)^{-\frac{n}{2}}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n+1}}-\sqrt{n+5\sqrt{n+1}}\right)$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+...+n(n+1)}{n^3}$. (3 puncte)

2. Se consideră şirurile $a_n=n-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2+3k+1}{k^2+3k+2}, b_n=a_1a_2...a_n, n\geq 1$.
Să se arate că şirurile sunt convergente şi să se calculeze limitele lor. (2 puncte)

3. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+an^2}-\sqrt{n^2-an}\right)=1$. (2 puncte)

4. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit astfel : $a_1=a\in\mathbb{R}, a_{n+1}=a_n^{\,3}-3a_n^{\,2}+3a_n$, $n\geq 1$.
Să se determine a astfel încât şirul (a_n) să fie convergent şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$. (2 puncte)

Testul 3 (de tip grilă) (1 punct din oficiu)

1. Limita $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{21}+\frac{3}{91}+...+\frac{n}{n^4+n^2+1}\right)$ este egală cu: a) $\frac{1}{3}$; b) 0; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{4}$; e) $\frac{1}{5}$.

2. Limita şirului $(x_n)_{n\geq 1}$, cu termenul general: $x_n=\frac{[x]+[2^2x]+...+[n^2x]}{n^3}$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real a ,este egală cu: a) x; b) $\frac{x}{3}$; c) $\frac{x}{2}$; d) $3x$; e) 0.

3. Fie $a\in\mathbb{R}$ fixat şi $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir definit prin termenul său general $a_n=a+1-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+k}$.
Să se determine rangul n de la care $|a_n-a|\leq\frac{1}{100}$. a) 99; b) 81; c) 44; d) 67; e) 33.

4. Parametrii $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a+\frac{bn+1}{n^2-1}\right)^n=e^2$ sunt egali cu:
a) $a=b=1$; b) $a=1, b=2$; c) $a=b=3$; d) $a=-1, b=2$; e) $a=1, b=-2$.

3. LIMITE DE FUNCȚII

Acest capitol este unul fundamental pentru „ Analiza matematică ". În capitolul precedent am studiat limita unui şir de numere reale (şirul fiind o funcție particulară definită pe $\mathbb{N}$ cu valori în $\mathbb{R}$). Aici vom extinde noțiunea de limită la o funcție oarecare. Se dau criterii pentru limita unei funcții într-un punct, precum şi operații algebrice cu limite de funcții (similare celor de la şiruri). Sunt prezentate principalele limite de funcții, ilustrate de multiple exemple. În ultima parte se dau tehnici pentru eliminarea nedeterminărilor în calculul limitelor.

Istoric . Conceptul de trecere la limită a fost formulat, pentru prima dată, de Isac Newton (1642-1727) şi Gottfried Leibniz (1646-1716), fiecare în încercări diferite de a rezolva probleme de calcul. Contribuții importante aduce în acest domeniu şi Leonhard Euler (1707-1783). El fundamentează conceptul de funcție. Descrieri verbale ale conceptului de limită au fost propuse de diferiți matematicieni, dar insuficiente pentru a fi utilizate în demonstrații. În 1821, Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) în lucrarea Cours d'Analyse formulează definiții şi prezintă argumente cu mai multă atenție decât predecesorii săi. Dar cel care formulează definiția precisă a limitei este Karl Weierstrass (1815-1897). Aceasta este definiția pe care o utilizăm şi azi.

- Introducere 286
- Punct de acumulare 288
- Limita unei funcții într-un punct.288
- Criterii de existență a limitei 301
- Limitele funcțiilor elementare 309
- Operații cu limite 322
- Limite remarcabile 327
- Cazuri exceptate 331
- Limite de funcții cu parametri 335
- Teste de evaluare 339

3.1. INTRODUCERE

Conceptul de limită a unei funcții într-un punct este fundamental în analiza matematică. Orice noțiune pe care o vom prezenta face referire la limită. Ce este viteza instantanee? Este limita vitezei medii. Ce este panta unei curbe într-un punct? Este limita pantelor secantelor (Fig. 1).

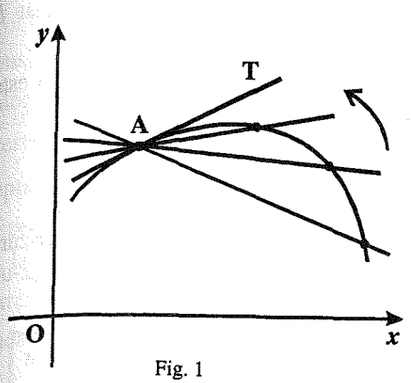


Fig. 1

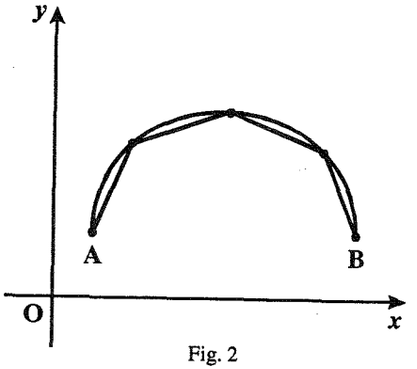


Fig. 2

Ce este lungimea unei curbe? Este limita lungimilor drumurilor poligonale (Fig. 2). Ce este aria unei regiuni mărginite de o curbă? Este o limită a unei sume de arii de dreptunghiuri (Fig. 3).

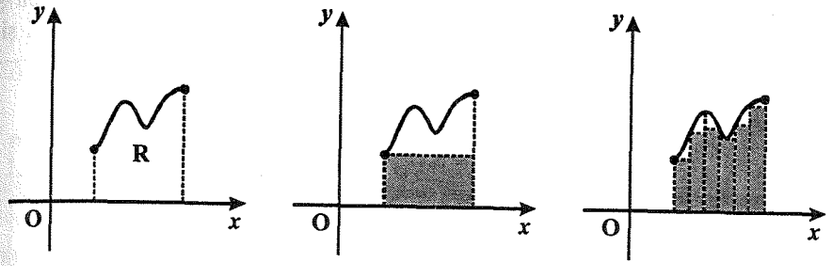


Fig.3

În capitolul prcedent am studiat limite de şiruri.

Un şir este o funcție $x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}, n\to x_n$. Am studiat comportarea lui pentru valori foarte mari ale lui n.

În acest capitol vom extinde această idee, analizând comportarea unei funcții $f:E\to\mathbb{R}$, al cărei domeniu conține, în general, o mulțime arbitrară de numere reale pozitive. Graficul unui şir este format dintr-o mulțime infinită de puncte izolate. În contrast, funcțiile pe care le vom analiza au graficele de cele mai multe ori curbe continue. Dacă o astfel de funcție este definită pe o mulțime de forma $[0,\infty)$, atunci când x creşte spre infinit prin valori reale, comportarea graficului este asemănătoare cu a şirului $(f(n))$ când n tinde la ∞, prin valori întregi pozitive. Mai general, vom fi interesați de comportarea funcției f în jurul unui punct a, vom

studia dacă valorile funcției $f, f(x), x \in E$ se apropie de un anumit număr l, atunci când x se apropie foarte mult de $a, x \neq a$.
În acest fel problema comportării lui f în jurul lui a are sens chiar dacă f nu este definită în a.

3.2. PUNCT DE ACUMULARE

Reamintim propoziția de caracterizare pentru un punct de acumulare, caracterizare ce va ajuta mai târziu la înțelegerea conceptului de limită a unei funcții într-un astfel de punct, pe care am dat-o la limita unui șir.

Propoziție. Punctul $a \in \mathbb{R}$ este punct de acumulare al mulțimii A dacă și numai dacă există un șir $(x_n), x_n \in A, x_n \neq a, \forall n$, cu proprietatea că $x_n \to a$.

Această propoziție afirmă că a este **punct de acumulare** al mulțimii A dacă și numai dacă se poate găsi cel puțin **un șir de elemente din** A, **diferite de** a, **șir convergent** la a.
O altă caracterizare a punctului de acumulare este dată de următoarea

Teoremă. Fie $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$. Punctul $a \in \mathbb{R}$ este de acumulare pentru A dacă și numai dacă $\forall \delta > 0$, există cel puțin un punct $x \in A, x \neq a$ astfel încât $|x-a| < \delta$.

Observații. **1)** Partea a doua a teoremei este ilustrată în Fig. 4. Punctul a este punct de acumulare pentru A dacă A conține un interval de forma $(a-\delta, a)$ sau $(a, a+\delta)$ sau conține reuniunea lor (intervalele pot fi și închise în a).

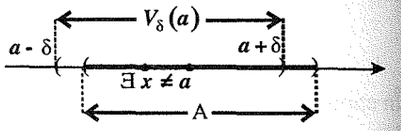


Fig.4

2) Punctul $+\infty(-\infty)$ este punct de acumulare pentru A dacă $\forall n \in \mathbb{N}^*$, există $\in A$ astfel încât $x_n > n(x_n < -n)$.

3.3. LIMITA UNEI FUNCȚII ÎNTR-UN PUNCT

1. Formularea problemei. Interpretarea grafică

În cele ce urmează se consideră o funcție $f: E \to \mathbb{R}$ și a un punct de acumulare pentru E (care poate **să aparțină** sau **nu** lui E).

Problema care ne interesează este comportarea funcției în jurul lui a, **fără a lua în considerare valoarea funcției în** a (în cazul în care $f(a)$ există). Deci luând valori $x \in E, x \neq a, x$ din ce în ce mai apropiat de a, oare valorile funcției f în aceste puncte, $f(x)$, se apropie din ce în ce mai mult de același număr $l \in \overline{\mathbb{R}}$?
Faptul că x tinde către a din stânga ($x \to a, x < a$), din dreapta $(x \to a, x > a)$ și respectiv din stânga și din dreapta către a, îl marcăm pe axa Ox printr-o săgeată de la x la a (Fig.5. *a*), *b*) și respectiv *c*)).Analog, când $f(x)$ se apropie de l îl marcăm, pe axa Oy, printr-o săgeată de la $f(x)$ la l.
Dacă da, atunci numărul l reprezintă limita funcției f în punctul a (Fig.5. *d*)).

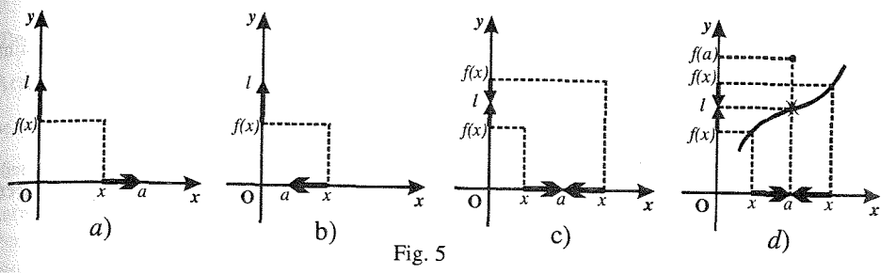


Fig. 5

Exprimarea de mai sus nu poate fi luată drept definiție, deoarece trebuie văzut ce înseamnă în limbaj matematic „x din ce în ce mai apropiat de a", precum și „$f(x)$ se apropie din ce în ce mai mult de același număr l".
Mai precis: luând șiruri $x_n \to a$, formate din puncte $x_n \neq a, x_n \in E, \forall n$ se poate afirma că șirurile imagine $(f(x_n))$ au aceeași limită l?
Dacă da, atunci l reprezintă limita funcției f în a și se scrie $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ (citim: limită de $f(x)$ când x tinde către a este egală cu l).
Să observăm că a fiind punct de acumulare pentru E, astfel de șiruri $x_n \in E, x_n \neq a$, $\forall n, x_n \to a$ există.

Exemple. **1) Fie funcția** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x+1$ **și** $a = 1$. **Să studiem comportarea funcției** f **în jurul punctului** $a = 1 \in \mathbb{R}$. **Fie pentru aceasta diferite șiruri** $(x_n), x_n \neq 1, \forall n, x_n \to 1$. **Ce se întâmplă cu șirurile imagine** $(f(x_n))$, **au sau nu o aceeași limită?**

Luăm șirul $(x_n): 1+\frac{1}{1}, 1+\frac{1}{2}, \ldots, 1+\frac{1}{n}, \ldots \to 1$ $(x_n \searrow 1)$ **pentru care avem șirul**

$(f(x_n)): 2\left(1+\frac{1}{1}\right)+1, 2\left(1+\frac{1}{2}\right)+1, \ldots, 2\left(1+\frac{1}{n}\right)+1, \ldots \to 2+1=3$ $(f(x_n)) \searrow 3)$.

Dacă se ia șirul $(x'_n): 1-\frac{1}{1}, 1-\frac{1}{2}, \ldots, 1-\frac{1}{n}, \ldots \to 1$ $(x_n \nearrow 1)$, **atunci avem șirul**

$\left(f(x'_n)\right): 2\left(1-\frac{1}{1}\right)+1, 2\left(1-\frac{1}{2}\right)+1, ..., 2\left(1-\frac{1}{n}\right)+1, ... \to 3 \ \left(f(x'_n) \nearrow 3\right)$.

Am ilustrat cele două situații în Fig. 6.

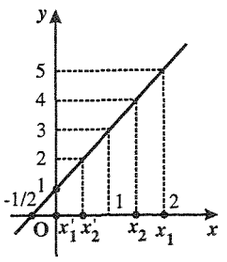


Fig.6

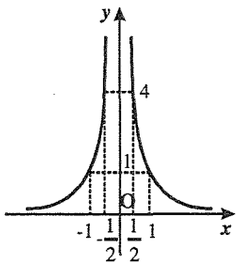


Fig.7

Fie acum șirul $(x''_n): 1+\frac{1}{1}, 1-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{3}, 1-\frac{1}{4}, ..., 1-\frac{1}{2n}, 1+\frac{1}{2n+1}, ... \to 1$ (termenii șirului sunt situați de o parte și de alta a lui $a=1$).

Șirul $\left(f(x''_n)\right): 2\left(1+\frac{1}{1}\right)+1, 2\left(1-\frac{1}{2}\right)+1, ..., 2\left(1-\frac{1}{2n}\right)+1, 2\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)+1 ... \to 3$.

Constatăm că în cele trei cazuri dacă $x_n \neq 1, x_n \to 1$, atunci $f(x_n) \to 3$. Fie acum (x_n) cu $x_n \neq 1, \forall n, x_n \to 1$. În acest caz $f(x_n) = 2x_n + 1 \to 3$.

De aici am obținut următorul rezultat:

$$\forall (x_n), x_n \neq 1, \forall n, x_n \to 1 \Rightarrow f(x_n) \to 3.$$

Această proprietate se exprimă spunând că funcția $f(x) = 2x+1$ are în punctul $a=1$ limita 3 și se scrie: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$ sau $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1) = 3$ sau $2x+1 \underset{x\to 1}{\to} 3$. (Se citește: limită de $f(x)$, când x tinde la 1 este egală cu 3 sau $2x+1$ tinde la 3 când x tinde la 1).

2) Se consideră $f: \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2}$ și $a = 0 \notin \mathbb{R}-\{0\}$ (Fig. 7). În acest caz funcția nu este definită în $a=0$, dar acest punct este punct de acumulare pentru $\mathbb{R}^*$. (N-avem decât să luăm șirul $(x_n), x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*, x_n \to 0$). Din nou studiem comportarea funcției în jurul lui zero.

Fie șirul $(x_n): 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ... \to 0$ pentru care șirul $\left(f(x_n)\right): 1, 2^2, 3^2, ..., n^2, ... \to \infty$. De asemenea, pentru șirul: $(x'_n): -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, ..., -\frac{1}{n}, ... \to 0$, rezultă șirul $\left(f(x'_n)\right): 1, 2^2, 3^2, ..., n^2, ... \to \infty$.

În general, dacă $x_n \to 0, x_n \neq 0, \forall n$, atunci $f(x_n) = \frac{1}{x_n^2} \to \infty$, ceea ce arată că

$$\forall (x_n), x_n \neq 0, \forall n, x_n \to 0 \Rightarrow f(x_n) \to \infty.$$

Această proprietate se exprimă spunând că funcția $f(x) = \frac{1}{x^2}$ are în punctul $a=0$ limita $+\infty$ și se scrie $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$ sau $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ sau $\frac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{\to} \infty$. (Citim: limită de $f(x)$, când x tinde la zero este ∞ sau $\frac{1}{x^2}$ tinde la ∞ când x tinde la zero.)

3) Fie acum $f: \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}, a = \infty$.

În acest caz punctul de acumulare este infinit și nu aparține domeniului. Dorim să vedem comportarea funcției f în jurul lui ∞.

Fie șirul $(x_n): 1, 2, ..., n, ... \to \infty$, pentru care: $f(x_n): 1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ... \to 0$. Mai general, dacă (x_n) este un șir cu proprietatea $x_n \to \infty$, atunci $f(x_n) = \frac{1}{x_n} \to 0$.

Deci $\forall x_n \to \infty \Rightarrow f(x_n) \to 0$.

Această afirmație se traduce spunând că funcția $f(x) = \frac{1}{x}$ are limita egală cu zero la $+\infty$ și se scrie:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ sau $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ sau $\frac{1}{x} \underset{x\to\infty}{\to} 0$. (Citim: limită de $f(x)$, când x tinde la $+\infty$ este zero dacă x tinde la $+\infty$).

Pentru aceeași funcție luăm punctul de acumulare $a=0$ și ca și până acum dorim să vedem comportarea funcției f în jurul lui zero.

Fie șirul $(x_n): 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ... \to 0$ pentru care $\left(f(x_n)\right): 1, 2, 3, ..., n, ... \to \infty$.

Pentru șirul $(x'_n): -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, ..., -\frac{1}{n}, ... \to 0$ rezultă $\left(f(x'_n)\right): -1, -2, -3, ..., -n, ... \to -\infty$.

De aici rezultă că nu pentru orice șir $(x_n), x_n \neq 0, \forall n, x_n \to 0$, șirul imagine $\left(f(x_n)\right)$ are aceeași limită.

În acest caz spunem că funcția $f(x) = \frac{1}{x}$ nu are limită în $a=0$.

4) Fie $f: \mathbb{R}-\{2\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $a=2$.

Dacă $x \neq 2$, atunci $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = x+2$. Cum limita în $a=2$ nu se referă la valoarea funcției în $a=2$, atunci $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x+2)$.

Sensul acestei egalități este că dacă una din limite există, atunci și cealaltă există și, mai mult, sunt egale.

Deci în loc să calculăm limita funcției $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ (mai complexă) este suficient de găsit limita funcției mai simple $g(x) = x+2$ în $a=2$.

Cum pentru $\forall x_n \to 2, x_n \neq 2, \forall n$ rezultă $g(x_n) = x_n + 2 \to 4$. Se deduce $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 4$. Deci $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} g(x) = 4$.

5) **În fine un ultim exemplu de funcție multiformă,** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x+1, x<1\\ 1, x=1, a=1\\ 2x-1, x>1\end{cases}$.

Fie şirul $(x_n), x_n<1, x_n\to 1$, **atunci** $f(x_n)=2x_n+1\to 3$, **în timp ce pentru un şir** (x'_n), $x'_n>1, x'_n\to 1$ **rezultă** $f(x'_n)=2x'_n-1\to 1$.

Deci nu pentru orice şir $(x_n), x_n\neq 1, \forall n$, **şirul** $(f(x_n))$ **are aceeaşi limită. Asta înseamnă că funcția** f **nu are limită în** $a=1$.

2. Definiția limitei unei funcții într-un punct

Fie $f:E\to\mathbb{R}$ o funcție şi a **un punct de acumulare** (finit sau infinit) al lui E (Deci există şiruri $(x_n), x_n\in E, x_n\neq a, \forall n, x_n\to a$).

> **Definiție (Heine).** Se spune că $l\in\overline{\mathbb{R}}$ este limita funcției f în punctul a, dacă oricare ar fi şirul $(x_n), x_n\in E, x_n\neq a, \forall n$ şirul $(f(x_n))$ al valorilor funcției tinde către l.

Se scrie $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ sau $f(x)\underset{x\to a}{\to} l$ (Citim: limită de $f(x)$, când x tinde la a este egală cu l sau $f(x)$ tinde la l dacă x tinde la a).

Condiția din definiție se enunță simplificat astfel:

> dacă $x_n\to a, x_n\neq a, \forall n$, atunci $f(x_n)\to l$

sau şi mai simplu (renunțând la indicele n)

> dacă $x\to a, x\neq a$, atunci $f(x)\to l$.

Observații. 0) Definiția limitei unei funcții într-un punct în sensul lui Heine mai este cunoscută sub denumirea de **definiția cu şiruri**.

1) Dacă $a=\pm\infty$, atunci condiția $x_n\neq a$ este automat verificată. Deci în acest caz nu mai scriem $x_n\neq a$. Condiția $x_n\neq a$ are sens numai dacă $a\in E$.

2) Problema limitei unei funcții are sens **numai în puncte** a **de acumulare pentru** E. Nu are sens să vorbim de limita funcției $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x}$ în $a=-2$.

3) Negația definiției este: numărul $l\neq\lim\limits_{x\to a} f(x)$ dacă există un şir $(x_n), x_n\in E$, $x_n\neq a, x_n\to a$ pentru care şirul $(f(x_n))$ nu are limita l.

4) O modalitate de a arăta că o funcție nu are limită într-un punct de acumulare a este următoarea:

> Se aleg două şiruri $(x_n),(x'_n), x_n, x'_n\in E, x_n, x'_n\neq a, x_n\to a, x'_n\to a$ pentru care şirurile $(f(x_n)),(f(x'_n))$ au limite diferite.

Exemple. **1) Fie** $f:\mathbb{R}\to[-1,1], f(x)=\sin x$. **Să arătăm că această funcție nu are limită în punctul** $a=\infty$.

Considerăm şirurile:

$(x_n): x_n=\frac{\pi}{2}+2n\pi\to\infty$ **pentru care şirul** $f(x_n)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1\to 1$ **şi**

$(x'_n): x'_n=2n\pi\to\infty$ **când** $f(x'_n)=\sin 2n\pi=0\to 0$.

Cum $1\neq 0$ **rezultă** $f(x)=\sin x$ **nu are limită la** $+\infty$.

Analog se arată că $f(x)=\sin x$ **nu are limită la** $-\infty$.

2) Să considerăm funcția lui Dirichlet $D:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $D(x)=\begin{cases}0, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\\ 1, x\in\mathbb{Q}.\end{cases}$

Să arătăm că această funcție nu are limită în nici un punct.

Fie a **un punct de acumulare pentru** $\mathbb{R}$. **Considerăm un şir** $(x_n), x_n\in\mathbb{Q}, x_n\neq a,\ x_n\to a$.

Atunci $D(x_n)=1\to 1$. **Analog luând** $x'_n\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}, x'_n\neq a, x'_n\to a$, **avem** $D(x'_n)=0\to 0$.

Cum $1\neq 0$ **rezultă că** f **nu are limită în** a.

5) Dacă funcția $f:E\to\mathbb{R}$ are limita în punctul de acumulare a, atunci pentru a afla $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ este suficient să luăm un singur şir (x_n) convenabil ales, cu $x_n\to a$.

Probleme propuse

1. Să se determine punctele de acumulare şi punctele izolate ale mulțimilor:

1) $\left\{\frac{n}{2n+1}\middle| n\in\mathbb{N}\right\}$; **2)** $(0,1)\cup\{2\}\cup[3,4)$; **3)** $\{-2,-1\}\cup\left[-\frac{1}{2},0\right)\cup\{1\}$; **4)** $(0,1)\cap(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$.

2. 1) Determinați o mulțime cu un singur punct de acumulare.

2) Determinați o mulțime cu două puncte de acumulare.

3) Determinați o mulțime, care nu este interval sau reuniune de intervale avându-l pe $\sqrt{2}$ **ca punct de acumulare.**

4) Determinați mulțimea punctelor de acumulare pentru mulțimea $\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)\middle| n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

3. Să se calculeze următoarele limite utilizând definiția cu şiruri.

1) $\lim\limits_{x\to 0}(3x+2)$; **2)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}$; **3)** $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+5)$; **4)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-5x)$; **5)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2x}{3x-1}$; **7)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x^2+1}$; **8)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; **9)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x}{1+\sin 2x}$; **10)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}$.

4. Stabiliți dacă au sens limitele:

1) $\lim\limits_{x\to-3}\sqrt{x}$; **2)** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-1}$; **3)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-x^2}$; **4)** $\lim\limits_{x\to-1}\ln x$; **5)** $\lim\limits_{x\to-2}\arccos x$.

5. Precizați punctele în care funcțiile de mai jos nu au limită.

1) $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x+1}$; 2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x-1, x\geq 1\\ 1-x, x<1\end{cases}$;

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}1-2x, x\leq -1\\ 3x, x>-1\end{cases}$; 4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2x+1, x\in\mathbb{Q}\\ 4-x, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$;

5) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}[x], x\in\mathbb{Q}\\ x, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$, $[x]$ = **parte întreagă**; 6) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\{x\}, x\in\mathbb{Q}\\ x, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$,

$\{x\}$ = **parte fracționară.**

6. Să se arate că funcțiile următoare nu au limită în punctele indicate.

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x-1, x<3\\ x+1, x\geq 3\end{cases}; a=3$; 2) $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x-1}, a=1$;

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=[x], a\in\mathbb{Z}$; 4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x, x\in\mathbb{Q}\\ 1, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}, a=0$.

7. Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2-x, x\in\mathbb{Q}\\ x-3, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$ are limită în a.

8. Să se determine parametrul $a\in\mathbb{R}$ dacă (pe rând):

1) $\lim\limits_{x\to 1}(2ax+1)=5$; 2) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-ax+2}{x+5}=3$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{5x}=1$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+1}\right)=2$.

9. Să se arate că dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcție periodică, neconstantă, atunci nu există $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

3. Caracterizarea limitei unei funcții într-un punct

Criteriul următor, cunoscut sub numele de criteriul lui Cauchy (sau criteriul $\varepsilon-\delta$), dă condiția necesară și suficientă pentru limita unei funcții într-un punct de acumulare**(facultativ).**

Teorema (Cauchy). Fie $f:E\to\mathbb{R}$ o funcție și a un punct de acumulare pentru $E, a\in\mathbb{R}$.
Funcția f are limită în punctul $x=a$ numărul $l\in\mathbb{R}$ dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon>0$, există un număr real $\delta(\varepsilon)>0$ astfel încât
$\forall x\in E, 0<|x-a|<\delta(\varepsilon), (1)$ să rezulte $|f(x)-l|<\varepsilon, (2)$.

Observații . **1)** Pentru început să traducem inegalitățile (1) și (2). Avem:
$0<|x-a|<\delta\Leftrightarrow a-\delta<x<a+\delta, x\neq a$ (Fig. 8)

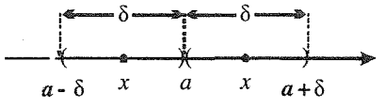


Fig.8

și $|f(x)-l|<\varepsilon\Leftrightarrow l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon$ $|f(x)-l|<\varepsilon\Leftrightarrow l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon$.

Este neesențial ca f să fie definită în punctul a, dar trebuie ca f să fie definită cel puțin pe o mulțime de forma $(a-p,a)\cup(a,a+p), p>0$. Aceasta garantează că putem scrie $f(x)$, pentru orice $x\neq a$, care este „suficient de aproape" de a. Numărul pozitiv ε se alege la început, oricât de mic dorim. Pentru el trebuie găsit $\delta(\varepsilon)>0$, număr care în general depinde de ε, astfel încât dacă $x\in(a-\delta,a+\delta), x\in E, x\neq a$ (comportarea lui f în a nu afectează limita), atunci $f(x)\in(l-\varepsilon,l+\varepsilon)$.
Ultima afirmație este echivalentă cu faptul că graficul lui f pentru $x\in E\cap(a-\delta,a+\delta), x\neq a$, se află între dreptele orizontale (banda) $y=l-\varepsilon$, $y=l+\varepsilon$ (Fig. 9)

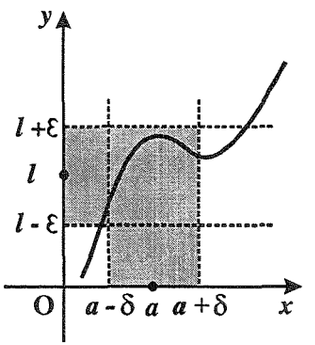


Fig.9

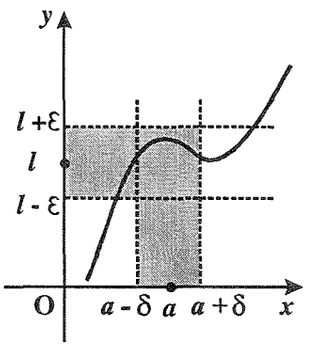


Fig.10

În Fig. 10, am luat un $\varepsilon>0$, mai mic decât cel din Fig. 9 și constatăm că se poate determina un $\delta(\varepsilon)>0$, mai mic decât cel din Fig. 9. Dacă $\delta>0$ este ales prea mare, atunci este posibil de găsit un punct $x_1\in(a-\delta,a+\delta), x_1\neq a$ pentru care $|f(x_1)-l|>\varepsilon$.
Pentru alegerea cât mai bună a lui δ, primul lucru este de a stabili o legătură între $|f(x)-l|$ și $|x-a|$.

Exemplu . Să arătăm că $\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)=3$.

Determinarea lui δ. Fie $\varepsilon>0$. Să determinăm $\delta(\varepsilon)>0$ astfel încât dacă $0<|x-2|<\delta$ să avem $|(2x-1)-3|<\varepsilon$.

Legătura între cele două „module" este imediată $|(2x-1)-3|=|2x-4|=2|x-2|$.

A lua $|(2x-1)-3|<\varepsilon$ înseamnă a lua $2|x-2|<\varepsilon$, adică $|x-2|<\frac{\varepsilon}{2}$. Această ultimă relație ne spune să punem $\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2}$.

Arătăm că $\delta(\varepsilon)$ este bun. Dacă $0<|x-2|<\frac{\varepsilon}{2}$, atunci $2|x-2|<\varepsilon$, adică $|(2x-1)-3|<\varepsilon$.

Remarcă. Aici am luat $\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2}$, dar am fi putut alege orice număr pozitiv $\delta\le\frac{\varepsilon}{2}$. În general dacă un anumit δ este bun pentru un ε dat, atunci orice $\delta'>0, \delta'<\delta$ este de asemenea bun.

Etapele de parcurs dacă se utilizează criteriul lui Cauchy pot fi redate schematic ca în Fig. 11.

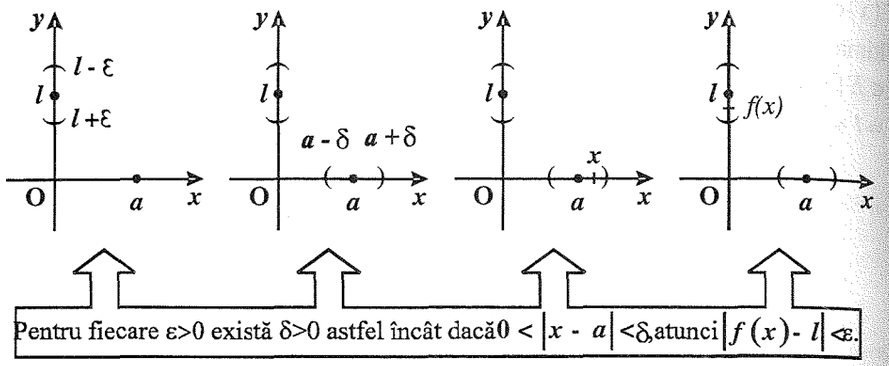


Fig. 11

2) Dacă se acceptă ca definiție partea a doua a teoremei (această definiție se numește definiția lui Cauchy pentru limita unei funcții într-un punct), atunci definiția lui Heine devine teoremă.

3) Dacă rescriem condițiile (1) și (2) din teoremă sub forma $\forall x\in E, a-\delta(\varepsilon)<x<a+\delta(\varepsilon)$, $(1')$ și respectiv $l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon, (2')$ atunci putem da o altă caracterizare a limitei unei funcții f în punctul de acumulare a cu ajutorul vecinătăților astfel:

Teoremă. Funcția f are limita $l\in\mathbb{R}$ în punctul $x=a$ dacă și numai dacă $\forall V\in\vartheta(l)$, $\exists U\in\vartheta(a)$ astfel încât $\forall x\in U\cap E, x\neq a$, să rezulte $f(x)\in V$ (Fig. 12).

O vecinătate V a lui l conține o vecinătate simetrică centrată în l de forma $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)\subseteq V, \varepsilon>0$.

Pentru $\varepsilon>0$ există un $\delta(\varepsilon)>0$. Se alege $U=(a-\delta(\varepsilon), a+\delta(\varepsilon))$ drept vecinătate a punctului a. Atunci pentru $x\in U\cap E, x\neq a$, avem $f(x)\in V$.

Dacă $l=\infty$, atunci $V=(\varepsilon,\infty]$, iar pentru $l=-\infty$, luăm

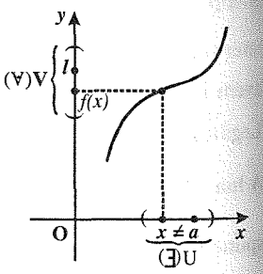


Fig.12

$V=[-\infty,\varepsilon)$. Dacă $a=\infty$, atunci $U=(\delta,\infty]$, iar dacă $a=-\infty$, atunci $U=[-\infty,\delta)$.

Exerciții rezolvate

1. Să arătăm utilizând criteriul $\varepsilon-\delta$ că $\lim\limits_{x\to\frac{5}{2}}(2x+1)=6$.

R. Fie $\varepsilon>0$. Alegem $\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{3}$. Se consideră $x\in\mathbb{R}$, cu proprietatea $0<\left|x-\frac{5}{2}\right|<\delta=\frac{\varepsilon}{3}$.

Pentru un astfel de x se vede ușor că relațiile următoare au loc

$$|f(x)-l|=|(2x+1)-6|=|2x-5|=2\left|x-\frac{5}{2}\right|<2\cdot\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon.$$

Cum alegerea lui δ de mai sus este posibilă pentru fiecare ε, criteriul are loc și deci $\lim\limits_{x\to\frac{5}{2}}f(x)=6$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{|x|}{x}, x\neq 0$. Să arătăm că această funcție nu are limită în $x=0$.

Presupunem, prin absurd, că numărul l este limita lui f în $x=0$. Alegem $\varepsilon=\frac{1}{4}$. Există $\delta>0$ astfel încât dacă $0<|x-0|<\delta$, atunci $|f(x)-l|<\frac{1}{4}$. Alegem $p=-\frac{\delta}{4}, q=\frac{\delta}{4}$ și avem $f(p)=-1, f(q)=1$. Acum avem: $2=|f(p)-f(q)|\le|f(p)-l|+|l-f(q)|<\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

Contradicție. Deci f nu are limită în $x=0$.

3. Fie $f:E\to\mathbb{R}$ și a un punct de acumulare al lui E. Dacă f are limită finită în a, atunci există o vecinătate $V\in\vartheta(a)$ și $M>0$ astfel încât $|f(x)|\le M, \forall x\in V\cap E$.

Într-adevăr, fie $\varepsilon=1$ și $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$. Atunci există $\delta>0$ astfel încât pentru $0<|x-a|<\delta$ și $x\in E$ să avem $|f(x)-l|<\varepsilon=1$.

Dacă $a\in E$, definim $M=\max\{|l-1|,|l+1|,|f(a)|\}$; altfel definim $M=\max\{|l-1|,|l+1|\}$ și fie $V=(a-\delta,a+\delta)$. Atunci $|f(x)|\le M, \forall x\in V\cap E$.

Într-un limbaj mai puțin formal, dacă f are limită finită în a, atunci f este mărginită în jurul lui a.

În particular, funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x}$ nu are limită finită în $a=0$ deoarece f este nemărginită în orice vecinătate a lui zero.

Observații. 1) Dacă $a\in\mathbb{R}$ și $l=\infty$, atunci criteriul $\varepsilon-\delta$ are enunțul:

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0, (\exists)\delta(\varepsilon)>0$ astfel încât $\forall x\in E, 0<|x-a|<\delta(\varepsilon)$ să rezulte $f(x)>\varepsilon$.

Dacă $a=\infty$ și $l=\infty$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0, (\exists)\delta(\varepsilon)>0$ astfel încât dacă $x>\delta(\varepsilon)\Rightarrow f(x)>\varepsilon$. (Comparați cu definiția șirului cu limită infinită).

Dacă $a\in\mathbb{R}$ şi $l=-\infty$, atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,(\exists)\delta(\varepsilon)>0$ astfel încât $\forall x\in E, 0<|x-a|<\delta(\varepsilon)\Rightarrow f(x)<-\varepsilon$ etc..

2) De obicei criteriul $\varepsilon-\delta$ este utilizat în probleme teoretice.

Optăm pentru definiţia limitei unei funcţii într-un punct cu ajutorul şirurilor datorită faptului că în capitolul precedent am studiat şirurile şi limitele acestora precum şi operaţii cu limite de şiruri.

3) Uneori pentru $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ se utilizează o formă uşor diferită şi anume $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h)=l$, unde h desemnează distanţa între x şi $a\,(h=x-a)$.

Probleme propuse

1.Utilizând criteriul cu vecinătăţi, demonstraţi unicitatea limitei unei funcţii într-un punct.

2.Utilizând criteriul $\varepsilon-\delta$, pentru limita unei funcţii într-un punct, să se arate că:

1) $\lim\limits_{x\to 1}(4x+3)=7$; **2)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x+3}{5x+1}=-\dfrac{1}{4}$; **3)** $\lim\limits_{x\to\infty}(3x-2)=\infty$; **4)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{2x+1}=\dfrac{3}{2}$;

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=0$; **6)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x+1}=\infty$.

3.Să se arate că dacă $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}0, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\\ \dfrac{1}{q}, x=\dfrac{p}{q}, p,q\in\mathbb{N}^*,(p,q)=1,\end{cases}$ **atunci f are limită în orice punct $a\in[0,1]$ şi limita este zero.**

4.Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}, a<b$, o funcţie care are limită finită în fiecare punct $x\in[a,b]$. Arătaţi că f este mărginită.

4. Unicitatea limitei unei funcţii

Are loc următoarea:

Teoremă. Dacă l_1 şi l_2 sunt două limite ale funcţiei $f:E\to\mathbb{R}$ în punctul de acumulare $a\,(\in E')$, atunci $l_1=l_2$.

Limita unei funcţii într-un punct, dacă există, este unică.

Demonstraţie. Fie $x_n\in E, x_n\neq a, \forall n, x_n\to a$. Atunci $\lim\limits_n f(x_n)=l_1$, $\lim\limits_n f(x_n)=l_2$. Cum limita unui şir este unică, rezultă $l_1=l_2$. ■

5. Limite laterale

Revenim asupra exemplului tratat în 3.3 . Am considerat funcţia $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ şi punctul de acumulare $a=0$. Dacă se consideră şiruri $(x_n), x_n>0, x_n\to 0$, atunci $f(x_n)\to\infty$. În acest caz spunem că ∞ este limita la dreapta a lui f în $a=0$ sau că limita lui f la dreapta lui $a=0$ este egală cu $+\infty$.

Pentru şiruri $(x'_n), x'_n<0, x'_n\to 0$, avem $f(x'_n)\to-\infty$. În acest caz spunem că $(-\infty)$ este limita la stânga a lui f în $a=0$ sau că limita lui f la stânga lui $a=0$ este egală cu $(-\infty)$. Funcţia f nu are limită în $a=0$.

Următoarele definiţii vin să precizeze mai exact noţiunile de limite laterale pentru o funcţie într-un punct de acumulare.

Fie $f:E\to\mathbb{R}$ şi a un punct de acumulare pentru mulţimea $E_s=E\cap(-\infty,a)=\{x\in E\,|\,x<a\}$ (deci există şiruri $x_n\in E_s, x_n\to a$).

Definiţie. Se spune că $l_s(a)\in\overline{\mathbb{R}}$ este **limita la stânga** a funcţiei f în punctul a dacă pentru orice şir $x_n\in E_s, x_n\to a$ avem $f(x_n)\to l_s(a)$.

Se scrie: $l_s(a)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ sau $l_s(a)=\lim\limits_{x\nearrow a} f(x)$ sau în loc de $l_s(a)$ se mai scrie $f(a-0)$.

Exerciţii rezolvate

Să se calculeze limita la stânga, în punctul a indicat, pentru fiecare din funcţiile:

1) $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x-1}; a=1$. **2)** $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}; a=2$.

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}3x-1, x<-1\\ 2x+3, x\geq -1\end{cases}; a=-1$.

R. 1) Se consideră $x_n\to 1, x_n<1$. **Avem** $f(x_n)=\dfrac{1}{x_n-1}\to\dfrac{1}{0_-}=-\infty$. **Deci** $f(1-0)=\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x)=-\infty$.

Am marcat prin 0_-, faptul că şirul (x_n-1) tinde la zero prin valori negative.

2) Luăm $x_n\to 2, x_n<2$ **pentru care** $f(x_n)=\dfrac{x_n^2-4}{x_n-2}=x_n+2\to 4$. **Deci** $l_s(2)=\lim\limits_{x\nearrow 2} f(x)=4$.

3) Fie $x_n\to -1, x_n<-1$. **În acest caz** $f(x_n)=3x_n-1\to -4$, **adică** $l_s(-1)=-4$.

Exerciții propuse

Să se calculeze limita la stânga (dacă există), în punctul a indicat, pentru fiecare din funcțiile:

1) $f:\mathbb{R}-\{3\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}, a=3$. 2) $f:\mathbb{R}-\{-2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{-1}{x+2}, a=-2$.

3) $f:\mathbb{R}-\{\pm1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}, a=\pm1$. 4) $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}, a=1$.

5) $f:(-\infty,1)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}}{1-x}, a=1$. 6) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2-1, x\le 0\\ x^2+1, x>0\end{cases}, a=0$.

7) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, x<0\\ \dfrac{1}{x^2}, x>0\end{cases}, a=0$. 8) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x[x], a=2$.

9) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-[x], a\in\{-1,1\}$. 10) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\cos\dfrac{1}{x}, a=0$.

Fie $f:E\to\mathbb{R}$ și a un punct de acumulare pentru mulțimea $E_d=E\cap(a,\infty)=$ $=\{x\in E\,|\,x>a\}$ (deci există șiruri $x_n\in E_d, x_n\to a$).

Definiție. Se spune că $l_d(a)\in\overline{\mathbb{R}}$ este **limita la dreapta** a funcției f în punctul a dacă pentru orice șir $x_n\in E_d, x_n\to a$ avem $f(x_n)\to l_d(a)$.

Se scrie: $l_d(a)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ sau $l_d(a)=\lim\limits_{x\searrow a} f(x)$ sau în loc de $l_d(a)$ se mai scrie $f(a+0)$.

Observație. Dacă $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ are limite în punctele a,b, în punctul a vorbim de **limită laterală la dreapta**, iar în punctul b de **limită laterală la stânga**.

Exerciții rezolvate

Să se calculeze limita la dreapta, în punctul a indicat, pentru fiecare din funcțiile:

1) $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{-1}{x-1}, a=1$. 2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x+2, x\ge 1\\ -x+1, x<1\end{cases}, a=1$.

3) $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}, a=2$. 4) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\sin\dfrac{1}{x}, a=0$.

R. **1) Fie șirul $x_n\to1, x_n>1$. Atunci $f(x_n)=\dfrac{-1}{x_n-1}\to\dfrac{-1}{0_+}=-\infty$ (Am notat prin 0_+, faptul că șirul (x_n-1) tinde la zero prin valori pozitive). Deci $l_d(1)=\lim\limits_{x\searrow1} f(x)=-\infty$.**

2) Luăm $x_n\to1, x_n>1$. Avem $f(x_n)=x_n+2\to3$. Prin urmare $f(1+0)=\lim\limits_{x\searrow1} f(x)=3$.

3) Considerăm $x_n\to2, x_n>2$ când $f(x_n)=\dfrac{x_n^2-4}{x_n-2}=x_n+2\to4$. Deci $l_d(2)=\lim\limits_{x\searrow2} f(x)=4$.

4) Arătăm că f nu are limită la dreapta în $a=0$. Fie $(x_n), x_n=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\to0, x_n>0$ pentru care $f(x_n)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1\to1$. Luând acum șirul (x'_n) cu $x'_n=\dfrac{1}{-\frac{\pi}{2}+2n\pi}\to0, x'_n>0$, $n\ge1$, și avem $f(x'_n)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$. Cum $1\ne-1$, deducem că f nu are limită la dreapta în $a=0$.

Exerciții propuse

Să se calculeze limita la dreapta, în punctul a indicat, pentru fiecare din funcțiile:

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x+5, a=0$. 2) $f:\mathbb{R}-\{4\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2-16}{x-4}, a=4$.

3) $f:\mathbb{R}-\{-2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x+2}, a=-2$. 4) $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}, a=1$.

5) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x+6, x\ge3\\ -2x+3, x<3\end{cases}, a=3$. 6) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\cos\dfrac{1}{x}, a=0$.

3.4. CRITERII DE EXISTENȚĂ A LIMITEI

Prezentăm condițiile în care o funcție are limită într-un punct utilizând limitele laterale, limita unei alte funcții sau a altor două funcții în același punct.

1. Criteriul cu limite laterale

Următoarea teoremă vine să caracterizeze limita unei funcții într-un punct cu ajutorul limitelor laterale.

Teoremă. Fie $f:E\to\mathbb{R}$ o funcție și $a\in\mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru E cu proprietatea că funcția f are limite laterale în punctul a. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:
1) f are limită în punctul a;
2) $l_s(a)=l_d(a)$.
În aceste condiții $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l_s(a)=l_d(a)$.

Demonstrație. **1) $\Rightarrow$ 2)**. Fie $x_n\to a, x_n<a$.
Atunci $f(x_n)\to l=\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
Analog dacă $x_n\to a, x_n>a$, atunci $f(x_n)\to l=\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
Deci $l_s(a)=l_d(a)=l$.

$2) \Rightarrow 1)$. Folosim criteriul $\varepsilon-\delta$.

Presupunem că $l_s(a)=l_d(a)=l$. Pentru $\varepsilon>0$, arbitrar, există numerele $\delta_1>0, \delta_2>0$ astfel încât dacă $0<x-a<\delta_1$ sau $0<a-x<\delta_2$, $x\in E$ să rezulte $|f(x)-l|<\varepsilon$.

Luând $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$, atunci pentru $x\in E$, cu $0<|x-a|<\delta$ rezultă $|f(x)-l|<\varepsilon$, ceea ce arată că $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$. ■

Exerciții rezolvate

Să se stabilească dacă următoarele funcții au limită în punctul a indicat:

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}3x-2, x\le 0\\ -2, x>0\end{cases}, a=0$. **2)** $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x^3}, x<0\\ \frac{1}{x^2}, x>0\end{cases}, a=0$.

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}5x+1, x>3\\ 3x+2, x\le 3\end{cases}, a=3$. **4)** $f:\mathbb{R}-\{-2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{1}{(x+2)^2}, x<-2\\ \frac{1}{x+2}, x>-2\end{cases}, a=-2$.

5) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=x\sin\frac{1}{x}, a=0$. **6)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2, x\in\mathbb{Q}\\ 0, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}, a=0$.

R. 1) Pentru a calcula limita funcției în $a=0$, determinăm limitele laterale în $a=0$.

Pentru limita la stânga în $a=0$, fie $x_n\to 0, x_n<0$ pentru care $f(x_n)=3x_n-2\to -2$. Deci $l_s(0)=-2$.

Pentru limita la dreapta în $a=0$, luăm un șir arbitrar $x_n\to 0, x_n>0$, când $f(x_n)=-2$. Deci $l_d(0)=-2$.

Cum $l_s(0)=l_d(0)=-2$, conform teoremei rezultă că există limita funcției f în $a=0$ și $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-2$.

2) Procedând ca la 1) rezultă $l_s(0)=l_d(0)=\infty$. Deci $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$.

3) $l_s(3)=11\ne l_d(3)=16$. Deci funcția f nu are limită în $a=3$.

4) $l_s(-2)=l_d(-2)=\infty$. Deci $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\infty$.

5) Fie $x_n\to 0, x_n\ne 0$. Atunci $f(x_n)=x_n\sin\frac{1}{x_n}$.

Din $0<\left|x_n\sin\frac{1}{x_n}\right|\le|x_n|$, via criteriul majorării, rezultă $f(x_n)\to 0$. Deci $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

6) În acest caz pentru existența limitei în $a=0$ trebuie arătat că $\forall(x_n), x_n\to 0$ să rezulte $f(x_n)\to l$. Dacă $x_n\in\mathbb{Q}, \forall n\in\mathbb{N}^*$ (sau de la un rang $n_0, n\ge n_0$) cu $x_n\to 0$, atunci $f(x_n)=x_n^2\to 0$.

Dacă $x_n\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}, \forall n\in\mathbb{N}^*$ (sau pentru $n\ge n_0$), $x_n\to 0$, atunci $f(x_n)=0\to 0$. În fine pentru un șir $x_n\to 0$ pentru care există o infinitate de termeni $x'_n\in\mathbb{Q}$ și o infinitate de termeni $x''_n\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, atunci $f(x'_n)=(x'_n)^2\to 0$ și $f(x''_n)=0\to 0$, ceea ce arată că $f(x_n)\to 0$.

Deci pentru orice $x_n\to 0$, rezultă $f(x_n)\to 0$, adică $l=0$, ceea ce arată că f are limită în $a=0$.

Exerciții propuse

1. Să se stabilească dacă următoarele funcții $f:E\to\mathbb{R}$ au limită în punctul a indicat:

1) $f(x)=\begin{cases}x+\frac{|x|}{x}, x\ne 0\\ 1, x=0\end{cases}, a=0$; **2)** $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1}, x<1\\ 2x, x\ge 1\end{cases}, a=1$; **3)** $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{|x|}, x\ne 0\\ 0, x=0\end{cases}, a=0$;

4) $f(x)=\begin{cases}x^2, x\le 1\\ 2x-1, x\ge 1\end{cases}, a=1$; **5)** $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-2x}{x}, x<0\\ x-2, x\ge 0\end{cases}, a=0$; **6)** $f(x)=\frac{x^2+|x|}{|x|}, a=0$;

7) $f(x)=\frac{x+1}{x^2-4}, a=2$; **8)** $f(x)=\frac{x}{(x-1)^2}, a=1$; **9)** $f(x)=(x-3)[x], a=3$;

10) $f(x)=[x]+[-x], a=2$; **11)** $f(x)=x+3x\sin x, a=\infty$; **12)** $f(x)=\begin{cases}x^2-x, x\in\mathbb{Q}\\ 2, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}, a\in\{1,2\}$..

2. Să se determine constanta $\alpha\in\mathbb{R}$ pentru care următoarele funcții $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ au limită în punctul a indicat:

1) $f(x)=\begin{cases}\alpha x+1, x\le 1\\ x+3, x>1\end{cases}, a=1$; **2)** $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+\alpha^2}, x\ge 0\\ 2x+1, x<0\end{cases}, a=0$;

3) $f(x)=\begin{cases}3x+2\alpha, x\le 1\\ \alpha x-1, x>1\end{cases}, a=1$; **4)** $f(x)=\begin{cases}x^2, x<2\\ \frac{x^2-\alpha}{x-2}, x\ge 2\end{cases}, a=2$.

2. Criteriul majorării

Ca și în cazul șirurilor când cunoașterea limitei unui șir permite determinarea limitei altui șir (criteriul majorării) și în cazul funcțiilor cunoașterea limitei unei funcții într-un punct permite calcularea limitei altei funcții în același punct utilizând un criteriu asemănător.

Teoremă. (Criteriul majorării) Fie $f,g:E\to\mathbb{R}$ două funcții și a un punct de acumulare pentru E și V o vecinătate a lui a. Dacă $|f(x)-l|\le g(x)$, $\forall x\in V\cap E, x\ne a$ și dacă $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$.

Demonstrație. Fie $x_n \to a, x_n \in V \cap E$ pentru $n \geq n_v, n_v \in \mathbb{N}, x_n \neq a$. Deci $|f(x_n) - l| \leq g(x_n)$, $\forall n \geq n_v$. Aplicând criteriul majorării de la șiruri se deduce că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$, adică $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, și atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$. ■

Exemple. 1) **Să se arate că** $\boxed{\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a, a \in \mathbb{R}}$.

R. Avem $|\sin x - \sin a| = 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\left|\cos\frac{x+a}{2}\right| \leq 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \leq 2\left|\frac{x-a}{2}\right| = |x-a|$, unde am folosit $|\sin x| \leq |x|$ și $|\cos x| \leq 1$. Așadar $|\sin x - \sin a| \leq |x-a| = g(x)$.

Făcând x să tindă la a rezultă $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ și prin urmare $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$.

Aplicație. Avem: $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = \sin 0 = 0$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = \sin\frac{\pi}{2} = 1$; $\lim\limits_{x\to\pi} \sin x = \sin\pi = 0$.

2) **Să se arate că** $\boxed{\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a, a \in \mathbb{R}}$.

R. **Procedând ca mai sus avem:**

$$|\cos x - \cos a| = 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\left|\sin\frac{x+a}{2}\right| \leq 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \leq 2\left|\frac{x-a}{2}\right| = |x-a|.$$

Pentru $x \to a$ **rezultă** $\cos x \to \cos a$. **Deci** $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$.

Aplicație. Avem $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \cos x = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x = \cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Limitele funcțiilor **sin** și **cos** într-un punct oarecare $a \in \mathbb{R}$ se obțin înlocuind direct pe x cu a.

Funcțiile **sin** și **cos** nu au limită la $\pm\infty$.

Probleme propuse

Să se calculeze limitele următoare:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{e^x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a\sin\alpha x + b\cos\beta x}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1}\sin x$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x}\right)$.

Utilizând criteriul majorării la $\pm\infty$ pentru șiruri se pot formula criterii asemănătoare pentru limite de funcții.

Teoremă. (Criteriul majorării la $+\infty$) Fie $f, g : E \to \mathbb{R}$, a un punct de acumulare pentru E și V o vecinătate a lui a. Dacă $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in V \cap E, x \neq a$ și $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

(Criteriul majorării la $-\infty$) Fie $f, g : E \to \mathbb{R}$, a un punct de acumulare pentru E și V o vecinătate a lui a. Dacă $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in V \cap E, x \neq a$ și $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Exerciții rezolvate

Să se calculeze limitele: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+x+1\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+x+1\right)$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin x)$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}(2+\sin x)\ln x$.

R. 1) **Avem** $x^2+x+1 > x$ **(adevărată** $\forall x \in \mathbb{R}$**). Cum** $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$**, rezultă conform criteriului majorării că** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+x+1\right) = \infty$.

2) **Are loc inegalitatea** $x^3+x+1 < x^3$ **(dacă** $x < -1$**; ori** $-\infty$ **este punct de acumulare pentru** $(-\infty,-1)$**).**

Pe de altă parte $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ **și deci** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+x+1\right) = -\infty$.

3) **Este evidentă inegalitatea** $x+\sin x \geq x-1$ **(deoarece** $\sin x \in [-1,1]$**).**

Cum $\lim\limits_{x\to\infty}(x-1) = \infty$**, se obține** $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin x) = \infty$.

4) $(2+\sin x)\ln x \geq (2-1)\ln x = \ln x$**, pentru** $x \geq 1$.

Cum $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$ **rezultă că limita dată este egală cu** ∞.

Exerciții propuse

Să se calculeze limitele:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3x^2+x\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^2+x\right)$; 3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+3x+5\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-3x^2+x\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(5x^3+2x+3\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\cos x)$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}(3+\sin x)e^x$.

3. Trecerea la limită în inegalități

Teoremă. Fie $f, g : E \to \mathbb{R}$, a un punct de acumulare pentru E și V o vecinătate a lui a.
Dacă $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in V \cap E, x \neq a$ și dacă f și g au limite în punctul a în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Demonstrație. Fie $x_n \in V \cap E, x_n \neq a, x_n \to a$. Atunci $f(x_n) \leq g(x_n), \forall n$.

Ținând seama de teorema de trecere la limită în inegalități pentru șiruri rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \leq \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)$.

Cum șirul (x_n) a fost arbitrar se deduce $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$. ■

Corolar. Fie $f: E \to \mathbb{R}$, $a \in E'$, f are limită în a și $V \in \vartheta(a)$.

Dacă $f(x) \geq 0, \forall x \in V \cap E, x \neq a$, atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x) \geq 0$.

Dacă $f(x) \leq 0, \forall x \in V \cap E, x \neq a$, atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq 0$.

Dacă $\alpha \leq f(x) \leq \beta, \forall x \in V \cap E, x \neq a$, atunci $\alpha \leq \lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \beta$.

Are loc următoarea

Teoremă (a „Cleștelui" sau a „celor doi jandarmi"). Fie trei funcții $f, g, h: E \to \mathbb{R}$, a un punct de acumulare pentru $E (a \in E')$ și V o vecinătate a lui a. Dacă

1) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall x \in V \cap E, x \neq a$;

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$,

atunci g are limită în a și mai mult $\lim\limits_{x\to a} g(x) \to l$.

Schematic:
$$\begin{array}{ccccc} f(x) & \leq & g(x) & \leq & h(x) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ l & & l & & l \end{array}.$$

Demonstrație. Fie $x_n \in V \cap E, x_n \neq a, x_n \to a$. Atunci din 1) rezultă $f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n)$. Ținând cont de 2) și de criteriul „cleștelui" pentru șiruri se deduce că $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = l$.

Cum șirul (x_n) a fost arbitrar rezultă $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$. ■

Exerciții rezolvate

Să se calculeze limitele: a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{[x]}{x}$, **unde** $[x]$ **este partea întreagă a numărului real** x**;**

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$.

R. a) Avem din definiția părții întregi: $x-1 < [x] \leq x$ (1).

Pentru $x > 0 (x \to \infty)$ **din (1) rezultă:** $\frac{x-1}{x} < \frac{[x]}{x} \leq 1$. **Cum** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-1}{x} = 1$ **și** $\lim\limits_{x\to\infty} 1 = 1$,

aplicând criteriul „cleștelui" se obține $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{[x]}{x} = 1$.

b) Au loc inegalitățile $\frac{x-1}{x} \leq \frac{x+\sin x}{x} \leq \frac{x+1}{x}$, deoarece $\sin x \in [-1,1]$. Cum

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = 1$, via criteriul „cleștelui" rezultă $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} = 1$.

c) Din definiția părții întregi rezultă inegalitățile: $\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x}, x \neq 0$ (*).

Dacă $x > 0$, prin înmulțirea inegalităților de mai sus cu x rezultă $1 - x < x\left[\frac{1}{x}\right] \leq 1$.

Luând limita după $x \to 0, x > 0$ avem $\lim\limits_{x\searrow 0} (1-x) = 1 = \lim\limits_{x\searrow 0} 1$.

Conform criteriului „cleștelui" rezultă $\lim\limits_{x\searrow 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1, (1)$.

Dacă $x < 0$, din (*) se obține (prin înmulțire cu x): $1 - x > x\left[\frac{1}{x}\right] \geq 1$.

Dar $\lim\limits_{x\nearrow 0} (1-x) = 1 = \lim\limits_{x\nearrow 0} 1$. Acum același criteriu al cleștelui ne dă $\lim\limits_{x\nearrow 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$ (2). Din (1) și (2) avem că $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$.

Exerciții propuse

1.Să se calculeze limitele (dacă există):

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{[x]}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\left[\frac{1}{x^2}\right]$; c) $\lim\limits_{x\searrow -2} \frac{x^2+2x}{7}\left[\frac{5}{x^2-x-6}\right]$; d) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-4x+3\right)\left[\frac{1}{x^2-3x+2}\right]$;

e) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\left(\left[\frac{1}{x^2}\right]+\left[\frac{2}{x^2}\right]+\ldots+\left[\frac{k}{x^2}\right]\right), k \in \mathbb{N}^*$; f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{[x]+[2x]}{x}$; g) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{[x]+[2x]+\ldots+[kx]}{x}, k \in \mathbb{N}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+\cos x}{x^2}$; i) $\lim\limits_{x\to 0} x^4\left(1+2+3+\ldots+\left[\frac{1}{x^2}\right]\right)$; j) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\left[x^3+2x\right]}{[x]^3+2[x]}$.

2.Plecând de la inegalitatea $x \leq e^x - 1 \leq \frac{x}{1-x}, x > -1$ **să se deducă** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

3.Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **cu proprietatea** $|f(x)-x| \leq x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. **Arătați că** $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

4. Produsul dintre o funcție mărginită și o funcție de limită zero

Un alt rezultat important care permite calculul limitei unui produs de funcții este dat de următoarea:

Teoremă (Criteriu). Fie $f,g:E\to\mathbb{R}$ două funcții, $a\in E'$ (punct de acumulare), $V\in\vartheta(a)$ cu proprietățile:

1) $|f(x)|\le M, \forall x\in V\cap E, M>0$ (f **mărginită** pe o vecinătate a lui a)

2) $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$,

Atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=0$.

Limita produsului dintre o **funcție mărginită** și o funcție **de limită zero** este **zero**.

Demonstrație. Fie (x_n) un șir din $V\cap E, x_n\neq a$. Atunci $|f(x_n)|\le M, \forall n$ și $g(x_n)\underset{n}{\to}0$. Conform criteriului de la șiruri rezultă $f(x_n)g(x_n)\underset{n}{\to}0$. Cum (x_n) a fost un șir arbitrar se obține $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=0$. ■

Altfel. Se aplică criteriul „cleștelui" inegalității $0\le|f(x)g(x)|\le M|g(x)|$.

Exerciții rezolvate

Să se calculeze limitele: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cos x$ **; 2)** $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ **; 3)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{-x^3+5x+1}\sin x$.

R. 1) Fie $f(x)=\cos x$, **pentru care** $|f(x)|\le 1$, **iar** $g(x)=\frac{1}{x}\to 0$ **dacă** $x\to\infty$.

Conform criteriului de mai sus $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cos x=0$.

2) $f(x)=\sin\frac{1}{x}, x\neq 0$, $|f(x)|\le 1$, **iar** $g(x)=x\to 0$ **dacă** $x\to 0$. **Așadar** $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$.

Altfel, pentru această limită se putea aplica criteriul „cleștelui" funcțiilor din inegalitățile $0\le\left|x\sin\frac{1}{x}\right|=|x|\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|$.

3) Cum $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{-x^3+5x+1}=0$ **și** $|\sin x|\le 1$, **deducem că limita este egală cu zero.**

Exerciții propuse

Să se calculeze limitele: 1) $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}$ **; 2)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x^2+1}$ **; 3)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^3+1}\cos x$ **;**

4) $\lim\limits_{x\to\infty} 3^{-x}(1+\sin x+\cos x)$ **; 5)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt[3]{x+1}-\sin\sqrt[3]{x}\right)$.

3.5. LIMITELE FUNCȚIILOR ELEMENTARE

Pentru ca operațiile cu limite de funcții să devină efective este nevoie de cunoașterea procedurii de calcul a limitelor funcțiilor elementare. Vom da regula de calcul pentru limita funcției, în general, în două cazuri:

1) **când** a **este punct de acumulare finit;**

2) **când** a **este punct de acumulare infinit** (dacă există).

Următoarele funcții sunt considerate funcții elementare:

1) **funcția polinomială**; 2) **funcția rațională**; 3) **funcția radical**; 4) **funcția putere**; 5) **funcția exponențială**; 6) **funcția logaritmică**; 7) **funcțiile trigonometrice directe** (sin, cos, tg, ctg); 8) **funcțiile trigonometrice inverse** (arcsin, arccos, arctg, arcctg); 9) **orice funcție obținută din cele de mai sus prin aplicarea** succesivă, de un număr finit de ori, a operațiilor algebrice, a operației de compunere și a operației de inversare.

Observație. Dacă domeniul de definiție al unei funcții elementare nu este precizat, atunci se subînțelege că este format din acele puncte x **pentru care au sens operațiile prin care este definită funcția. Acesta este domeniul maxim de definiție al funcției.**

Am stabilit la capitolul de șiruri că dacă $f:E\to\mathbb{R}$ este o funcție elementară, $a\in E$ și (x_n) un șir, $x_n\in E$, $\forall n, x_n\to a$, atunci

1) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)$

Limita comută cu o funcție elementară.

---

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

Limita unei funcții elementare într-un punct de acumulare finit, din domeniul de definiție, se obține înlocuind pe x **cu** a.

1. Limita funcției constante

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=c, c\in\mathbb{R}$.

Atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c, \forall a\in\overline{\mathbb{R}}$.

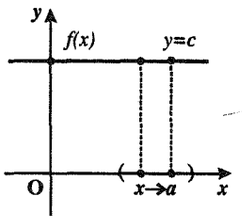


Fig.13

Demonstrație. Într-adevăr dacă $x_n\to a, x_n\neq a$, atunci $f(x_n)=c\to c$. Deci $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$ (Fig.13).

Exemple. $\lim\limits_{x\to 5} 3=3$; $\lim\limits_{x\to\infty}(-5)=-5$; $\lim\limits_{x\to-\infty} 1=1$.

2. Limita funcției polinomiale

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+...+a_1x+a_0, a_i\in\mathbb{R}. i=\overline{0,k}, a_k\neq 0$.

1) Punctul de acumulare a este finit

Fie $a\in\mathbb{R}$ şi $x_n\to a, x_n\in\mathbb{R}, x_n\neq a$. Atunci

$f(x_n)=a_kx_n^k+a_{k-1}x_n^{k-1}+...+a_1x_n+a_0\to a_ka^k+a_{k-1}a^{k-1}+...+a_1a+a_0=f(a)$

(S-au avut în vedere operațiile cu şiruri convergente).

Cum şirul (x_n) a fost ales arbitrar, rezultă $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Regulă. Limita unei funcții polinomiale într-un punct de acumulare finit a, se obține înlocuind x cu a: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Exemple. **Să se calculeze limitele:**

a) $\lim\limits_{x\to 1}(-3x^2+2x+5)$; **b)** $\lim\limits_{x\to -3}(5x^2+6x)$; **c)** $\lim\limits_{x\to 2}(2x^3-6x+5)$.

R. a) Avem $\lim\limits_{x\to 1}(-3x^2+2x+5)=-3\cdot 1^2+2\cdot 1+5=-3+2+5=4$.

b) $\lim\limits_{x\to -3}(5x^2+6x)=5(-3)^2+6(-3)=5\cdot 9-18=45-18=27$.

c) $\lim\limits_{x\to 2}(2x^3-6x+5)=2\cdot 2^3-6\cdot 2+5=16-12+5=9$.

Exerciții propuse

Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to 0}(3x^6+5x^4-3x^3)$; **b)** $\lim\limits_{x\to -2}(-3x^2+5x+6)$; **c)** $\lim\limits_{x\to 3}(x^3-2x^2+6)$.

2) Punctul de acumulare a este infinit

Fie $a=\pm\infty$. În acest caz aducem funcția polinomială la forma

$$f(x)=x^k\left(a_k+\frac{a_{k-1}}{x}+...+\frac{a_1}{x^{k-1}}+\frac{a_0}{x^k}\right).$$

Pentru $x\to\pm\infty, \frac{a_i}{x^{k-i}}\to 0$. Deci $f(x)\to(\pm\infty)^k a_k$.

$$\text{Deci } \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty\cdot a_k=\begin{cases}\infty, \text{dacă } a_k>0\\ -\infty, \text{dacă } a_k<0\end{cases};$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=(-\infty)^k a_k=\begin{cases}\infty, \text{dacă } (a_k<0 \text{ şi } k \text{ impar}) \text{ sau } (a_k>0 \text{ şi } k \text{ par})\\ -\infty, \text{în rest.}\end{cases}$$

Aşadar avem următoarea

Regulă. Limita unei funcții polinomiale la $\pm\infty$ este aceeaşi cu limita termenului de grad maxim $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} a_kx^k$.

În Fig. 14 sunt prezentate două situații grafice. Reprezentați grafic şi alte cazuri.

Exemple. **Să se calculeze limitele:**

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(2006x^{2007}+x^2-36x+1)$;**b)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^3+2x^2-x)$; **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}(-5x^5-x^4+3)$;

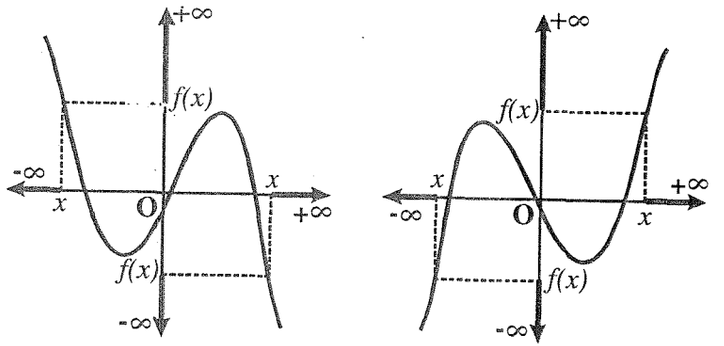
d) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4+5)$.

R a) $\lim\limits_{x\to\infty}(2006x^{2007}+x^2-36x+1)=\lim\limits_{x\to\infty}2006x^{2007}=\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^3+2x^2-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^3)=-3(-\infty)^3=-3(-\infty)=\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}(-5x^5-x^4+3)=\lim\limits_{x\to\infty}(-5x^5)=-5(\infty)^5=-5\cdot\infty=-\infty$.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4+5)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4)=(-\infty)^4=\infty$.



a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

Fig. 14

Exerciții propuse

Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(-3x^4+5x+1)$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-2000)$; **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2+3x-10)$; **d)** $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3+6x^2+3)$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty}(-3x^5+4x^3+1)$.

Reprezentați grafic comportarea funcțiilor în jurul punctelor de acumulare.

3. Limita funcției raționale

Fie $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $f:\mathbb{R}-\{x|Q(x)=0\}\to\mathbb{R}$, unde P și Q sunt funcții polinomiale,

$P(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+...+a_1x+a_0$, $Q(x)=b_lx^l+b_{l-1}x^{l-1}+...+b_1x+b_0$,

$a_i,b_j\in\mathbb{R}, a_k,b_l\neq 0$.

1) **Cazul: a punct de acumulare finit $(a\in\mathbb{R})$**

Se disting subcazurile:

1.1.) $Q(a)\neq 0$, deci a nu este rădăcină pentru numitor.

Fie $x_n\to a, x_n\neq a$. Atunci $f(x_n)=\dfrac{P(x_n)}{Q(x_n)}\to\dfrac{P(a)}{Q(a)}=f(a)$, ceea ce arată că $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

Deci avem următoarea

Regulă. Limita funcției raționale în punct de acumulare finit, în care nu se anulează numitorul, este egală cu valoarea ei în acel punct.

Exemple. **Să se calculeze limitele: a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+1}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-3}{x+5}$; c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5}{1-x}$.**

R. a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{1-1}{1+1}=\dfrac{0}{2}=0$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-3}{x+5}=\dfrac{0-3}{0+5}=-\dfrac{3}{5}$; c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5}{1-x}=\dfrac{4-5}{1-2}=\dfrac{-1}{-1}=1$.

Exerciții propuse

Să se calculeze limitele: a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+1}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^2}{x+1}$; c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}$.

1.2.) $Q(a)=0$, adică a este rădăcină pentru numitor.

Discuția pentru acest caz este mai complexă. Vom ilustra această situație prin diferite exemple, arătând cum procedăm practic în calcularea limitelor. Dacă, de exemplu, și numărătorul se anulează în $a, P(a)=0$, atunci se efectuează mai întâi simplificarea fracției prin $x-a(x\neq a)$ după care se vede dacă numitorul fracției simplificate îl mai are pe a ca rădăcină sau nu.

Exemple. **Să se calculeze limitele (dacă există):**

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$; b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x+1}$; c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{(x+1)^2}$; d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^2-1}$; e) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15}$.

R. a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\left(\text{caz de nedeterminare }\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-2}=-2$.

b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x+1}$ **nu există deoarece limita la stânga în $a=-1$ este egală cu**

$l_s(-1)=\lim\limits_{x\nearrow -1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{0-}=-\infty$ **în timp ce limita la dreapta este** $l_d(-1)=\lim\limits_{x\searrow -1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{0_+}=\infty$.

(Comportarea graficului funcției în jurul lui -1 este redată în Fig.15)

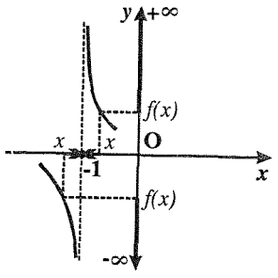


Fig.15

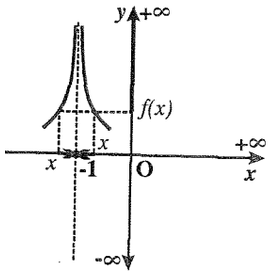


Fig.16

Se spune că dreapta verticală $x=-1$ este asimptotă verticală la stânga și la dreapta pentru funcție.

Din $l_s(-1)\neq l_d(-1)$ se deduce că nu există limita în $a=-1$.

Așadar, dacă a este punct de acumulare finit și este rădăcină a numitorului, dar nu este rădăcină și pentru numărător, atunci se calculează limitele laterale în a.

c) Să arătăm acum că limita există.

Calculăm ca mai sus limitele laterale și avem:

$l_s(-1)=\lim\limits_{x\nearrow -1}\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{0_+}=\infty$, $l_d(-1)=\lim\limits_{x\searrow -1}\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{0_+}=\infty$.

Deoarece $l_s(-1)=l_d(-1)=\infty$ avem că și $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{(x+1)^2}=\infty$ **($x=-1$, asimptotă verticală).**

(Comportarea funcției în jurul lui 1 este redată în Fig.16)

d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^2-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x-1}=-\dfrac{1}{2}$.

e) Numitorul $x^2+8x+15$ se anulează pentru $a=-3$, în timp ce numărătorul nu se anulează $(-3)^2+2(-3)-15=-12\neq 0$.

În această situație se calculează limitele laterale în $a=-3$.

Avem: $l_s(-3)=\lim\limits_{x\nearrow -3}\dfrac{x^2+2x-15}{(x+3)(x+5)}=\dfrac{-12}{(0_-)\cdot 2}=\dfrac{12}{0_+}=+\infty$ **și**

$l_d(-3)=\lim\limits_{x\searrow -3}\dfrac{x^2+2x-15}{(x+3)(x+5)}=\dfrac{-12}{0_+(2)}=\dfrac{-12}{0_+}=-\infty$.

Cum $l_s(-3) \neq l_d(-3)$ rezultă că limita respectivă nu există.

Dreapta $x=-1$ este asimptotă verticală la stânga și la dreapta, pentru funcție.

Exerciții propuse

Să se calculeze limitele (dacă există): a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+x-1}{x^3+1}$;

c) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15}$; d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+1}{\left(x^2-4\right)^2}$; e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+4}$; f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x^2-1\right)^2}{x^2-2x+1}$; g) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$.

Reprezentați grafic comportamentul funcțiilor în jurul punctelor de acumulare.

2) Cazul: a punct de acumulare infinit $(a=\pm\infty)$

În acest caz avem pentru f scrierea (ca la șiruri definite printr-o funcție rațională):

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^k\left(a_k+\dfrac{a_{k-1}}{x}+\ldots+\dfrac{a_1}{x^{k-1}}+\dfrac{a_0}{x^k}\right)}{x^l\left(b_l+\dfrac{b_{l-1}}{x}+\ldots+\dfrac{b_1}{x^{l-1}}+\dfrac{b_0}{x^l}\right)};$$

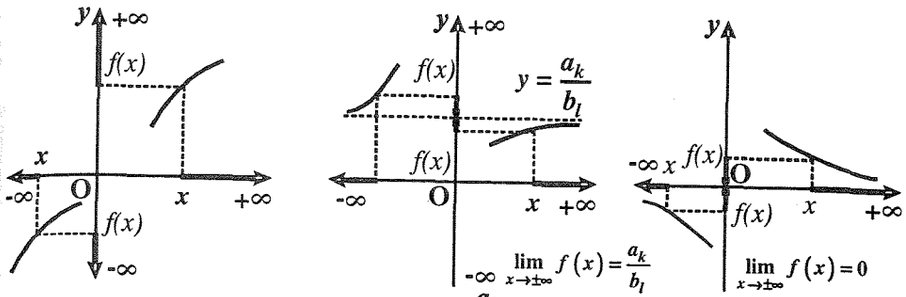
Termenii care conțin pe $\dfrac{1}{x}$ la diferite puteri au limita zero.

Deci

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\begin{cases}\dfrac{a_k}{b_l}(\pm\infty)^{k-l}, \text{ pentru } k>l \text{ (gradul numărătorului > gradul numitorului)}\\ \dfrac{a_k}{b_l}, \text{ pentru } k=l \begin{pmatrix}\text{gradul numărătorului =}\\ \text{= gradul numitorului}\\ \dfrac{a_k}{b_l}=\text{câtul coeficienților}\\ \text{termenilor de grad maxim}\end{pmatrix}\\ 0, \text{ pentru } k<l. \text{ (gradul numărătorului < gradul numitorului)}\end{cases}$$

Regulă . Pentru limita funcției raționale la $\pm\infty$ se compară gradul numărătorului cu gradul numitorului.

Comportarea graficului unei astfel de funcții este redat în Fig. 17, pentru câteva cazuri. Reprezentați și alte situații.



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

a)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\dfrac{a_k}{b_l}$

$y=\dfrac{a_k}{b_l}$ asimptotă orizontală

b)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$

$y=0$ asimptotă orizontală

c)

Fig. 17

Exemple . Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x^2-3x}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^3+2x+6}{3x^2-5x}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-5}{2x^3+3x}$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-5x^4+x^3-x+2}{4x^4+3x}$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n+2x}{-3x^3+5x-9}, n\in\mathbb{N}$.

R . a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x^2-3x}=0$ **(gradul numărătorului < gradul numitorului).**

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^3+2x+6}{3x^2-5x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{1}{3}\right)x^{3-2}=\left(-\dfrac{1}{3}\right)(-\infty)=+\infty$ **(gradul numărătorului > gradul numitorului).**

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-5}{2x^3+3x}=\dfrac{6}{2}=3$ **(gradul numărătorului = gradul numitorului).**

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-5x^4+x^3-x+2}{4x^4+3x}=-\dfrac{5}{4}$. **e)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n+2x}{-3x^3+5x-9}=\begin{cases}-\infty, n>3\\ -\dfrac{1}{3}, n=3\\ 0, n<3\end{cases}$.

Temă. Reprezentați grafic comportarea funcțiilor în jurul punctelor de acumulare.

Exerciții propuse

Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x}{3x^2-5x+1}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-x+1}{x^3+1}$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-x}{x+1}$; d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x^2}{x^2-1}$; e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^2}{x^2+3x}$;

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+3}{2x^2-x}$; g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-5x+6}{2x^2-6x}$; h) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+1}{x^\alpha+1}, \alpha\in\mathbb{R}$; i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4x^3+2x}{5x^\alpha+3}, \alpha\in\mathbb{N}^*$.

Reprezentați grafic comportarea funcțiilor în jurul punctelor de acumulare.

4. Limita funcției radical

1) Radical de ordin par.

Pentru $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $f(x)=\sqrt[2k]{x}$, $k\in\mathbb{N}^*$ și $a\in[0,\infty)$ punct de acumulare, avem $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[2k]{x}=\sqrt[2k]{a}$. Dacă $a=\infty$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[2k]{x}=\infty$.

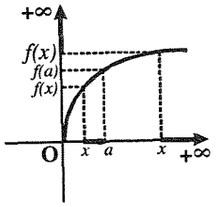


Fig. 18

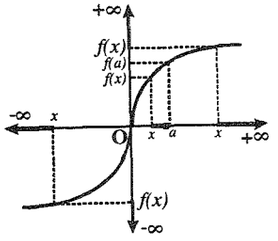


Fig. 19

Comportarea graficului funcției în jurul punctului de acumulare este dată în Fig.18.

2) Radical de ordin impar

Pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[2k+1]{x}$, $k\in\mathbb{N}^*$ și $a\in\mathbb{R}$ avem $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[2k+1]{x}=\sqrt[2k+1]{a}$

iar dacă $a=-\infty$, atunci $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[2k+1]{x}=-\infty$.

În fine pentru $a=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[2k+1]{x}=\infty$.

Comportarea graficului funcției în jurul punctelor de acumulare este ilustrată în Fig.19.

Exemple. **Să se calculeze limitele:**

a) $\lim\limits_{x\to4}\sqrt{x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to-27}\sqrt[3]{x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[4]{x}$; **d)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[5]{x}$.

R. a) $\lim\limits_{x\to4}\sqrt{x}=\sqrt{4}=2$; **b)** $\lim\limits_{x\to-27}\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{-27}=-3$; **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[4]{x}=\infty$; **d)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[5]{x}=-\infty$.

Exerciții propuse

Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to9}\sqrt{x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to-32}\sqrt[5]{x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x}$; **d)** $\lim\limits_{x\to81}\sqrt[4]{x}$; **e)** $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x}$.

Reprezentați grafic comportarea funcțiilor în jurul punctelor de acumulare.

5. Limita funcției exponențiale

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, $f(x)=b^x$, $b>0$, $b\neq1$.

Dacă $0<b<1$, atunci:

1) pentru $a\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a}b^x=b^a$ (limita este valoarea funcției în punct);

2) pentru $a=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}b^x=\infty$;

3) pentru $a=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}b^x=0$.

Comportarea graficului funcției în jurul punctelor de acumulare este redată în Fig.20.

Dacă $b>1$, atunci:

1) pentru $a\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a}b^x=b^a$ (limita este valoarea funcției în punct);

2) pentru $a=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}b^x=0$;

3) pentru $a=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}b^x=\infty$.

Comportarea graficului funcției în jurul punctelor de acumulare este redată în Fig.21.

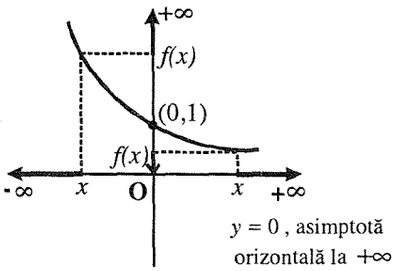


Fig. 20

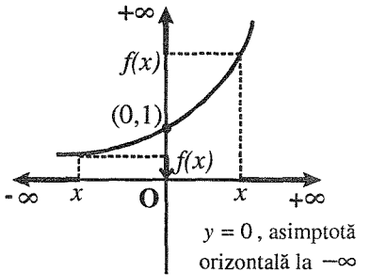


Fig. 21

Exemple. **Să se calculeze limitele: a)** $\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{1}{2}\right)^x$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x$; **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^x$; **d)** $\lim\limits_{x\to\infty}4^x$;

e) $\lim\limits_{x\to3}2^x$; **f)** $\lim\limits_{x\to-\infty}5^x$.

R. **a)** $\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{1}{2}\right)^x=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x=0$ (baza $b=\frac{1}{3}\in(0,1)$);

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^x=\infty$ (baza $b=\frac{1}{5}\in(0,1)$); d) $\lim\limits_{x\to\infty}4^x=\infty$ (baza $b=4>1$); e) $\lim\limits_{x\to3}2^x=2^3=8$;

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}5^x$ (baza $b=5>1$).

Exerciții propuse

Să se calculeze limitele: a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3}\right)^x$; b) $\lim\limits_{x\to-2}\left(\frac{1}{2}\right)^x$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x$; d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$; e) $\lim\limits_{x\to-\infty}6^x$;

f) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}9^x$ .Reprezentați grafic comportarea funcțiilor în jurul punctelor de acumulare.

6. Limita funcției logaritmice

Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_b x, b>0, b\neq1$.

Dacă $0<b<1$, atunci:

1) pentru $a=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=\infty$;

2) pentru $a\in(0,\infty)$, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$;

3) pentru $a=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$.

Comportarea graficului funcției în jurul punctelor de acumulare este dată în Fig.22.

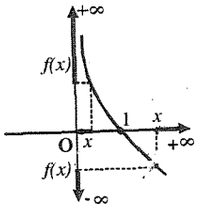
Dacă $b>1$, atunci:

1) pentru $a=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=-\infty$;

2) pentru $a\in(0,\infty)$, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$;

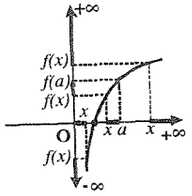
3) pentru $a=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

Comportarea graficului funcției în jurul punctelor de acumulare este dată în Fig.23.



$x=0$, asimptotă verticală

Fig.22



$x=0$, asimptotă verticală

Fig.23

Exemple . Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\log_{\frac{1}{2}}x$; b) $\lim\limits_{x\to3}\log_{\frac{1}{3}}x$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\log_{\frac{1}{2}}x$; d) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\lg x$; e) $\lim\limits_{x\to\infty}\ln x$; f) $\lim\limits_{x\to e^2}\ln x$; g) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\log_{\frac{1}{3}}x$.

R. a) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\log_{\frac{1}{2}}x=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2=2$; b) $\lim\limits_{x\to3}\log_{\frac{1}{3}}x=\log_{\frac{1}{3}}3=-1$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\log_{\frac{1}{2}}x=-\infty$ (baza $b=\frac{1}{2}<1$); d) $\lim\limits_{x\searrow0}\lg x=-\infty$ (baza $b=10>1$); e) $\lim\limits_{x\to\infty}\ln x=\infty$ (baza $b=e>1$);

f) $\lim\limits_{x\to e^2}\ln x=\ln e^2=2$; g) $\lim\limits_{x\searrow0}\log_{\frac{1}{3}}x=\infty$ (baza $b=\frac{1}{3}<1$).

Exerciții propuse

Să se calculeze limitele: a) $\lim\limits_{x\to3}\log_{\frac{1}{9}}x$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\log_{\frac{1}{2}}x$; c) $\lim\limits_{x\searrow0}\log_{\frac{1}{5}}x$; d) $\lim\limits_{x\to e^3}\ln x$; e) $\lim\limits_{x\searrow0}\log_5 x$;

f) $\lim\limits_{x\to100}\lg x$.

Reprezentați grafic comportarea funcțiilor în jurul punctelor de acumulare.

7. Limitele funcțiilor trigonometrice directe

a) **Funcția sinus** $\sin:\mathbb{R}\to[-1,1]$.

1) Dacă **punctul de acumulare este finit**, adică $a\in\mathbb{R}$, atunci am văzut la 3.4.2. (exemplul 1) că $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$.

Regulă . Limita funcției sin într-un punct de acumulare finit $a\in\mathbb{R}$ se obține înlocuind pe x cu a.

2) Dacă $a=\pm\infty$, atunci f nu are limită (în 3.3, observația 4)).

Exemple . 1) $\lim\limits_{x\to0}\sin x=\sin0=0$; 2) $\lim\limits_{x\to1}\sin x=\sin1$; 3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) **Funcția cosinus** $\cos:\mathbb{R}\to[-1,1]$.

1) Dacă **punctul de acumulare este finit**, adică $a\in\mathbb{R}$, atunci am văzut la 3.4.2. (exemplul 2)) că $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$.

Deci, are loc următoarea

Regulă . Limita funcției cos într-un punct de acumulare finit $a\in\mathbb{R}$ se obține înlocuind pe x cu a.

2) Dacă $a = \pm\infty$, atunci f nu are limită (demonstrați !).

Exemple. **1)** $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$; **2)** $\lim\limits_{x\to \pi} \cos x = \cos \pi = -1$; **3)** $\lim\limits_{x\to 3} \cos x = \cos 3$.

c) **Funcția tangentă** $\operatorname{tg} : \mathbb{R} - \left\{ (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \middle| k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$.

1) Dacă a aparține domeniului de definiție, atunci $\lim\limits_{x\to a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$.

Regulă. Limita funcției tg într-un punct de acumulare din domeniul de definiție se obține înlocuind pe x cu a.

2) Dacă $a = \dfrac{\pi}{2}$, atunci $\lim\limits_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = +\infty$; $\lim\limits_{x \searrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = -\infty$.

Comportarea graficului funcției în jurul punctelor de acumulare este redat în Fig.24.

Exemple. **1)** $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 0 = 0$; **2)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{4} = 1$; **3)** $\lim\limits_{x \nearrow \frac{3\pi}{2}} \operatorname{tg} x = \infty$; **4)** $\lim\limits_{x \searrow \frac{3\pi}{2}} \operatorname{tg} x = -\infty$.

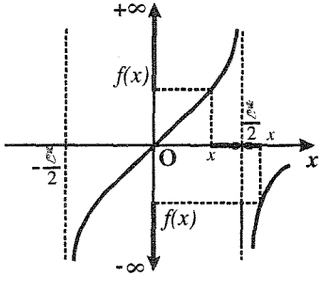


Fig.24

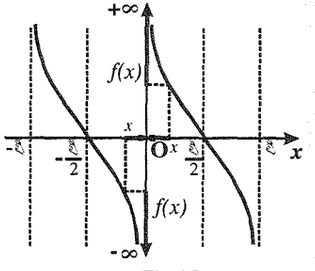


Fig.25

d) **Funcția cotangentă** $\operatorname{ctg} : \mathbb{R} - \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$.

1) Dacă punctul de acumulare a este din domeniul de definiție al funcției, atunci

$\lim\limits_{x\to a} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} a$.

Deci, are loc următoarea

Regulă. Limita funcției ctg într-un punct de acumulare din domeniul de definiție se obține înlocuind pe x cu a.

$\lim\limits_{x \nearrow 0} \operatorname{ctg} x = -\infty$; $\lim\limits_{x \searrow 0} \operatorname{ctg} x = \infty$

2) Dacă $a = 0$, atunci

Comportarea graficului funcției în jurul punctelor de acumulare este redat în Fig.25.

Exemple. **1)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} \dfrac{\pi}{4} = 1$; **2)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} \dfrac{\pi}{2} = 0$; **3)** $\lim\limits_{x \nearrow \pi} \operatorname{ctg} x = -\infty$.

8. Limitele funcțiilor trigonometrice inverse

a') **Funcția arcsinus** $\arcsin : [-1,1] \to \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Se demonstrează că dacă $a \in [-1,1]$, atunci $\lim\limits_{x\to a} \arcsin x = \arcsin a$

Exemple. **1)** $\lim\limits_{x\to -1} \arcsin x = \arcsin(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$; **2)** $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x = \arcsin 0 = 0$;

3) $\lim\limits_{x\to \frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x = \arcsin \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$.

b') **Funcția arccosinus** $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$.

Dacă $a \in [-1,1]$, atunci $\lim\limits_{x\to a} \arccos x = \arccos a$

Exemple. **1)** $\lim\limits_{x\to -1} \arccos x = \arccos(-1) = \pi$; **2)** $\lim\limits_{x\to 0} \arccos x = \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$;

3) $\lim\limits_{x\to \frac{\sqrt{3}}{2}} \arccos x = \arccos \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{6}$.

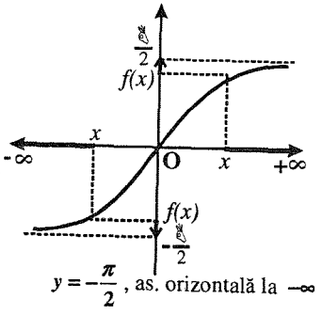
c') **Funcția arctangentă** $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

1) Dacă $a \in \mathbb{R}$, atunci $\lim\limits_{x\to a} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} a$

2) Dacă $a = \infty$, atunci $\lim\limits_{x\to \infty} \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}$

3) Dacă $a = -\infty$, atunci $\lim\limits_{x\to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\dfrac{\pi}{2}$.

Comportarea funcției în jurul punctelor de acumulare este redată în Fig.26.



$y = -\dfrac{\pi}{2}$, as. orizontală la $-\infty$

Fig.26

$y=\frac{\pi}{2}$, as. orizontală la $+\infty$

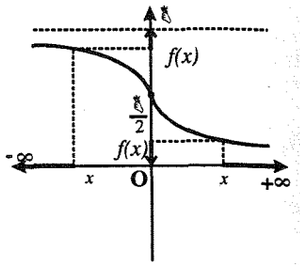
Exemple. **1)** $\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{arctg} x=\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4}$; **2)** $\lim\limits_{x\to 3}\operatorname{arctg} x=\operatorname{arctg} 3$; **3)** $\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}}\operatorname{arctg} x=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}$.

d') **Funcția arccotangentă** $\operatorname{arcctg}:\mathbb{R}\to(0,\pi)$.

1) Dacă $a\in\mathbb{R}$, atunci $\lim\limits_{x\to a}\operatorname{arcctg} x=\operatorname{arcctg} a$

2) Dacă $a=\infty$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arcctg} x=0$

3) Dacă $a=-\infty$, atunci $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arcctg} x=\pi$



$y=\pi$, as. orizontală la $-\infty$

$y=0$, as. orizontală la $+\infty$

Fig.27

Comportarea funcției în jurul punctelor de acumulare este redată în Fig.27.

Exemple. **1)** $\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{arcctg} x=\operatorname{arcctg} 1=\frac{\pi}{4}$; **2)** $\lim\limits_{x\to 2}\operatorname{arcctg} x=\operatorname{arcctg} 2$;

3) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\operatorname{arcctg} x=\operatorname{arcctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}$.

Regulă. **Pentru toate funcțiile elementare, limita funcției în orice punct al mulțimii de definiție a se obține înlocuind pe x cu a:**

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

3.6. OPERAȚII CU LIMITE DE FUNCȚII

Ținând seama de operațiile cu limite de șiruri avem pentru operațiile cu limite de funcții următoarea

Teoremă. Fie $f,g:E\to\mathbb{R}$ și a un punct de acumulare pentru E. Dacă $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l_1$ și $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l_2, l_1,l_2\in\overline{\mathbb{R}}, c\in\mathbb{R}$, atunci funcția:

1) $(f+g)$ are limită în a dacă l_1+l_2 are sens și $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=l_1+l_2=$

$=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)$. **(Limita sumei este egală cu suma limitelor)**

Caz exceptat: $(\infty-\infty)$ dacă $l_1=\infty, l_2=-\infty$ sau $l_1=-\infty, l_2=\infty$.

2) (cf) are limită în a dacă cl_1 are sens și $\lim\limits_{x\to a} cf(x)=cl_1=c\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

(O constantă iese în afara limitei)

3) $(f\cdot g)$ are limită în a dacă $l_1\cdot l_2$ are sens și $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x)=l_1\cdot l_2=$

$=\lim\limits_{x\to a} f(x)\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

(Limita produsului este egală cu produsul limitelor)

Caz exceptat: $(0\cdot\infty)$ dacă $l_1=0$ și $l_2=\pm\infty$ sau $l_1=\pm\infty, l_2=0$.

4) $\frac{f}{g}$ are limită în a dacă $\frac{l_1}{l_2}$ are sens și $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{l_1}{l_2}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, dacă $l_2\neq 0$. **(Limita câtului este egală cu câtul limitelor)**

Cazuri exceptate: $\left(\frac{0}{0};\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$ dacă $l_1=l_2=0$ sau $l_1=\pm\infty, l_2=\pm\infty$.

5) $|f|$ are limită în a și $\lim\limits_{x\to a}|f|(x)=\left|\lim\limits_{x\to a} f(x)\right|=|l_1|$.

(Limita modulului este egală cu modulul limitei)

6) Dacă $f(x)>0, \forall x\in E$ și dacă $l_1^{l_2}$ are sens, atunci f^g are limită în a și

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=l_1^{l_2}=\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

(Limita se distribuie în bază și în exponent)

Cazuri exceptate: (0^0) dacă $l_1=0, l_2=0$; (∞^0) dacă $l_1=\pm\infty, l_2=0$;

(1^∞) dacă $l_1=1, l_2=\pm\infty$.

Demonstrație. Pentru șirul $x_n\in E, x_n\neq a, x_n\to a$, șirurilor $(f(x_n)+g(x_n))$, $(cf(x_n))$, $(f(x_n)g(x_n))$, $\left(\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right)$, $(|f(x_n)|)$, $\left(f(x_n)^{g(x_n)}\right)(f(x_n)>0)$ li se aplică teorema de la operații cu șiruri care au limită. ■

Temă. Demonstrați rezultatele 1)−5) din teoremă utilizând criteriul $\varepsilon-\delta$.

Observații: **1)** Rezultatul din 2) se poate extinde la n funcții $f_i, i=\overline{1,n}$, care au limitele $l_i, l_i\in\overline{\mathbb{R}}, i=\overline{1,n}$ în a și pentru care are sens $l_1+l_2+\ldots+l_n$. Avem:

$$\lim_{x\to a}(f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x))=\lim_{x\to a} f_1(x)+\lim_{x\to a} f_2(x)+\ldots+\lim_{x\to a} f_n(x).$$

2) Rezultatul din 3) se păstrează pentru n funcții $f_i, i=\overline{1,n}$, care au limitele $l_i, l_i \in \overline{\mathbb{R}}, i=\overline{1,n}$, în a și pentru care are sens produsul $l_1 \cdot l_2 \cdot \ldots \cdot l_n$. Avem:

$$\lim_{x\to a}\left(f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x)\right) = \lim_{x\to a} f_1(x) \lim_{x\to a} f_2(x) \ldots \lim_{x\to a} f_n(x).$$

În particular, dacă $f_1 = f_2 = \ldots = f_n = f$, atunci $\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^n = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n$.

3) Dacă $g(x)>0, x\neq a$ și $\lim_{x\to a} g(x)=0$, atunci $\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{0_+} = \infty$.

Dacă $g(x)<0, x\neq a$ și $\lim_{x\to a} g(x)=0$, atunci $\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{0-} = -\infty$.

4) Dacă $g(x)=c, \forall x$, atunci din **6)** rezultă $\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^c = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^c$ (excepția cazului $l_1=0$ și $c\leq 0$). Pentru $c=\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$, avem

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

Limita radicalului este egală cu radicalul limitei.

Dacă $f(x)=b>0$, atunci $\lim_{x\to a} b^{g(x)} = b^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$.

În fine, dacă $f(x)=x>0, g(x)=r\in\mathbb{R}$, atunci $x^r = e^{r\ln x}$ și $\lim_{x\to a} x^r = e^{r\lim\limits_{x\to a}\ln x}$.

Exemple. Să se calculeze limitele: 1) $\lim_{x\to 1}\left(x^2+3x+\ln x\right)$; 2) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2x+1}+\frac{3x}{4x+3}+\frac{x^2-1}{4x^2+1}\right)$;

3) $\lim_{x\to\infty}\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^x+\frac{x^2}{2x+1}\right)$; 4) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{1-x}\cdot 2^x$; 5) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{2x+1}\cdot 3^x$; 6) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{2\cos x-1}$; 7) $\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{\frac{3x+1}{\ln x}}$;

8) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x}{1+3^x}$; 9) $\lim_{x\to-1}\left(\frac{2x+3}{1-x}\right)^{x+2}$; 10) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{4x^2+x}}^{x+1}$.

R. Fie l limita respectivă. Atunci:

1) $l = \lim_{x\to 1}\left(x^2+3x\right)+\lim_{x\to 1}\ln x = 1+3\cdot 1+\ln 1 = 4$;

2) $l = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x+1}+\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{4x+3}+\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{4x^2+1} = \frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4} = \frac{3}{2}$;

3) $l = 2\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x+\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x+1} = 2\cdot 0+\infty = \infty$;

4) $l = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{1-x}\cdot\lim_{x\to 1} 2^x = \lim_{x\to 1}(-1-x)\lim_{x\to 1} 2^x = -2\cdot 2 = -4$;

5) $l = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{2x+1}\right)\lim_{x\to-\infty} 3^x = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$; 6) $l = \frac{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)}{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(2\cos x-1)} = \frac{1+1}{2\cdot 0-1} = -2$;

7) $l = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{3x+1}}{\lim\limits_{x\to\infty}\ln x} = \frac{\frac{1}{3}}{\infty} = 0$; 8) $l = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 2^x}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+3^x\right)} = \frac{0}{1+0} = 0$; 9) $l = \left(\lim_{x\to-1}\frac{2x+3}{1-x}\right)^{\lim\limits_{x\to-1}(x+2)} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$;

10) $l = \left(\sqrt{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{4x^2+x}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)} = \left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^{\infty} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} = 0$.

Probleme propuse

I. 1) $\lim_{x\to 0}\left(2x^3-x^2+3-2e^x\right)$; 2) $\lim_{x\to 0}\left(3\arcsin x-2\arccos x\right)$; 3) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(3\sin x-2\operatorname{tg} x\right)$;

4) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2x+1}+\frac{2x}{3x+2}-\frac{3x}{4x+3}\right)$; 5) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x}-1+2^x\right)$; 6) $\lim_{x\to\infty}\left(3\left(\frac{1}{2}\right)^x+2\ln x\right)$; 7) $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)$;

8) $\lim_{x\to-\infty}\left(3\operatorname{arcctg} 2x-2\operatorname{arcctg} x\right)$

II. 1) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-x}\cdot\arcsin x$; 2) $\lim_{x\to\infty} 3^x\cdot\ln x$; 3) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{3x^2+1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x$; 4) $\lim_{x\nearrow\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg} x\cdot\frac{4x^2-\pi^2}{2(2x-\pi)}$;

5) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}(\sin x)(\cos x)$; 6) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2+1}\cdot e^x$; 7) $\lim_{x\to 4}\left(2\sqrt{x}-\frac{x^2-16}{x-4}+\log_4 x\right)$.

III. 1) $\lim_{x\to 2}\frac{\frac{x^2-4}{x-2}}{2^x}$; 2) $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{2x^2+3}}{\frac{x}{2x+1}+\left(\frac{1}{5}\right)^x}$; 3) $\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-3\cos x}{1+\operatorname{tg} x+2^x}$; 4) $\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{2x-1}{x-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$;

5) $\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{x+1}{x-2}\cdot\ln\frac{1}{x}$; 6) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

IV. 1) $\lim_{x\to 1}\left|\frac{2x-1}{1-3x}\right|\cdot 3^x$; 2) $\lim_{x\to-1}\left|\frac{x^2-1}{1-5x^2}\right|\cdot\arcsin x$; 3) $\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\left|\arcsin x\right|\cdot\left(x^2+\frac{1}{4}\right)$.

V. 1) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{3x}\right)^{\frac{x^2}{x+1}}$; 2) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x^2+1}\right)^{\frac{x}{x^3+1}}$; 3) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{\frac{x}{x+1}}$; 4) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{5x^2+1}{3x^2+2}}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{\frac{x^2+1}{3x^2+x+1}}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x^2-4x+9}}{x+3}\right)^{\frac{1}{x}}$; 7) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3x^2+5x-6}{x^3}}$; 8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(1+\operatorname{tg}x)^{\frac{\sin x}{3\cos x+\sqrt{2}}}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}(2\arccos x-\pi)^{3\sin x}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{2x^3+x-1}{8x^3+x^2+1}}^{\sqrt{\frac{4x}{x+1}}}$.

Limite de funcții compuse

Fie $f:E\to F, g:F\to\mathbb{R}, E, F\subseteq\mathbb{R}, a$ punct de acumulare pentru E. Putem vorbi de funcția $h=g\circ f:E\to\mathbb{R}$. Ne interesează în ce condiții funcția compusă are limită în punctul a. Această problemă este rezolvată de teorema de mai jos, care reduce calculul limitei funcției compuse $h=g\circ f$ în punctul a, la cel al funcției g în punctul b, unde $b=\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Mai precis are loc următoarea:

Teoremă. Dacă

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b\in\overline{\mathbb{R}}$;

2) $f(x)\neq b$, pentru orice $x\neq a, x\in E$;

3) $\lim\limits_{y\to b} g(y)=l$, atunci

funcția compusă $g\circ f$ are limită în a și $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))=\lim\limits_{y\to b} g(y)$.

Demonstrație. Fie $x_n\to a, x_n\in E, x_n\neq a$. Avem $f(x_n)\in F$. Din **1)** rezultă $f(x_n)\to b$, iar din **2)** $f(x_n)\neq b, \forall n$. Punând $y_n=f(x_n)$, am obținut că $y_n\to b$ cu $y_n\neq b$, adică b este punct de acumulare pentru F. Acum din **3)** rezultă $g(y_n)\to l$, adică $g(f(x_n))\underset{n}{\to} l$ sau $(g\circ f)(x_n)\to l$.

Așadar pentru șirul (x_n), arbitrar din $E, x_n\underset{n}{\to} a, x_n\neq a$ am obținut că $(g\circ f)(x_n)\underset{n}{\to} l$, ceea ce înseamnă că $\lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x)=l$.

Așadar $\lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x)=\lim\limits_{x\to a} g(f(x))=\lim\limits_{y\to b} g(y)=l$. ■

Observație. Când avem de calculat limita de forma $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))$, se notează $f(x)=y$, iar în locul funcției $g(f(x))$ se scrie funcția $g(y)$, iar elementul b se determină calculând $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$.

Atunci conform teoremei avem: $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))=\lim\limits_{y\to b} g(y)$.

Exemple. **Să se calculeze limitele:**

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; c) $\lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{1}{(x-1)^2}}$.

R. a) **Punem** $y=x-\frac{\pi}{2}$. **Dacă** $x\to\frac{\pi}{2}$, **atunci** $y\to 0$ **și deci limita se scrie**

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\lim\limits_{y\to 0}\sin y=\sin 0=0$.

b) **Notăm** $y=x-\frac{\pi}{4}$. **Dacă** $x\to\frac{\pi}{4}$, **atunci** $y\to 0$ **și deci** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\lim\limits_{y\to 0}\operatorname{tg}y=\operatorname{tg}0=0$.

c) **Se notează** $y=x-1$. **Dacă** $x\to 1$, **atunci** $y=x-1\to 0$. **Așadar limita se scrie**

$\lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{1}{(x-1)^2}}=\lim\limits_{y\to 0} e^{\frac{1}{y^2}}=e^{\frac{1}{0_+}}=e^{\infty}=\infty$.

Exerciții propuse

Să se calculeze limitele: 1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$; **2)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$; **3)** $\lim\limits_{x\to 1}\arcsin(x-1)$; **4)** $\lim\limits_{x\to 2} 3^{x-2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 4}\ln(x-3)$.

3.7. LIMITE REMARCABILE

1.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1$$

$$\lim_{u(x)\to 0}\frac{\sin u(x)}{u(x)}=\lim_{u(x)\to 0}\frac{\operatorname{tg}u(x)}{u(x)}=\lim_{u(x)\to 0}\frac{\arcsin u(x)}{u(x)}=\lim_{u(x)\to 0}\frac{\operatorname{arctg}u(x)}{u(x)}=1$$

Aceste limite elimină o nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$.

Observații. **1)** Din relația $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ și scrierea $\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}$, prin trecerea la limită rezultă $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1$. În fine, pentru limita $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$ se pune $\arcsin x=y$ și se obține $y\to 0$ dacă $x\to 0$. Așadar, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1$.

2) Pentru celelalte limite se ține seama de teorema de la limite compuse și limitele de mai sus.

Exemple . Să se calculeze limitele: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x+\arcsin 2x}{x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{\sin x^3}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin 2x}{\sin 3x+\sin 4x}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty} x\arcsin\frac{1}{2x}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+2x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$;

9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\pi-2x}$; 10) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\operatorname{tg}(x+1)}{x^2-1}$.

R . Notăm cu l limita de calculat. Avem:

1) $l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3=3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3$;

2) $l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x}{2x}\cdot\frac{2x}{3x}\cdot\frac{3x}{\operatorname{tg}3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{3x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\operatorname{tg}3x}=1\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}$;

3) $l=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}+\frac{\arcsin 2x}{2x}\cdot 2\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}+2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{2x}=1+2\cdot 1=3$;

4) $l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x^3}\cdot\frac{x^3}{\sin x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin x^3}=1^3\cdot 1=1$;

5) $l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3+\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4}=\frac{1+2}{3+4}=\frac{3}{7}$; (Altfel se poate prelucra limita scriindu-se

$l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\left(1+\frac{\sin 2x}{\sin x}\right)}{\sin 3x\left(1+\frac{\sin 4x}{\sin 3x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 3x}\cdot\frac{1+\frac{\sin 2x}{\sin x}}{1+\frac{\sin 4x}{\sin 3x}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1+2}{1+\frac{4}{3}}=\frac{3}{7}$ – am ținut seama că

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}$); 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arcsin\frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\cdot\frac{1}{x+1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=1\cdot 1=1$; 8)

Punem $y=x-1$. Dacă $x\to 1$, atunci $y\to 0$ și limita devine

$l=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y(y+2)}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\frac{1}{y+2}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ (Se scrie de la început limita sub forma

$l=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$ și deci $l=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}\cdot\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$);

9) Se notează $y=x-\frac{\pi}{2}$ și deci $y\to 0$ dacă $x\to\frac{\pi}{2}$. Limita se scrie în funcție de y,

$l=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin(\pi+2y)}{-2y}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{-\sin 2y}{-2y}=1$; 10) $l=\lim\limits_{x\to -1}\frac{\operatorname{tg}(x+1)}{x+1}\cdot\frac{1}{x-1}=1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$.

Probleme propuse

1 . Să se calculeze limitele:

I. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin 3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 10x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx}$, $m,n\in\mathbb{N}^*$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)\sin\frac{1}{x+1}$; 5)

$\lim\limits_{x\to\infty}2^x\sin\left(\frac{1}{2}\right)^x$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^5 x}{(x^2+x)\sin x^4}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{\sin x^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x^2-4}$; 9) $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}}\frac{\sin(3x-2)}{3x^2+x-2}$;

10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(\pi-2x)^2}$; 11) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sin\pi(x+1)}{\sqrt[3]{x}+1}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+\sin^2 2x}{x^2}$; 13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+\sin^2 2x}{\sin^2 3x+\sin^2 4x}$;

14) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sin(x^2+x-2)}{\sin(x^2+3x+2)}$; 15) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x\sin(2x\sin 3x))}{x^3}$; 16) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x+\cos 2x+\cos 3x-3}{\sin x^2}$.

II. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\operatorname{tg}6x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}3x}{\arcsin 9x}$; 3) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\operatorname{tg}(x+1)}{x^2-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}(x^2-1)}{\sin(x^2-3x+2)}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+1)\arcsin\frac{1}{3(x^2+1)}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x+\arcsin 2x}{\arcsin 3x+\arcsin 4x}$; 7) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\arcsin(x^2-4)}{\sin(x^2-5x+6)}$;

8) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\arcsin(x^2-9)}{\operatorname{arctg}(x^2-4x+3)}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\operatorname{tg}2x)}{\operatorname{tg}(\arcsin 3x)}$; 10) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sin 3^x}{\operatorname{arctg}3^{x+1}}$;

11) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}(\arcsin(x^2-1))}{\sin(\operatorname{arctg}(x^2-3x+2))}$.

2. Utilizând criteriul $\varepsilon-\delta$ pentru $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1$, calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\operatorname{tg}\frac{i}{n^2}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$$

2.

$$\lim_{u(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)}=\lim_{u(x)\to-\infty}\left(1+\frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)}=\lim_{u(x)\to 0}\left(1+u(x)\right)^{\frac{1}{u(x)}}=e$$

Aceste limite elimină o nedeterminare de forma 1^∞.

Exemple. Să se calculeze limitele:

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\sin^2 x)^{\frac{3}{x^2}}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{x+1}$.

R. 1) Avem nedeterminarea 1^∞. Limita devine:

$$\lim_{x\to 0}\left[(1+2\sin^2 x)^{\frac{1}{2\sin^2 x}}\right]^{2\sin^2 x\cdot\frac{3}{x^2}}=\left[\lim_{x\to 0}(1+2\sin^2 x)^{\frac{1}{2\sin^2 x}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}6\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}=e^6.$$

2) Suntem în cazul de nedeterminare 1^∞. Avem (se adună și se scade unu în bază):

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}-1\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x^2-3x+2}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{x+1}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{x^2-3x+2}{x+1}}\right]^{\frac{(x+1)^2}{x^2-3x+2}}=e.$$

Exerciții propuse

Să se calculeze limitele: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\sin^2 x\right)^{\frac{5}{x^2}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin 3x\right)^{\frac{1}{9x}}$;

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{5x+3}\right)^{2x+3}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\,(a>0,a\neq 1);\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^r-1}{x}=r,r\in\mathbb{R}^*$$

3.

$$\lim_{u(x)\to 0}\frac{\ln(1+u(x))}{u(x)}=1;\ \lim_{u(x)\to 0}\frac{a^{u(x)}-1}{u(x)}=\ln a;\ \lim_{u(x)\to 0}\frac{(1+u(x))^r-1}{u(x)}=r$$

Aceste limite elimină o nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$.

Observație. Dacă $a=e$, atunci $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1=\lim\limits_{u(x)\to 0}\frac{e^{u(x)}-1}{u(x)}}$

Exemple. **Să se calculeze limitele:**

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+ex)}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\lg(1+10x)}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\ln(1+\sin 2x)}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{5x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{e^{3x}-1}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x}-e^{4x}}{e^{3x}-e^{x}}$; 7) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2^x-4}{x-2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-1}{3x}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\sin 2x-\sin x}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

R. **Notăm cu l limita de calculat. Avem:**

1) $l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+ex)}{ex}\cdot e=1\cdot e=e$; 2) $l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+10x)}{x\ln 10}=\frac{1}{\ln 10}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+10x)}{10x}\cdot 10=\frac{10}{\ln 10}$;

3) $l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\sin 2x}\cdot\frac{\sin 2x}{\ln(1+\sin 2x)}=1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$; 4) $l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot\frac{3}{5}=1\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$;

5) $l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{2x}{3x}\cdot\frac{3x}{e^{3x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{3x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{e^{3x}-1}=1\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}$;

6) $l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{4x}\left(e^x-1\right)}{e^x\left(e^{2x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}e^x\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{x}{2x}\cdot\frac{2x}{e^{2x}-1}=1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$; 7) $l=\lim\limits_{x\to 2}\frac{4\left(2^{x-2}-1\right)}{x-2}=4\ln 2$;

8) $l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-1}{\sin 2x}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2}{3}=1\cdot 1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$; 9) $l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}\left(e^{\sin 2x-\sin x}-1\right)}{\sin 2x-\sin x}=1$;

10) $l=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{x}=\frac{1}{2}$.

Probleme propuse

1. **Să se calculeze limitele:** 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)+\ln(1+3x)}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln\left(x^3+x-1\right)}{\ln\left(x^2+x-1\right)}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\ln(1+3x)}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\operatorname{arctg}2x)}{\ln(1+\operatorname{tg}3x)}$; 6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+2\cos x)}{\cos x}$; 7) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\ln\left[1+\operatorname{tg}(x+1)\right]}{\arcsin 3(x+1)}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{x}{2}}-1}{x}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x^2+x}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{3x}{2}}-1}{e^{\frac{x}{2}}-1}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{3x}-2^x}{2^{4x}-2^{3x}}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{3^x+4^x-2}$;

13) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3^x-27}{x-3}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{3x}$; 15) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{e^{2x}+e^{-2x}-2}$; 16) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{tg}3x}-1}{2x}$;

17) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{\arcsin 3(x-1)}-1}{2(x-1)}$; 18) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{\sin(x-1)}-e^{\sin 2(x-1)}}{e^{\sin 3(x-1)}-e^{\sin 4(x-1)}}$; 19) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{tg}2x}-e^{\operatorname{tg}x}}{e^x-1}$; 20) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{\sin x}-3^{\arcsin x}}{4^{\operatorname{tg}2x}-5^{\operatorname{arctg}2x}}$.

2. **Utilizând criteriul $\varepsilon-\delta$: a) pentru limita** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, **calculați** $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n^2}\right)$;

b) pentru limita $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$, **calculați** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(e^{\frac{i}{n^2}}-1\right)$.

3.8. CAZURI EXCEPTATE LA OPERAȚII CU LIMITE DE FUNCȚII. METODE DE ELIMINARE A NEDETERMINĂRII

Vom ilustra cazurile de nedeterminare $\frac{0}{0};0\cdot\infty;\frac{\pm\infty}{\pm\infty};\infty-\infty;0^0;\infty^0;1^\infty$ prin aplicații din care să rezulte tehnica de lucru pentru eliminarea acestor nedeterminări. O parte din aceste cazuri le-am întâlnit. Recomandăm cititorului revederea acelor probleme.

1.Cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$

a) **limite de funcții raționale în puncte finite** a.

(Se face simplificarea prin $(x-a)^k, k\in\mathbb{N}^*$)

1) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\searrow 2}\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{(x-1)(x+2)}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x^2+3}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$; 6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+3x^2-9x+5}{(x-1)^2}$; 7) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}, m,n\in\mathbb{N}^*$; 8) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x^m-a^m}, m,n\in\mathbb{N}^*$;

9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$; 10)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, $m,n\in\mathbb{N}^*$;

11)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$.

b) **limite de funcții raționale în compunere cu funcția modul**

(Se explicitează modulul)

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{x-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+|x|}{|x|}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-2x}{|x|}$; 5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|^2}{x-1}$.

c) **limite de funcții definite prin cât de expresii iraționale**

- **sub radicali de ordine diferite figurează aceeași expresie**

(Se schimbă variabila, notându-se radicalul de ordin egal cu cel mai mic multiplu comun al ordinelor radicalilor cu altă variabilă, când se ajunge la limita unei funcții raționale)

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$;

6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$, $n,m\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$; 7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1}$, $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$; 8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sqrt[n]{x}-1\right)}{(x-1)^{n-1}}$;

9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\ldots+\sqrt[n]{x}-n}{x^n-1}$, $n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$.

- **sub radicali figurează expresii diferite**

(amplificarea numărătorului şi (sau) numitorului cu expresia conjugată)

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2}}{x-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$;

5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-5x+6}$; 6) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt[3]{x^2-1}-2}$;

9) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+2x+12}-\sqrt[3]{2x^2+x+6}}{x-3}$; 10) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}$; 11) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-\sqrt{x+6}}{\sqrt{x+1}-2}$; 12) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{x+5}}{1-\sqrt{5-x}}$.

d) **limite de funcții trigonometrice**

Pentru a elimina nedeterminarea se utilizează limitele:

$$\lim_{u(x)\to 0}\frac{\sin u(x)}{u(x)}=\lim_{u(x)\to 0}\frac{\operatorname{tg} u(x)}{u(x)}=\lim_{u(x)\to 0}\frac{\arcsin u(x)}{u(x)}=\lim_{u(x)\to 0}\frac{\operatorname{arctg} u(x)}{u(x)}=1.$$

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\beta x}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R},\beta\neq 0$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{5x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{tg} x-1}{\sin^2 x-\cos^2 x}$;

5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sqrt{3}\operatorname{tg} x-3}{3x-\pi}$; 6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$; 7) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2\cos x}$; 9) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin\left(x^2+x-2\right)}{\sin\left(x^2+3x+2\right)}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{x^2}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{\sin 5x\sin 8x}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$; 13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 x}$;

14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x+1}-1}$; 15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\left(\sqrt{1+x}-1\right)}$; 16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$; 17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$.

e) **limite de funcții exponențiale, logaritmice**

Pentru a elimina nedeterminarea se utilizează limitele:

$$\lim_{u(x)\to 0}\frac{\ln\left(1+u(x)\right)}{u(x)}=1,\ \lim_{u(x)\to 0}\frac{a^{u(x)}-1}{u(x)}=\ln a,\ a>0,a\neq 1.$$

1) $\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{4x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sqrt{x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+3x-x^2\right)}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2x-1)}{x^2+x-2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\operatorname{arctg} x)}{x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{\ln(1+x)}$; 7) $\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\ln(\cos x)}$; 8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\left(x^2+3x-3\right)}{\sin\left(x^2-5x+4\right)}$;

9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x-1}-1}{\sqrt{x}-1}$; 10) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-a^a}{x-a}$, $a>0$; 11) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$, $a>0$; 12) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-x^a}{x-a}$, $a>0$.

2.Cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$

a) **limite de funcții raționale**

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-5x^3+6x^2-3}{2x^2+3x-5}$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^3-5x}{-x+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-2x^3+9}{-3x^5+x}$; 4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^4+3x^2-1}{3x^4+5x+2}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x^3-5x}$; 6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^2+3x+5}{9x^5+2x+1}$.

b) **limite de funcții iraționale, exponențiale, logaritmice**

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x+1}}{-2x+5}$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+x}}{3x+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}$; 4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+2}}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+e^{3x}\right)}{x}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x}$, $\left(\ln(1+x)<\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}, x>0\right)$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(x^3-5x+3\right)}{\ln\left(x^5-6x^2-6\right)}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+e^{2x}}{e^{2x}+e^{3x}}$.

3.Cazul de nedeterminare $\infty-\infty$

a) **limite de funcții raționale** (Se aduc la același numitor)

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2}{x^2-4}\right)$; 3) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x^2-9}-\dfrac{1}{x^3-27}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x(x+1)}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{3x^2}{2x+1}-\dfrac{(2x-1)\left(3x^2+x+2\right)}{4x^2}\right]$;

7) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x+2}{x^2-5x+4}+\dfrac{x-4}{3\left(x^2-3x+2\right)}\right]$.

b) **limite de funcții iraționale** (prin amplificare cu conjugata)

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)$; 3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+4}\right)$; 5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+4}\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{x^2+1}\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$; 9) $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{4x^2+7}+2x\right)$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x-\sqrt{x^2-4}}{x}$;

11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$;

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)}-x\right)$, $a_i\in\mathbb{R}$.

c) **limite de funcții iraționale**

Forțare de factor comun a lui x la puterea cea mai mare.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+x}-\sqrt[3]{x^2+1}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x+1}-x\right)$; 3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2+1}-\sqrt{x^2+x+1}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^4+1}\right)$.

d) **limite de funcții exponențiale, logaritmice**

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln(2x+1)-\ln(x+2)\right]$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln(1+x)-\ln x\right]$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-2e^{3x}}{e^{2x}-3e^{3x}}$.

4.Cazul de nedeterminare $0\cdot\infty$

Se transformă în $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$.

Să se calculeze limitele:

1) $\lim\limits_{x\to0}x\operatorname{ctg}x$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{\pi}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}x$; 5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sec 2x$;

6) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+x^3+1}-x^2\right)\sin\frac{1}{x}$;

9) $\lim\limits_{x\to1}\left(e^{\sin a}-e^{\sin ax}\right)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$; 10)* $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right)$; 11)* $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x+2}-\operatorname{arctg}\frac{x}{x+2}\right)$.

5.Cazul de nedeterminare 1^∞

Se utilizează $\lim\limits_{u(x)\to0}(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}=e$ sau $\lim\limits_{u(x)\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{u(x)}\right)^{u(x)}=e$.

Să se calculeze limitele:

1) $\lim\limits_{x\to5}(6-x)^{\frac{1}{x-5}}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^3+2x^2+3x+4}\right)^x$; 7) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$; 8) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a,b>0$;

9) $\lim\limits_{x\to e}\left(\dfrac{a^{\ln x}+b^{\ln x}}{a+b}\right)^{\frac{1}{\ln x-1}}$, $a,b>0$; 10) $\lim\limits_{x\to e}(\ln x)^{\frac{1}{x^2-3xe+2e^2}}$; 11) $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$; 12) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

6.Cazul de nedeterminare 0^0

Se utilizează $\lim\limits_{x\searrow0}x\ln x=0$ și scrierea $f^g=e^{g\ln f}$.

1) $\lim\limits_{x\searrow0}x^x$; 2) $\lim\limits_{x\searrow0}(\sin x)^x$; 3) $\lim\limits_{x\searrow0}x^{\sin x}$; 4) $\lim\limits_{x\searrow1}(x-1)^{\operatorname{tg}(x-1)}$; 5) $\lim\limits_{x\searrow0}(\arcsin x)^{\sin x}$;

6) $\lim\limits_{x\nearrow1}\left(1-\sqrt{x}\right)^{x-1}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{\ln^2 x}}$.

7.Cazul de nedeterminare ∞^0

Se utilizează scrierea $f^g=e^{g\ln f}$ și $\lim\limits_{x\searrow0}x\ln x=0$.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$; 2) $\lim\limits_{x\searrow0}\left(\frac{1}{x}\right)^x$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\sin\frac{1}{x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\operatorname{tg}x}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

3.9. LIMITE DE FUNCȚII CU PARAMETRI

Problemă rezolvată

Să se determine parametrii reali a,b dacă $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+ax+b\right)=2$.

R. Trecând la limită avem $\infty+a(\infty)+b$. Dacă $a>0$, atunci limita ar fi ∞, fals. Deci $a\le0$.

Dacă $a=0$, limita este $\infty+b=\infty$, contradicție.

Rămâne $a<0$, când avem nedeterminarea $\infty-\infty$. Se amplifică cu expresia conjugată și avem:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2+1}-ax-b}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-a^2\right)-2abx+1-b^2}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}\right)}.\ (*)$$

Dacă $a^2-1\neq0$, atunci limita ar infinită (la numărător x figurează la puterea a doua, în timp ce la numitor doar la puterea întâi). Deci $a^2-1=0$ cu soluțiile $a_1=-1,a_2=1$. Cum $a<0$ se reține $a=-1$.

Egalitățile din (*) se continuă cu $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(2b+\dfrac{1-b^2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1-\dfrac{b}{x}\right)}=\dfrac{2b}{2}=b=2$.

Deci $a=-1, b=2$.

Exerciții propuse

Să se determine a,b,c astfel încât să fie îndeplinite egalitățile:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-ax-b\right)=0$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+2x^3}-ax^2-bx-c\right)=0$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{5x^4+7x^3-8x^2-4x}-ax^2-bx-c\right)=0$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a\sqrt{x^2+ax}+b\sqrt{x^2+bx}-2x\right)=1$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax^2+x}-\sqrt{x^2+bx}\right)\in\mathbb{R}, a>0, b\in\mathbb{R}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{ax^3+bx^2}-2x\right)=-\dfrac{1}{3}$;

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+ax^2+1}-\sqrt[3]{x^3+bx^2+1}\right)=\dfrac{1}{3}$; 9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-ax-b\right)=0$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2x+2}-ax-b\right)=0$; 11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a+\dfrac{bx}{x^2-1}\right)^x=e^2$;

12) $\lim\limits_{x\to0}x\left[\dfrac{ax}{\sin^2 x}\right]=3$, $[\ ]$ = partea întreagă; 13) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{(a-1)^2x^2+1}}\right)^{x\sqrt{x}}=e^2, a\neq1$;

14) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{ax^2}-\cos x}{x^2}=\dfrac{3}{2}$; 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+ax+1}{x^2+3x-2}\right)^x=e$; 16) $f(x)=\begin{cases}x^2-3ax+1, x\in\mathbb{Q}-\{2\}\\ -1, x=2\\ bx+1, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$;

$\lim\limits_{x\to2}f(x)=-1$; 17) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{ax^m+bx^n+1}{x-1}\in\mathbb{R}, m,n\in\mathbb{N}, m>n$; 18) $\lim\limits_{x\to2}f(x)\in\mathbb{R}$, unde

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x-[x]}{x}, x\geq2\\ \{x\}+a, x<2\end{cases}$; 19) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{2n}-2x^n-a}{x-1}\in\mathbb{R}$; 20) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(a\cos\dfrac{1}{x}-b\cos\dfrac{2}{x}\right)=\dfrac{3}{2}$.

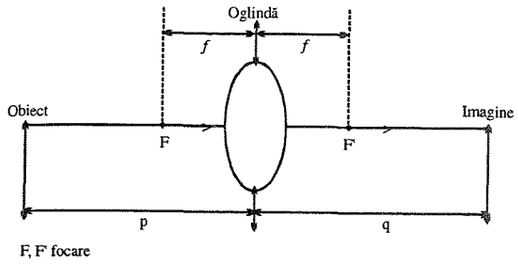
3.10. LIMITE DE FUNCȚII ÎN PROBLEME PRACTICE

1. (Teoria relativității și limitele) Einstein a arătat că masa unui corp este funcție de viteza sa, $m(v)=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$, unde v este viteza în $km/s, 0\leq v<c$,

$c=300.000 km/s$ (viteza luminii), m_0 este masa corpului în repaos. Să observăm că dacă $v=0$, atunci $m(0)=m_0$, care este masa corpului în repaos. Pentru $v\to c, v<c$ (deci, la viteze foarte mari), $\lim\limits_{v\to c}m(v)=\infty$!

2.(Funcția " catastrofă" și limitele) Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\left(50+x^{20}\right)^2-2500}{x^{20}}$. Acestă funcție are proprietatea că pentru $x=0{,}4$, $f(0{,}4)\approx100{,}044$, iar pentru $x=0{,}3$, utilizând calculatorul care poate afișa 12 cifre găsim $f(x)=0$!!! Efectuând calculele, pentru $x\neq0$, găsim $f(x)=x^{20}+100$ și deci $\lim\limits_{x\to0}f(x)=100$. Matematicianul francez, René Thom, este creatorul "Teoriei catastrofelor" , pentru care în 1958 a obținut medalia FIELDS, echivalentul premiului NOBEL în matematică.

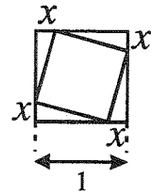
3.(Optica și limitele) Pentru o lentilă convexă cu distanța focală f și distanța de la un obiect la centrul lentilei egală cu p, iar de la imagine la centrul lentilei egală cu q există relația $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{f}$.



F, F' focare

De aici $q=\dfrac{pf}{p-f}, p\neq f, p>f$.

Ce se întâmplă când obiectul se apropie de focarul lentilei $(p\to f)$? Avem $\lim\limits_{p\searrow f}q(p)=\lim\limits_{p\searrow f}\dfrac{pf}{p-f}=\infty$, ceea ce arată că imaginea obiectului este "aruncată" la infinit. Ce se întâmplă cu imaginea dacă $p\to\infty$?



4.(Geometria și limitele) Într-un pătrat de latură 1 se înscrie un alt pătrat, așa cum se indică în figura alăturată. Notăm cu $p(x)$ și $s(x)$ perimetru și aria pătratului inscris. Ce puteți afirma despre limitele funcțiilor $p(x)$ și $s(x)$ în $0_+, 1_-$ și $\dfrac{1}{2}$.

Calculați $p(x)$ și $s(x)$ și verificați afirmațiile făcute mai sus.

5.(Calculul aproximativ și limitele). Am văzut că pentru $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, $x\geq-1, x\neq0$ avem $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\dfrac{1}{2}$.

Altfel spus pentru $x\to0, \sqrt{1+x}-1$ se poate echivala cu $\dfrac{x}{2}$ adică $\sqrt{1+x}-1\approx\dfrac{x}{2}$.

Să calculăm $\sqrt{105}$. Avem $\sqrt{105}=10\sqrt{1{,}05}=10\sqrt{1+0{,}05}\approx10\left(1+\dfrac{0{,}05}{2}\right)=10(1+0{,}025)=$

$=10{,}25$. Calculați 1) $\sqrt{912}=\sqrt{900+12}=30\sqrt{1+\dfrac{12}{900}}$; 2) $\sqrt{260}$; 3) $\sqrt{1632}$.

Arătați că $\sqrt[n]{1+x}-1\approx\dfrac{x}{n}$ și calculați 1) $\sqrt[3]{1047}$; 2) $\sqrt[5]{1080}$;

REZUMATUL CAPITOLULUI

Noțiune	Definiție. Caracterizare	Comentarii
Limita unei funcții $f:(a-p,a)\cup(a,a+p)$, $p>0$, în $x=a$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=l\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$ $(\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,0<\lvert x-a\rvert<\delta$ $\Rightarrow\lvert f(x)-l\rvert<\varepsilon)$	
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$	• **cu ajutorul vecinătăților** $\forall V\in\mathcal{V}(l),\exists U\in\mathcal{V}(a)$, $\forall x\in U\cap E, x\neq a, f(x)\in V$ • **cu limitele laterale** $l_s(a)=l_d(a)=l$ • **criteriul majorării** $\lvert f(x)-l\rvert\le g(x)$, $\forall x\in V\in\mathcal{V}(a), x\neq a$ $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ • **criteriul „cleștelui"** $f(x)\le g(x)\le h(x),\forall x\in V\in\mathcal{V}(a), x\neq a$ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=l\Rightarrow\lim\limits_{x\to a} g(x)=l$	
Limitele funcțiilor elementare $f:E\to\mathbb{R}, a\in E$, **punct de acumulare**	**Limita unei funcții elementare într-un punct de acumulare finit, din domeniul de definiție se obține înlocuind pe** x **cu** a, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$	
Operații cu limite de funcții $f,g:E\to\mathbb{R}, a\in E$, **punct de acumulare** $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l_1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l_2$, $l_1,l_2\in\overline{\mathbb{R}}$	1) **dacă** l_1+l_2 **are sens, atunci** $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)$ 2) **dacă** $l_1 l_2$ **are sens, atunci** $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$ 3) **dacă** $\frac{l_1}{l_2}$ **are sens, atunci** $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ 4) **dacă** $f(x)>0,\forall x$ **și are sens** $l_1{}^{l_2}$, **atunci** $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$	**Caz exceptat:** $\infty-\infty$ **Caz exceptat:** $0\cdot\infty$ **Cazuri excetate:** $\frac{0}{0},\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ **Cazuri exceptate:** $0^0,\infty^0,1^\infty$

Limite remarcabile	1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a, a>0, a\neq1$

Teste de evaluare

Testul 1 (1 punct din oficiu)

1. **Să se calculeze limitele: 1)** $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}$; **2)** $\lim\limits_{x\to4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$; **3)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+5}{2x^2+7}\right)^{3x^2}$. **(3 puncte)**

2. **Să se determine parametrii reali** a,b **astfel încât** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-2ax-3b\right)=0$. **(1 punct)**

3. **Să se calculeze limitele: 1)** $\lim\limits_{x\to3}\frac{3^x-27-\ln(x-2)}{x-3}$; **2)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sin4x}$; **3)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$. **(3 puncte)**

4. **Fie șirul** $(a_n)_{n\ge1}$ **dat de** $a_n=\lim\limits_{x\to0}(1-x\sin nx)^{\frac{1}{x^2}}$. **Să se afle limita șirului cu termenul general** $b_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$. **(2 puncte)**

Testul 2 (1 punct din oficiu)

1. **Să se calculeze limitele: 1)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{x+\sin2x}$; **2)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x+\sin x}$; **3)** $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$. **(3 puncte)**

2. **Să se determine** $a\in\mathbb{R}$ **astfel încât funcția** $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{a\ln(3-x)}{x-2}, x<2\\ \frac{2^x-4}{x-2}, x>2\end{cases}$ **să aibă limită în** $x=2$. **(1 punct)**

3. **Să se calculeze limitele: 1)** $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{4x}}{\sqrt{5x+1}-\sqrt{6x-1}}$; **2)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x^2+x+5\right)}{\ln\left(x^8-x+3\right)}$; **3)** $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+4x+2}-x-2\right)$. **(3 puncte)**

4. **Să se calculeze** $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\lim\limits_{x\to0}\left(1+\sin^2x+\sin^22x+\ldots+\sin^2nx\right)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{\frac{1}{n^3}}$. **(2 puncte)**

Testul 3 (de tip grilă) (1 punct din oficiu)

1. Să se calculeze limitele:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$; a)0; b) ∞ ; c) $-\infty$; d) -1 ; e) 1.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P([x])}{[P(x)]}$, unde $P(x)=x^3+x^2+x+1$, iar $[a]$ reprezintă partea întreagă a lui a;

a)0; b) -1 ; c) 1 ; d) $\frac{1}{4}$; e) nu există;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}$; a) e^2 ; b) 1 ; c) $\frac{1}{e}$; d) 1 ; e) e^3. (3 puncte)

2. Să se determine mulțimea $A=\left\{a\in\mathbb{R}\middle|\exists\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+1-\sqrt{ax^2+x+3}\right)\right\}$, iar pentru $a=1$ să se calculeze $l=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+1-\sqrt{x^2+x+3}\right)$.

a) $A=[0,\infty), l=\frac{1}{2}$; b) $A=\left[\frac{1}{12},\infty\right), l=\frac{1}{2}$; c) $A=(-\infty,1), l=-\frac{1}{2}$; d) $A=(0,1), l=\frac{1}{2}$;

e) $A=(5,\infty), l=2$. (2 puncte)

3. Să se arate că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{c^x-d^x}=1, a,b,c,d>0, c\neq d$ dacă:

a) $ac=bd$; b) $a-b=c-d$; c) $ad=bc$; d) $a^b=c^d$; e) $ab=cd$. (1 punct)

4. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{ax^2+bx+c}\right)=2$, atunci:

a) $a=b=-3, c=0$; b) $a=-1, b=3, c=\sqrt{2}$; c) $a=2, b=0, c=-\sqrt{2}$; d) $a=2, b=1, c=-3\sqrt{2}$;

e) $a=2, b=1, c=-4\sqrt{2}$. (3 puncte)

4. FUNCȚII CONTINUE

În acest capitol, care este asemănător cu cel precedent, se definesc conceptele de funcție continuă într-un punct și pe o mulțime.
Sunt prezentate operațiile algebrice cu funcții continue (într-un punct și pe o mulțime), compunerea funcțiilor continue, proprietățile locale și pe intervale ale funcțiilor continue (proprietatea lui Darboux, semnul funcțiilor continue, rezolvări de ecuații și inecuații), proprietăți de mărginire ale funcțiilor continue pe un interval închis și mărginit (teorema lui Weierstrass) și, în fine, condiția în care inversa unei funcții este continuă.
Problemele propuse sunt diverse, ilustrând și aprofundând teoria.

Istoric. Rezultatele acestui capitol sunt datorate matematicienilor: Bolzano (1781- 1848), Cauchy (1789- 1857), Weierstrass (1815- 1897), Darboux (1842- 1917).

- Introducere 341
- Definiția unei funcții continue într-un punct 342
- Continuitatea pe o mulțime 353
- Operații cu funcții continue 356
- Proprietăți ale funcțiilor continue 362
- Continuitatea funcțiilor inverse .379
- Teste de evaluare 384

4.1. INTRODUCERE

În capitolul precedent am studiat comportarea unei funcții $f:E\to\mathbb{R}$ în jurul unui punct de acumulare a al mulțimii E, fără a lua în considerare valoarea funcției în punctul a (punctul a nu aparține obligatoriu mulțimii E). În cele ce urmează vom fi interesați atât de comportarea funcției f în jurul lui a cât și de valoarea lui f în punctul a.
Deci, **aici obligatoriu** $a\in E$. Mai precis, să comparăm valorile funcției în jurul lui a cu valoarea funcției în punctul a, adică atunci când x „ se apropie" de a să vedem dacă $f(x)$ „ se apropie" de $f(a)$. Dacă răspunsul este afirmativ, atunci spunem că f este continuă în $x=a$. Matematic putem formula afirmația de mai sus cu ajutorul șirurilor astfel: pentru orice șir (x_n), $x_n\to a$, $x_n\in E$ (x_n nu neapărat

diferit de a), şirul valorilor funcţiei $(f(x_n))$ converge la $f(a)$. Altfel spus să comparăm $\lim_{x\to a} f(x)$ (dacă există) cu valoarea funcţiei în $x=a$, adică cu $f(a)$.

Evident această ultimă formulare are sens dacă a din E este şi punct de acumulare pentru E. Dar ea rămâne valabilă şi pentru $a\in E$, punct izolat, pentru că nu avem decât să luăm şirul (x_n) cu $x_n=a$, $\forall n$(sau $\forall n\geq n_0$) pentru care, evident, $x_n\to a$, când avem $f(x_n)=f(a),\forall n$ (sau $\forall n\geq n_0$) şi $f(x_n)\to f(a)$. Deci observăm că **în puncte izolate din** E problema pusă în discuţie este verificată. Astfel de puncte prezintă un interes scăzut, deoarece ele nu au legătură cu procesul de trecere la limită. De aceea, **vom considera în cele ce urmează doar puncte** $a\in E$, **care sunt puncte de acumulare pentru** E, adică $a\in E\cap E'$.

Naiv, o funcţie $f:E\to\mathbb{R}$ este continuă în $x=a$, dacă există o vecinătate a punctului $(a,f(a))$ pe care graficul, trecând prin acest punct, se desenează continuu. Extinzând, f este continuă pe un interval E (dacă este continuă în fiecare punct din E) dacă graficul funcţiei este o curbă continuă.

4.2 DEFINIŢIA UNEI FUNCŢII CONTINUE ÎNTR-UN PUNCT

1. Analiza unui exemplu

Să considerăm funcţia $f:[0,3]\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=\begin{cases}3x, x\in[0,1]\\ x^2, x\in(1,2)\\ 3, x=2\\ 4, x\in(2,3]\end{cases}$

al cărui grafic este cel din Fig. 1.

După cum se poate observa este format din trei părţi, graficul fiind întrerupt în dreptul absciselor 1 şi 2. Punctul marcat printr-un cerc plin aparţine graficului. **Ne propunem să comparăm** $\lim_{x\to a} f(x)$ (în cazul în care există) **cu valoarea funcţiei în punctul** $a, f(a)$. Analizăm cazurile:

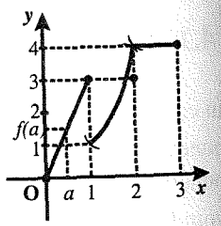


Fig.1

1) Dacă $a\in[0,1)$, atunci $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}(3x)=3a=f(a)$,

adică limita funcţiei f în $x=a$ este egală cu valoarea funcţiei f în $x=a$, $f(a)$. Constatăm că în acest punct, $(a,f(a))$, graficul funcţiei nu este întrerupt. Chiar mai mult, pe o vecinătate a lui a, suficient de mică, graficul care trece prin $(a,f(a))$ se poate desena fără a se ridica vârful creionului de pe hârtie (deci este continuu).

Deci, dacă într-un punct de abscisă a graficul nu se întrerupe, atunci limita funcţiei în a se obţine înlocuind direct în funcţie pe x cu a.

2) Dacă $a=1$, atunci avem $l_s(1)=\lim_{x\nearrow 1} f(x)=\lim_{x\nearrow 1}(3x)=3$,

$l_d(1)=\lim_{x\searrow 1} f(x)=\lim_{x\searrow 1}(x^2)=1$, ceea ce arată că f **nu are limită în punctul** $a=1$. În acest punct **graficul se întrerupe (este discontinuu).**

3) $a\in(1,2)$. Avem $l_s(a)=l_d(a)=f(a)=a^2$, adică $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ şi graficul funcţiei este continuu.

4) Pentru $a=2$, avem $l_s(2)=\lim_{x\nearrow 2} f(x)=\lim_{x\nearrow 2}(x^2)=4$,

$l_d(2)=\lim_{x\searrow 2} f(x)=\lim_{x\searrow 2} 4=4$, dar $f(2)=3$. În acest caz există limita funcţiei f în $x=2$, $\lim_{x\to 2} f(x)=4$, dar aceasta **este diferită** de valoarea funcţiei f în $a=2$, $\lim_{x\to 2} f(x)\neq f(2)$. Se observă că şi în acest caz **graficul este discontinuu** în $a=2$.

5) Dacă $a\in(2,3]$, atunci $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ şi graficul funcţiei este continuu.

După aceste comentarii putem formula următoarele

Definiţii: 1) Fie $f:E\to\mathbb{R}$ şi $a\in E\cap E'$. Se spune că funcţia f **este continuă în punctul** a, dacă există $\lim_{x\to a} f(x)$ şi $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Punctul a se numeşte **punct de continuitate** pentru funcţia f.

2) O funcţie $f:E\to\mathbb{R}$ **este discontinuă în punctul** $a\in E$, dacă nu este continuă în acest punct.

Punctul a se numeşte **punct de discontinuitate** pentru funcţia f.

Observaţii. 1) Definiţia continuităţii unei funcţii într-un punct reclamă trei lucruri: 1^0) există şi este finită $\lim_{x\to a} f(x)$; 2^0) are sens $f(a)$; 3^0) $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

2) Definiţia continuităţii unei funcţii într-un punct este similară definiţiei limitei unei funcţii într-un punct, cu deosebire că în definiţia limitei se impune condiţia $x\neq a$, în timp ce în definiţia continuităţii această condiţie dispare.

3) În punctul în care funcţia nu este definită nu are sens să se pună problema continuităţii sau a discontinuităţii.

Exemple· 1) Pentru funcția $f(x)=\operatorname{tg}x$ și punctul $x=\frac{\pi}{2}$ nu are sens să punem problema continuității sau discontinuității, deoarece f nu este definită în acest punct.

2) Funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\lg x$ și $x=-10$. Nu se poate pune problema continuității sau discontinuității funcției f în $x=-10$, deoarece funcția nu este definită în acest punct.

3) Fie $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ și punctul $x=2$. Observăm că

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$, dar nu este definită funcția f în $x=2$.

Dacă însă luăm funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2}, x\neq 2\\ 4, x=2\end{cases}$ atunci g prelungește prin continuitate funcția f în $x=2$. Despre această construcție, în paragraful următor.

4) Egalitatea din definiția 1), $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ se poate scrie

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f\left(\lim\limits_{x\to a}x\right)$, și se traduce prin „o funcție continuă comută cu limita"
(proprietate ce va fi extinsă și la alte funcții decât cea identică).

Exemple: 1) Să se studieze continuitatea funcțiilor de mai jos $(f:\mathbb{R}\to\mathbb{R})$ în punctele indicate:

a) $f(x)=\begin{cases}x^3, x\leq 3\\ 3x^2, x>3\end{cases}, a=3$; b) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{|x|}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}, a=0$; c) $f(x)=\begin{cases}x, x\in\mathbb{Q}\\ 0, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}, a=0$.

R. a) Trebuie să vedem dacă există $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ și în caz afirmativ să o comparăm cu $f(3)$. Studiem existența limitei în $a=3$, calculând limitele laterale. Avem: $l_s(3)=\lim\limits_{x\nearrow 3}f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 3}x^3=27$, $l_d(3)=\lim\limits_{x\searrow 3}f(3)=\lim\limits_{x\searrow 3}3x^2=27$, iar $f(3)=27$.

Deci $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=27=f(3)$, ceea ce înseamnă că f este continuă în $a=3$.

b) Să observăm că $|x|=x$ dacă $x\geq 0, |x|=-x$, dacă $x<0$, determină calcularea limitelor laterale în $a=0$. Avem: $l_s(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\frac{\sin x}{-x}=-1, l_d(0)=\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Cum $l_s\neq l_d$, rezultă că nu există limita funcției în $a=0$, și deci f nu este continuă în $a=0$. Acest punct este punct de discontinuitate pentru f.

c) Pentru a vedea dacă există $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, vom utiliza criteriul cu șiruri.

Fie șirul $(a_n), a_n\in\mathbb{Q}, \forall n$ (sau $\forall n\geq n_0, n_0$ fixat), $a_n\to 0$. Atunci $f(a_n)=a_n, \forall n$ (sau $\forall n\geq n_0$) și deci $f(a_n)\to 0$. Se mai scrie $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{Q}}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{Q}}}x=0$. Fie acum șirul (b_n), $b_n\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}, \forall n$ (sau $\forall n\geq n_0'$) $b_n\to 0$. Atunci $f(b_n)=0, \forall n$ (sau $\forall n\geq n_0'$) și evident $f(b_n)\to 0$. În acest caz se scrie $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}}}0=0$. În fine, dacă șirul (c_n) conține o infinitate de termeni rationali și irationali, $c_n\to 0$, atunci considerăm subșirurile

$(c_n'), (c_n'')$, formate din termeni rationali și respectiv irationali ai șirului (c_n). Evident $c_n'\to 0, c_n''\to 0$. În plus, $f(c_n')=c_n'\to 0$ și $f(c_n'')=0\to 0$. Cum subșirurile $(f(c_n')), (f(c_n''))$ acoperă șirul $(f(c_n))$, deducem că $f(c_n)\to 0$.

Pentru astfel de funcții (numite de tip Dirichlet) avem regula pentru existența limitei în $x=a$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbb{Q}}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}}}f(x)$.

De aici deducem că f are limită în $a=0$ și $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$. Cum $f(0)=0$, se obține că f este continuă în $a=0$.

Observație. Deși funcția este continuă în $x=0$, nu se poate trasa graficul lui f în jurul lui 0, pentru a vedea dacă este continuu sau nu!!!

2) Să se determine parametrul real α, pentru care funcția

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2\alpha x+1, x\leq 1\\ \alpha x^2+3\alpha x, x>1\end{cases}$, este continuă în punctul $a=1$.

R. Condiția de continuitate în $a=1$, fiind vorba de o funcție multiformă în $x=1$, se exprimă cu ajutorul limitelor laterale

$\lim\limits_{x\nearrow 1}f(x)=\lim\limits_{x\searrow 1}f(x)=f(1)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\nearrow 1}(2\alpha x+1)=\lim\limits_{x\searrow 1}(2\alpha x^2+3\alpha x)=2\alpha+1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\alpha+1=\alpha+3\alpha\Leftrightarrow\alpha=\frac{1}{2}$.

Deci, pentru $\alpha=\frac{1}{2}$, funcția este continuă în $a=1$; în caz contrar $\left(\alpha\neq\frac{1}{2}\right)$ funcția este discontinuă în $a=1$.

2. Prelungirea prin continuitate a unei funcții într-un punct

Fie $f:E\to\mathbb{R}, a\notin E, a$ punct de acumulare pentru E. Dacă există și este finită $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l\in\mathbb{R}$, atunci are loc următoarea:

Definiție. Funcția $\overline{f}:E\cup\{a\}\to\mathbb{R}$ definită prin $\overline{f}(x)=\begin{cases}f(x), x\in E\\ l, x=a\end{cases}$, se numește **prelungirea prin continuitate a funcției f în punctul a**.

Din $\lim\limits_{x\to a}\overline{f}(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)=l=\overline{f}(a)$ rezultă continuitatea funcției $\overline{f}$ în punctul $x=a$. În plus, $\overline{f}$ este unica funcție cu această proprietate, în sensul că dacă înlocuim pe l cu $l'\neq l$, în $x=a$, funcția obținută nu mai este continuă în $x=a$.

Exemple. 1) Să se stabilească dacă următoarele funcții pot fi prelungite prin continuitate în punctele indicate:

a) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=x\sin\frac{1}{x}, a=0; b) f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\sin\frac{1}{x}, a=0$

R. a) Deoarece $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$, **funcția se poate prelungi prin continuitate în** $a=0$ **cu ajutorul funcției** $\overline{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \overline{f}(x)=\begin{cases} f(x), x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$.

b) S-a văzut că nu există limita funcției f **în** $a=0$. **Deci** f **nu poate fi prelungită prin continuitate în** $a=0$.

2) **Să se determine constantele** $a,b\in\mathbb{R}$ **astfel încât** $\frac{1}{x(x-1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}, \forall x\in\mathbb{R}-\{0,1\}$.

R. Înmulțind relația dată cu x **și respectiv** $x-1$ **se obțin egalitățile** $\frac{1}{x-1}=a+\frac{bx}{x-1}$, $\frac{1}{x}=\frac{a(x-1)}{x}+b, \forall x\in\mathbb{R}-\{0,1\}$.

Prelungim prima relație prin continuitate în punctul $x=0$, **rezultă** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x-1}=-1=a$.

Analog, a doua relație o prelungim prin continuitate în punctul $x=1$ **și obținem** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x}=1=b$.

Deci $\frac{1}{x(x-1)}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$.

3. Continuitate laterală

Pentru $f:E\to\mathbb{R}$ și $a\in E\cap E'$, am definit continuitatea lui f în $x=a$ prin egalitatea $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, dacă există $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Este posibil să avem doar $\lim\limits_{x\nearrow a} f(x)=f(a)$ sau $\lim\limits_{x\searrow a} f(x)=f(a)$. În aceste cazuri vorbim de continuitate laterală în $x=a$.

Mai precis au loc următoarele:

Definiții. 1) Fie $a\in E$ punct de acumulare pentru $E\cap(-\infty,a)$. Se spune că $f:E\to\mathbb{R}$ **este continuă la stânga** în a dacă există $\lim\limits_{x\nearrow a} f(x)$ și $\lim\limits_{x\nearrow a} f(x)=f(a)$.

2) Fie $a\in E$ punct de acumulare pentru $E\cap(a,\infty)$. Se spune că f **este continuă la dreapta în** $x=a$ dacă există $\lim\limits_{x\searrow a} f(x)$ și $\lim\limits_{x\searrow a} f(x)=f(a)$.

Următoarea teoremă implică cele două tipuri de continuitate.

Teoremă. Funcția $f:E\to\mathbb{R}$ **este continuă în** $a\in E$ **dacă și numai dacă** f **este continuă la stânga și la dreapta în** a.

Deci, f continuă în $a\Leftrightarrow l_s(a)=l_d(a)=f(a)$.

Demonstrație. Evidentă. ■

Observații. 1) Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, atunci în $x=a$ se pune problema continuității la dreapta, iar în $x=b$ se pune problema continuității la stânga.

2) Acest criteriu se aplică funcțiilor multiforme f, care pentru $x\le a$ au o exprimare, iar pentru $x>a$ au altă exprimare.

Exemplu. Să se studieze continuitatea funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, **în punctele, indicate:**

1) $f(x)=\begin{cases} x^2-3x, x\le 1 \\ 3x+1, x>1 \end{cases}, a=1$; 2) $f(x)=\begin{cases} \frac{2^{x-1}-1}{x-1}, x<1 \\ \alpha, x=1 \\ \ln(x+1), x>1 \end{cases}, a=1; 3)\ f(x)=[2x], a=\frac{1}{2}$.

R. 1) Avem : $l_s(1)=\lim\limits_{x\nearrow 1}(x^2-3x)=-2, l_d(1)=\lim\limits_{x\searrow 1}(3x+1)=4, f(1)=-2$.

Din $l_s(1)=f(1)$ **rezultă** f **continuă la stânga în** $x=1$, **dar nu este continuă în** $x=1$.

2) Avem: $l_s(1)=\lim\limits_{x\nearrow 1}\frac{2^{x-1}-1}{x-1}=\ln 2, l_d(1)=\lim\limits_{x\searrow 1}\ln(x+1)=\ln 2$, **iar** $f(1)=\alpha$.

Dacă $\alpha=\ln 2$, **atunci** $l_s(1)=l_d(1)=f(1)$ **și deci** f **este continuă în** $x=1$. **Dacă** $\alpha\neq\ln 2$, **atunci** f **este discontinuă în** $x=1$.

3) Explicităm funcția în jurul lui $a=\frac{1}{2}$. **Avem:** $f(x)=0$, **dacă** $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ **și** $f(x)=1$, **dacă** $x\in\left[\frac{1}{2},1\right)$. **Cu aceasta** $l_s\left(\frac{1}{2}\right)=0, l_d\left(\frac{1}{2}\right)=1$ **și** $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$. **Din** $l_d\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)$ **rezultă că** f **este continuă la dreapta în** $a=\frac{1}{2}$.

Ținând seamă de definiția limitei unei funcții într-un punct cu ajutorul șirurilor, precum și de caracterizările limitei cu $\varepsilon-\delta$, cu vecinătăți sau cu limitele laterale, continuitatea unei funcții într-un punct se poate reformula echivalent. Mai precis are loc următoarea:

Teoremă (de caracterizare a continuității). Fie $f:E\to\mathbb{R}$ şi $a\in E\cap E'$. Următoarele afirmații sunt echivalente pentru continuitatea lui f în $x=a$:

---

1) (Continuitatea prin şiruri) Pentru orice şir (x_n), $x_n\in E, \forall n, x_n\to a$ să rezulte $f(x_n)\to f(a)$.

---

2) (Criteriul $\varepsilon-\delta$) Pentru orice $\varepsilon>0$, există un număr real $\delta>0$, astfel încât pentru $\forall x\in E$ cu $|x-a|<\delta$ să rezulte $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ (Fig. 2).

Observație. În general δ depinde de a şi ε.

---

3) (Criteriul cu vecinătăți) Pentru orice vecinătate V a lui $f(a)$, există U o vecinătate a lui a astfel încât $\forall x\in U\cap E$ să rezulte $f(x)\in V$, adică $f(U\cap E)\subseteq V$ (Fig. 3).

---

4) (Continuitatea bilaterală) Dacă există $\lim\limits_{x\nearrow a} f(x)\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\searrow a} f(x)\in\mathbb{R}$ şi $\lim\limits_{x\nearrow a} f(x)=\lim\limits_{x\searrow a} f(x)=f(a)$.

Observații. 1) Dacă f este continuă în $x=a$, atunci din criteriul $\varepsilon-\delta$ graficul lui f, pe o vecinătate a lui a, se află între două drepte paralele cu axa Ox, $y=f(a)-\varepsilon$, $y=f(a)+\varepsilon$ (Fig. 2).

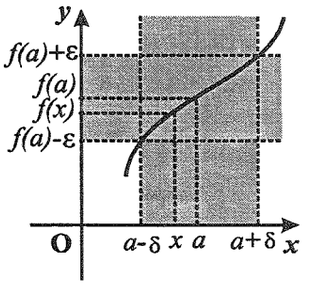


Fig. 2

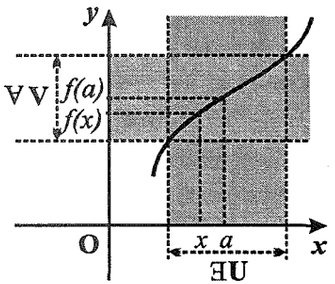


Fig.3

2) Reformulați, utilizând teorema, continuitatea laterală într-un punct.

Exemple. 1) **Fie $f:E\to\mathbb{R}$ şi $a\in E$, punct izolat. Să arătăm, utilizând criteriul cu vecinătăți, că f este continuă în a.**

R. Fie $V\in\vartheta(f(a))$, vecinătate arbitrară. Cum a este punct izolat al lui E, există $U\in\vartheta(a)$ astfel încât $U\cap E=\{a\}$. Pentru $\forall x\in U\cap E$ avem $x=a$ şi deci $f(x)\in V$. Deci f este continuă în a.

Observație. Dacă E este finită, atunci f este continuă în fiecare punct din E.

2) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea $|f(x)-f(y)|\le\alpha|x-y|, \alpha>0, \forall x,y\in\mathbb{R}$.

Să se arate că f este continuă în $a\in\mathbb{R}$.

R. Pentru continuitate utilizăm criteriul $\varepsilon-\delta$. Fie $\varepsilon>0$. Alegem $\delta=\frac{\varepsilon}{\alpha}>0$. Fie $x\in E$ cu $|x-a|<\delta$. Atunci $|f(x)-f(a)|\le\alpha|x-a|<\alpha\frac{\varepsilon}{\alpha}=\varepsilon$. Aceasta arată că f este continuă în $x=a$.

Observații. 1) O funcție f care are proprietatea din enunțul problemei se numeşte **funcție Lipschitz.** Pentru $\alpha\in(0,1)$, f se numeşte **contracție de coeficient** α, iar pentru $\alpha>1$, f se numeşte **dilatare de coeficient** α.

2) Dacă $f:[a,b]\to[a,b]$ este o funcție lipschitziană şi monotonă, iar (x_n) este un şir definit recurent $x_0\in[a,b], x_{n+1}=f(x_n), n\ge 0$, atunci şirul (x_n) este convergent, iar limita sa este soluția ecuației $f(x)=x$.

Aplicație. Se dă şirul $(x_n), x_0\in[0,2], x_{n+1}=\frac{x_n+4}{3}, n\ge 0$. Arătați că şirul (x_n) este convergent şi calculați limita sa.

R. Se ia funcția $f:[0,2]\to[0,2], f(x)=\frac{x+4}{3}$, pentru care

$|f(x)-f(y)|=\frac{1}{3}|x-y|, \forall x,y\in[0,2]$. Deci f este continuă. Observăm că $x_{n+1}=f(x_n), \forall n\ge 0$.

În plus f este strict crescătoare. Cum $f(x_n)\in[0,2], \forall n\ge 1$ se deduce că şirul este mărginit.

Din $x_0<x_1$ rezultă $f(x_0)<f(x_1)$, adică $x_1<x_2$, iar inductiv avem $x_n<x_{n+1}, \forall n$.

Din $x_0>x_1$ se deduce analog $x_n>x_{n+1}, \forall n$. În ambele cazuri (x_n) este şir monoton. Conform proprietății lui Weierstrass rezultă şirul (x_n) este convergent.

Fie $\lim\limits_n x_n=l$. Trecem la limită în relația de recurență $x_{n+1}=f(x_n)$ şi rezultă $l=\frac{l+4}{3}$, adică $l=2$.

4. Puncte de discontinuitate. Discontinuități de prima şi a doua speță

Am văzut că o funcție $f:E\to\mathbb{R}$, care nu este continuă într-un punct $x=a$ se spune că este discontinuă în acel punct sau că punctul $x=a$ este un **punct de discontinuitate** pentru f. Pe de altă parte f este continuă în orice punct izolat din E, ceea ce înseamnă că orice punct de discontinuitate trebuie să fie punct de acumulare al lui E, caz în care se poate vorbi de existența limitelor laterale.

Cerința de continuitate în punctul $x=a$ se exprimă prin

$\lim\limits_{x\nearrow a} f(x)=\lim\limits_{x\searrow a} f(x)=f(a)$ (1).

Formulăm următoarele:

Definiții. Fie $x=a\in E$ punct de discontinuitate pentru f.

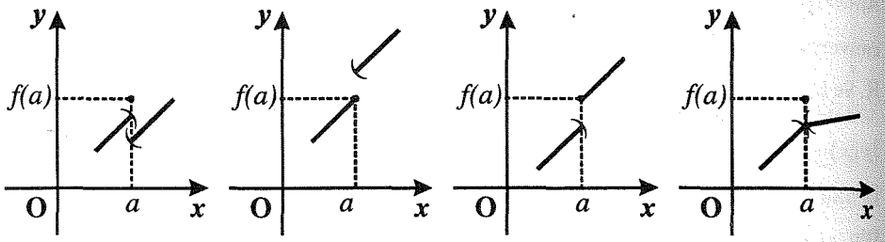
1) Punctul $x=a$ se numește **punct de discontinuitate de prima speță** pentru funcția f, dacă are limite laterale, finite în a.

Deci, $x=a$ este punct de discontinuitate de prima speță $\Leftrightarrow$ există $l_s(a)$ și $l_d(a)\in\mathbb{R}$ și 1) $l_s(a)\neq l_d(a)$ sau 2) $l_s(a)=l_d(a)\neq f(a)$.

2) Punctul $x=a\in E$ se numește **punct de discontinuitate de a doua speță** pentru funcția f, dacă nu este punct de discontinuitate de prima speță a lui f.

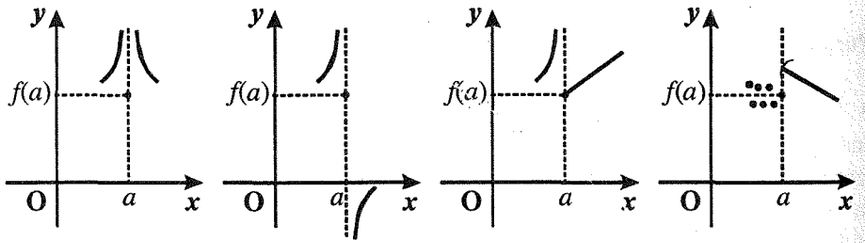
Deci, $x=a$ este punct de discontinuitate de a doua speță $\Leftrightarrow$ cel puțin una din limitele laterale $l_s(a), l_d(a)$ nu există sau este infinită.

În Fig. 4 se dau reprezentări de funcții care au discontinuități de prima speță în $x=a$, iar în Fig. 5 sunt redate reprezentări de funcții care au discontinuități de speța a doua în $x=a$.



$l_s(a)\neq l_d(a)$ $\quad l_s(a)=f(a)\neq l_d(a)$ $\quad l_s(a)\neq l_d(a)=f(a)$ $\quad l_s(a)=l_d(a)\neq f(a)$

Fig.4



$l_s(a)=l_d(a)=\infty$ $\quad l_s(a)=\infty, l_d(a)=-\infty$ $\quad l_s(a)=\infty, l_d(a)=f(a)$ $\quad \nexists l_s(a)$

Fig.5

Exemplu. **Să se precizeze felul punctelor de discontinuitate pentru funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, în cazurile:**

1) $f(x)=\begin{cases}x+2, x\leq -1\\ 3x, x>-1\end{cases}, a=-1$; 2) $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}, a=0$;

3) $f(x)=[x], a\in\mathbb{Z}$; **funcția parte întreagă;** 4) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}, a=0$.

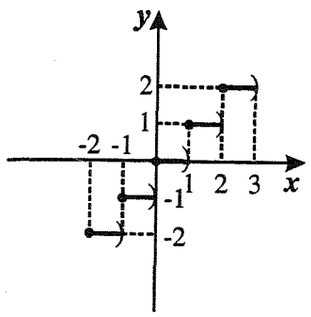


Fig.6

R. 1) **Din** $l_s(-1)=-1+2=1\neq l_d(-1)=-3$, **rezultă că punctul** $a=-1$ **este punct de discontinuitate de prima speță pentru** f.

2) **Deoarece am arătat, în capitolul precedent, că în** $a=0$, **funcția nu are limite laterale, rezultă că acest punct este de discontinuitate de speța a doua pentru** f.

3) **Se constată din egalitățile** $[x+0]=x=[x], [x-0]=x-1,\ \forall x\in\mathbb{Z}$ **că** $l_s(a)=a-1$ **și** $l_d(a)=a, f(a)=a$. **Deci,** $x=a$ **este punct de discontinuitate de prima speță pentru** f. **Graficul funcției este redat în Fig.6.**

4) **Avem** $l_s(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\frac{1}{x}=\frac{1}{0_-}=-\infty, l_d(0)=\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{1}{x}=\frac{1}{0_+}=\infty$.

Deci $a=0$ **este punct de discontinuitate de speța a doua pentru** f.

5. Monotonie și discontinuitate

Funcțiile monotone (crescătoare sau descrescătoare) pe un interval formează o clasă importantă și posedă multe proprietăți specifice. Vom arăta în continuare că o funcție monotonă este fie continuă, fie prezintă o discontinuitate de prima speță, în fiecare punct $x_0\in I$. În plus, vom vedea, mai târziu, că pentru funcțiile monotone, continuitatea este echivalentă cu proprietatea de a nu sări valori (Proprietatea lui Darboux).

Are loc următoarea

Teoremă. Fie funcția monotonă $f:I\to\mathbb{R}$, I interval. Presupunem că $x_0\in I$ nu este capăt al intervalului. Atunci f admite în fiecare punct $x_0\in I$ limite laterale $l_s(x_0), l_d(x_0)$ și în plus $l_s(x_0)\leq f(x_0)\leq l_d(x_0)$, dacă f este crescătoare sau $l_s(x_0)\geq f(x_0)\geq l_d(x_0)$ dacă f este descrescătoare.

Demonstrație. Pentru a fixa ideile, presupunem că f este crescătoare pe I. Considerăm mulțimea $\{f(x)|x\in I, x<x_0\}$ care este nevidă deoarece x_0 nu este capăt al intervalului și este majorată de $f(x_0)$ (din $x<x_0$ rezultă

$f(x)\le f(x_0), x\in I$) Deci există marginea superioară M a acestei mulțimi, $M=\sup\{f(x)|x\in I, x<x_0\}$. Este clar că $M\le f(x_0)$.

Să arătăm că $\lim\limits_{x\nearrow x_0} f(x)=M$. Pentru aceasta folosim criteriul $\varepsilon-\delta$. Fie $\varepsilon>0$ dat arbitrar. Atunci $M-\varepsilon$ nu mai este marginea superioară a mulțimii considerate. Deci există $x_\varepsilon\in I$ (Fig.7) $x_\varepsilon<x_0$ astfel încât $M-\varepsilon<f(x_\varepsilon)\le M$. Deoarece f este crescătoare, deducem că dacă $\delta_\varepsilon=x_0-x_\varepsilon$ și dacă $0<x_0-x<\delta_\varepsilon$, atunci $x_\varepsilon<x<x_0$ și avem $M-\varepsilon<f(x_\varepsilon)\le f(x)\le M$. Deci, $|f(x)-M|<\varepsilon$, când $0<x_0-x<\delta_\varepsilon$. Deoarece $\varepsilon>0$, a fost ales arbitrar rezultă $\lim\limits_{x\nearrow x_0} f(x)=M\le f(x_0)$. Analog se procedează pentru $f(x_0)\le l_d(x_0)$, când $l_d(x_0)=\inf\{f(x)|x\in I, x>x_0\}$. ■

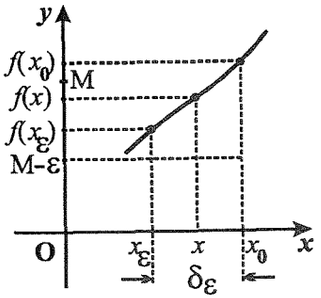


Fig. 7

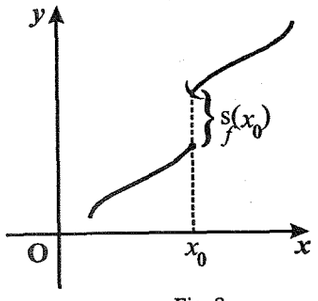


Fig. 8

Observații. 1) Dacă $x_0\in I$ nu este capăt al intervalului, atunci se definește **saltul funcției** f în x_0 prin formula $s_f(x_0)=l_d(x_0)-l_s(x_0)$ (Fig.8). Dacă $I=[a,b]$, atunci $s_f(a)=l_d(a)-f(a)$, iar $s_f(b)=f(b)-l_s(b)$. Dacă f este crescătoare pe I, atunci **f este continuă în** $x_0\in I\Leftrightarrow s_f(x_0)=0$.

2) Dacă $f:I\to\mathbb{R}$ **este monotonă,** iar $x_0\in I$ **este punct de discontinuitate,** atunci x_0 **este punct de discontinuitate de prima speță.**

Să reținem deci: **o funcție monotonă pe un interval nu are puncte de discontinuitate de speța a doua.**

3) Se arată că dacă $f:I\to\mathbb{R}$, I interval, este monotonă, atunci **mulțimea punctelor de discontinuitate este o mulțime numărabilă**(adică se poate pune în corespondență bijectivă cu $\mathbb{N}$).

Exemplu. **Să se arate că funcția** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}0, x\in\mathbb{Q}\\ x^2+1, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$ **nu este monotonă pe nici un interval** $I\subseteq\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$. Dacă, prin absurd, f ar fi monotonă pe un interval $I\subseteq\mathbb{R}$, atunci f ar avea în puncte din I cel mult puncte de discontinuitate de prima speță. Dar f nu are limită în nici un punct din I. Deci orice punct din I este punct de discontinuitate de speța a doua. Contradicție.

4.3. CONTINUITATEA PE O MULȚIME

Fie $f:E\to\mathbb{R}$. Am văzut ce înseamnă continuitatea funcției într-un punct fixat $x=a\in E$. Acest concept se numește continuitate punctuală. Totuși problema se poate extinde la mai multe puncte din E.

Mai precis au loc următoarele:

Definiții. 1) Fie $f:E\to\mathbb{R}$ și $A\subseteq E$. Se spune că f **este continuă pe mulțimea** A dacă este continuă în fiecare punct din A.

2) Dacă f **este continuă pe tot domeniul de definiție**, atunci se spune că f **este continuă**, fără a mai indica mulțimea pe care f are această proprietate.

Observație. Dacă $E=[a,b]$, atunci în $x=a$ vorbim de continuitate la dreapta, iar în $x=b$ despre continuitate la stânga.

Suntem interesați în a studia continuitatea funcțiilor pe domeniul lor de definiție. Următorul rezultat este deosebit de important. Are loc următoarea

Teoremă. Funcțiile elementare sunt funcții continue.

Demonstrație. Am văzut, în capitolul precedent, că pentru funcțiile elementare (**polinomiale,raționale, funcția radical,funcția putere, funcția exponențială, funcția logaritmică, funcțiile trigonometrice directe, funcțiile trigonometrice inverse**) limita acestora într-un punct a din domeniul de definiție, se obține înlocuind pe x cu a, adică $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, ceea ce exprimă faptul că o astfel de funcție este continuă într-un punct arbitrar din domeniul de definiție.

Observații. 1) Evident că dacă $f:E\to\mathbb{R}$ **este continuă**, atunci $\forall B\subseteq E, B\ne\varnothing, f$ **rămâne continuă pe** B.

2) Atunci când ni se cere să studiem continuitatea unei funcții, dacă domeniul de definiție nu este dat, atunci trebuie să-l precizăm. Dacă domeniul are puncte izolate, atunci în aceste puncte funcția este continuă. Dacă f este multiformă, atunci studiem continuitatea pe fiecare ramură precum și în punctele de trecere de la o formă la alta. Dacă f nu este dată explicit, atunci mai întâi explicităm funcția. În final precizăm mulțimea punctelor de continuitate pentru f, adică domeniul de continuitate al funcției.

Exemple. 1) Să se studieze continuitatea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, în cazurile:

a) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2},x\in(-\infty,0)\\ x+1,x\in[0,1]\\ 2x^2,x\in(1,\infty)\end{cases}$; b) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$; c) $f(x)=\begin{cases}\alpha x-1,x\le -1\\ 2x-3\alpha,x>-1,\alpha\in\mathbb{R}\end{cases}$.

R. a) Pe fiecare din intervalele $(-\infty,0),(0,1),(1,\infty)$, funcția f este continuă, fiind restricția unor funcții elementare. Rămâne să studiem continuitatea în punctele de trecere de la o formă la alta, adică în punctele $x=0,x=1$.

Studiem continuitatea în $x=0$. Avem: $l_s(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0}f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{0_+}=\infty$,

$l_d(0)=\lim\limits_{x\searrow 0}f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0}(x+1)=1, f(0)=1$, ceea ce arată că $x=0$ este punct de discontinuitate de speța a doua pentru f.

Studiem continuitatea în $x=1$. Din $l_s(1)=\lim\limits_{x\nearrow 1}f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 1}(x+1)=2$,

$l_d(1)=\lim\limits_{x\searrow 1}f(x)=\lim\limits_{x\searrow 1}(2x^2)=2$ și $f(1)=1+1=2$, deducem că f este continuă în $x=1$.

Concluzie. Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}-\{0\}$.

b) În acest caz funcția trebuie explicitată. Pentru calculul $\lim\limits_{n\to\infty}e^{nx}$ avem cazurile (după semnul lui x) $\lim\limits_{n\to\infty}e^{nx}=\begin{cases}0,x<0\\ 1,x=0\\ \infty,x>0\end{cases}$. Deci f are forma

1) dacă $x<0, f(x)=\frac{|x|+x^2\lim\limits_n e^{nx}}{1+\lim\limits_n e^{nx}}=|x|$;

2) dacă $x=0, f(0)=\frac{0+0\cdot 1}{1+1}=0$;

3) dacă $x>0$,

atunci $f(x)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_n\frac{e^{nx}\left(\frac{|x|}{e^{nx}}+x^2\right)}{e^{nx}\left(\frac{1}{e^{nx}}+1\right)}=\lim\limits_n\frac{\frac{|x|}{e^{nx}}+x^2}{\frac{1}{e^{nx}}+1}=\frac{x^2}{1}=x^2$.

În final, $f(x)=\begin{cases}|x|,x<0\\ 0,x=0\\ x^2,x>0\end{cases}=\begin{cases}-x,x<0\\ 0,x=0\\ x^2,x>0\end{cases}$.

Pe $(-\infty,0),(0,\infty)$ funcția f este continuă, fiind restricția unor funcții elementare.

Studiem continuitatea în $x=0$. Avem: $l_s(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0}f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 0}(-x)=0$,

$l_d(0)=\lim\limits_{x\searrow 0}f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0}x^2=0$ și $f(0)=0$, ceea ce arată că f este continuă în $x=0$.

Concluzie. Funcția f este continuă (pe $\mathbb{R}$).

c) Funcția este continuă pe $(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$, fiind definită prin intermediul restricției unor funcții elementare. Rămâne să studiem continuitatea în $x=-1$.

Avem: $l_s(-1)=\lim\limits_{x\nearrow -1}f(x)=-\alpha-1, l_d(-1)=\lim\limits_{x\searrow -1}f(x)=-2-3\alpha, f(-1)=-\alpha-1$.

Funcția f este continuă în $x=-1$, dacă $-\alpha-1=-2-3\alpha\Leftrightarrow\alpha=-\frac{1}{2}$.

Concluzie. Dacă $\alpha=-\frac{1}{2}$, funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$, iar dacă $\alpha\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$, atunci f este continuă pe $\mathbb{R}-\{-1\}$.

2) Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continuă în $x=0$ pentru care $f(x)-f\left(\frac{x}{3}\right)=x,\forall x\in\mathbb{R}^*, f(0)=\frac{1}{3}$.

R. În relația dată se pune în locul lui $x:\frac{x}{3},\frac{x}{3^2},...,\frac{x}{3^n}$ și avem egalitățile:

$f\left(\frac{x}{3}\right)-f\left(\frac{x}{3^2}\right)=\frac{x}{3}$,

$f\left(\frac{x}{3^2}\right)-f\left(\frac{x}{3^3}\right)=\frac{x}{3^2}$,

.....

$f\left(\frac{x}{3^n}\right)-f\left(\frac{x}{3^{n+1}}\right)=\frac{x}{3^n}$.

Adunând aceste relații, membru cu membru, cu aceea din enunț se obține

$f(x)-f\left(\frac{x}{3^{n+1}}\right)=x\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}\right)$ sau $f(x)-f\left(\frac{x}{3^{n+1}}\right)=x\frac{(1/3)^{n+1}-1}{(1/3)-1}$ sau

$f(x)-f\left(\frac{x}{x^{n+1}}\right)=\frac{3x}{2}\left[1-(1/3)^{n+1}\right](*)$.

Cum $\frac{x}{3^{n+1}}=x\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\xrightarrow[n]{}0$, iar f este continuă în $x=0$ se deduce $f\left(\frac{x}{3^{n+1}}\right)\xrightarrow[n]{}f(0)$.

Trecând în $(*)$ la limită după $n\to\infty$ rezultă $f(x)-f(0)=\frac{3x}{2}$, adică $f(x)=\frac{3x}{2}+\frac{1}{3}$.

4.4. OPERAȚII CU FUNCȚII CONTINUE

1. Continuitate punctuală, continuitate pe o mulțime

Deoarece definiția continuității se exprimă prin intermediul limitei de funcție (sau de șiruri), operațiile cu limite de funcții(de șiruri) și proprietățile lor se regăsesc la funcții continue. Operațiile algebrice și compunerea conservă continuitatea (punctuală sau pe o mulțime) altfel spus, efectuând operații algebrice sau compunere cu funcții continue (**într-un punct** sau **pe o mulțime**) se obțin tot funcții continue (**în acel punct** sau **pe acea mulțime**).

Mai precis are loc următoarea

Teoremă. Fie $f,g:E\to\mathbb{R}$, două funcții continue în $a\in E$(pe $A\subseteq E$), $\alpha\in\mathbb{R}$. Atunci:

1) Funcția $f+g$ este continuă în a (pe A).

Suma a două funcții continue este o funcție continuă.

2) Funcția αf este continuă în a (pe A).

Produsul dintre o constantă și o funcție continuă este o funcție continuă.

3) Funcția fg este continuă în a (pe A).

Produsul a două funcții continue este o funcție continuă.

4) Câtul $\frac{f}{g}$ este o funcție continuă în a (pe A), dacă $g(a)\neq 0\left(g(x)\neq 0,\forall x\in A\right)$

Câtul a două funcții continue este o funcție continuă.

5) Funcția f^g este continuă în a (pe A), dacă $f(a)>0\left(f(x)>0,\forall x\in A\right)$.

6) Funcția $|f|$ este continuă în a (pe A).

Modulul unei funcții continue este o funcție continuă.

7) $\max(f,g),\min(f,g)$ sunt continue în a (pe A).

Demonstrație. Rezultatele enunțate mai sus se deduc din rezultatele obținute pentru limite de funcții. De exemplu, pentru **1)** trebuie probat că $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)=f(a)+g(a)=(f+g)(a)$, unde în penultima egalitate am folosit continuitatea funcțiilor f,g în punctul a. Pentru **7)** precizăm că $\max\left(f(x),g(x)\right)=\begin{cases}f(x),f(x)\geq g(x)\\ g(x),f(x)<g(x)\end{cases},x\in E$ și

$$\min\left(f(x),g(x)\right)=\begin{cases}f(x),f(x)\leq g(x)\\ g(x),f(x)>g(x)\end{cases},x\in E.$$

Se stabilește ușor că: $\max\left(f(x),g(x)\right)=\frac{1}{2}\left[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\right]$ și

$$\min\left(f(x),g(x)\right)=\frac{1}{2}\left[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|\right],x\in E,$$

iar acum din **1)** și **6)** rezultă **7)**.

Pentru continuitatea pe A se utilizează definiția continuității pe o mulțime și într-un punct. ■

Observații. **1)** Proprietățile **1)** și **2)** se pot grupa în exprimarea: Dacă f,g sunt continue în a (pe A), $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, atunci funcția $\alpha f+\beta g$ este continuă în a (pe A). Dacă $\alpha=1,\beta=-1$, atunci $f-g$, adică **diferența** a două funcții continue este o funcție continuă.

2) Proprietățile **1)** și **3)** rămân valabile pentru un număr finit de funcții continue în a (pe A), $f_i:E\to\mathbb{R},i=\overline{1,n}$. Atunci $f_1+f_2+\ldots+f_n,f_1f_2\ldots f_n$ sunt, de asemenea, funcții continue în a (pe A).

3) Dacă în **1), 3), 5)** o funcție este continuă, iar cealaltă discontinuă în a, atunci $f+g,fg,\frac{f}{g}$ sunt discontinue în a.

Exemple. 1) Funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},h(x)=x^3+x^2+e^x$, este continuă pe $\mathbb{R}$, fiind suma a două funcții (elementare) continue pe $\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x^2$ (funcție polinomială), $g(x)=e^x$ (funcția exponențială).

2) Funcția $h:(0,\infty)\to\mathbb{R},h(x)=\sqrt{x}\ln x$, este continuă pe $(0,\infty)$, fiind produsul a două funcții (elementare) continue pe $(0,\infty)$, $f(x)=\sqrt{x}$ (funcția radical), $g(x)=\ln x$ (funcție logaritmică).

3) Funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},h(x)=\frac{e^x}{x^2+x+1}$, este continuă pe $\mathbb{R}$ fiind câtul a două funcții (elementare) continue pe $\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$ (funcția exponențială), $g(x)=x^2+x+1$ (funcție polinomială), $g(x)\neq 0,\forall x$.

4) Funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},h(x)=\left(x^2+1\right)^{3x}$, este continuă pe $\mathbb{R}$, deoarece $x^2+1>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

5) Funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},h(x)=\max\left(x+1,1-x^2\right)$, este continuă pe $\mathbb{R}$, deoarece funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=x+1,g(x)=1-x^2$ sunt funcții continue pe $\mathbb{R}$, ca funcții elementare (polinomiale).

2. Continuitatea funcțiilor compuse

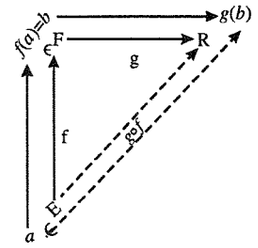
Un alt mod de a genera funcții continue îl constituie compunerea funcțiilor continue. Mai precis are loc următoarea

Teoremă. Fie $f:E\to F, g:F\to\mathbb{R}$.

1) Dacă f este continuă în $a\in E$, iar g este continuă în $f(a)=b$, atunci funcția $g\circ f$ este continuă în a.

2) Dacă f este continuă pe $A\subseteq E$, iar g este continuă pe $f(A)$, atunci $g\circ f$ este continuă pe A.

Compunerea a două funcții continue este o funcție continuă.



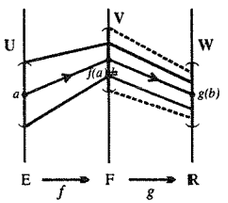


Fig.9

Demonstrație.

1) Fie șirul $(x_n), x_n\in E, \forall n, x_n\to a$. Deoarece f este continuă în a, rezultă $f(x_n)\to f(a)$. Fie șirul imagine $(f(x_n)), f(x_n)\in F, \forall n, f(x_n)\to b=f(a)$. Cum g este continuă în b, rezultă $g(f(x_n))\to g(b)$, adică $(g\circ f)(x_n)\to(g\circ f)(a)$.

Recapitulând avem: $x_n\in E, \forall n, x_n\to a$ pentru care $(g\circ f)(x_n)\to(g\circ f)(a)$, ceea ce arată că $g\circ f$ este continuă în a.

2) Se obține din definiția unei funcții continue pe o mulțime și **1)**. ■

Observații. **1)** Refaceți demonstrația de la 1) din teoremă, utilizând criteriul cu vecinătăți (Fig.9).

2) Dacă $a\in E\cap E'$ și $b=f(a)\in F\cap F'$, atunci **teorema exprimă proprietatea funcțiilor continue de a comuta cu limitele:** $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))=g\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)$.

3) În general, compunerea unui număr finit de funcții continue este o funcție continuă.

Exemple. 1) **Funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x)=2^{x^2+1}$ este continuă, fiind compunerea a două funcții continue (elementare), $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+1$ (funcție polinomială) și $g(x)=2^x$ (funcție exponențială).**

2) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x)=\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2+2}\right)$ **este o funcție continuă, fiind compunerea a două funcții continue (elementare)** $f:\mathbb{R}\to(0,\infty), g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+2}$ **(funcție rațională),** $g(x)=\ln x$ **(funcție logaritmică).**

3) $h:[-1,1]\to\mathbb{R}, h(x)=\sqrt{1-x^2}$ **este continuă, fiind compunerea a două funcții continue (elementare)** $f:[-1,1]\to[0,\infty), g:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=1-x^2, g(x)=\sqrt{x}$.

Probleme propuse

1 .Să se studieze continuitatea funcțiilor $f:E\to\mathbb{R}$ (E fiind domeniul maxim de definiție) de mai jos în punctele indicate:

1) $f(x)=x^2-1, a=1$; 2) $f(x)=\sqrt{x+1}, a=0$; 3) $f(x)=\begin{cases}x-1, x\le 1\\ 1-x, x>1\end{cases}, a=1$

4) $f(x)=\begin{cases}x^2-5x+1, x\le 2\\ -5, x>2\end{cases}, a=2$; 5) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-16}{x-4}, x\ne 4\\ 8, x=4\end{cases}, a=4$;

6) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 5x}{x}, x\ne 0\\ 5, x=0\end{cases}, a=0$; 7) $f(x)=\begin{cases}\ln(x+1), x\ge 0\\ x^2+x, x<0\end{cases}; a=0$.

2 .1) Să se studieze continuitatea funcțiilor $f:E\to\mathbb{R}$ de mai jos în punctele indicate:

1) $f(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbb{Q}\\ 0, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}, a=1, a=\sqrt{2}$; 2) $f(x)=\begin{cases}x^2, x\in\mathbb{Q}\\ x, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}, a=\pm 1$.

(f de la 1) este funcția lui Dirichlet, funcția caracteristică a lui $\mathbb{Q}$)

2) Dați exemplu de funcție continuă într-un singur punct; în două puncte.

3 .Să se stabilească dacă următoarele funcții pot fi prelungite prin continuitate în punctele indicate:

1) $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-1}{x^3+x^2-x-1}, a=1$; 2) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=x\cos\frac{1}{x}, a=0$;

3) $f:(-1,\infty)-\{0\}\to\mathbb{R}, f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}, a=0$; 4) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{2^{-x^2}-1}{x^2}, a=0$.

4 .Să se determine constantele $a,b,c\in\mathbb{R}$ pentru care au loc, pe rând, egalitățile:

1) $\frac{1}{x^2-1}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}, x\ne\pm 1$; 2) $\frac{1}{(x^2-4)(x+1)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{x+2}, x\ne\pm 2, x\ne -1$.

5 .Să se determine parametrii reali α,β pentru care funcțiile de mai jos $f:E\to\mathbb{R}$, sunt continue în punctele indicate:

1) $f(x)=\begin{cases}3x+\alpha-1, x\le 2\\ x^2+\alpha x-2, x>2\end{cases}, a=2$; 2) $f(x)=\begin{cases}\frac{\alpha(x^2-25)}{x-5}, x>5\\ -3\alpha x+1, x\le 5\end{cases}, a=5$;

3) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{\alpha^2x+1}, x\geq 1\\ 2\alpha x+3, x<1\end{cases}, a=1$; 4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-2}{x-1}, x<1\\ x+\alpha, x\geq 1\end{cases}, a=1$;

5) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\sin(x+1)}{x^2+4x+3}, x>-1\\ 2\alpha x+1, x\leq -1\end{cases}, a=-1$; 6) $f(x)=\begin{cases}\alpha x+\beta, x<-1\\ 1, x=-1\\ \alpha x^2+2, x>-1\end{cases}$;

7) $f(x)=\begin{cases}e^x, x\leq 0\\ \alpha x^2+\beta x+1, x>0\end{cases}, a=0$ și există $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$.

6 .Pentru funcția $f:E\to\mathbb{R}$ dată și punctul a indicat, stabiliți natura punctului de discontinuitate:

1) $f(x)=\begin{cases}x^2+5, x>1\\ 3, x\leq 1\end{cases}, a=1$; 2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, x>0\\ 2x, x\leq 0\end{cases}, a=0$; 3) $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}, a=0$;

4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}, a=0$; 5) $f(x)=[3x], a=1$; 6) $f(x)=\begin{cases}2^{\frac{1}{(x-1)^2}}, x\neq 1\\ 1, x=1\end{cases}, a=1$;

7) $f(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbb{Q}\\ 0, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}, a=\dfrac{1}{2}$.

7 .Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, nu este monotonă pe nici un interval $I\subseteq\mathbb{R}$, în cazurile:

1) $f(x)=\begin{cases}x, x\in\mathbb{Q}\\ 1-x^2, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$; 2) $f(x)=\begin{cases}x^3, x\in\mathbb{Q}\\ 9x, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$; 3) $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}, 0\in I$.

8 .Să se determine domeniul de continuitate al funcției $f:E\to\mathbb{R}$, în cazurile:

I. 1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$; 2) $f(x)=\sqrt{x+1}$; 3) $f(x)=e^x+\ln x$; 4) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+2}+\sin x$;

5) $f(x)=(x^2+x)\ln x$; 6) $f(x)=\sqrt{x-1}e^x$; 7) $f(x)=|x^2+x|+1$; 8) $f(x)=\max(x,2x+1)$;

9) $f(x)=\min(-1,x^2-1)$; 10) $f(x)=\max(x,\sqrt{x-1})$; 11) $f(x)=\min(x+1,2^x)$.

II. 1) $f(x)=\begin{cases}2x+1, x\leq -1\\ 1-2x, x>-1\end{cases}$; 2) $f(x)=\begin{cases}1, x\in(-1,1)\\ 0, x\in\{2,3\}\end{cases}$; 3) $f(x)=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, x>0\\ 0, x=0\\ -1, x<0\end{cases}$;

4) $f(x)=\cos(\operatorname{sgn}(x))$; 5) $f(x)=x\operatorname{sgn}(x)$; 6) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{1}{x}\right), x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$;

7) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-25}{x-5}, x\neq 5\\ 10, x=5\end{cases}$; 8) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3^{x-1}-1}{x-1}, x<1\\ \ln(x+2), x\geq 1\end{cases}$; 9) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}, x\neq 0\\ \dfrac{1}{3}, x=0\end{cases}$.

III. 1) $f(x)=\begin{cases}x, x\in\mathbb{Q}\\ x^2, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$; 2) $f(x)=\begin{cases}x^2, x\in\mathbb{Q}\\ 5x+6, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$; 3) $f(x)=\begin{cases}x^2, x\in\mathbb{Q}\\ 2, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$.

IV. 1) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n+x^2}{x^{3n}+1}$; 2) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+x^n(x^2+5)}{x(x^n+2)}$; 3) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{nx}-1}{e^{nx}+1}$.

9.Să se determine parametrii $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ pentru care funcțiile următoare sunt continue pe domeniul de definiție, în cazurile:

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2+\alpha x, x\leq 1\\ x^3+\alpha^3, x>1\end{cases}$; 2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}, x\neq 3\\ \alpha, x=3\end{cases}$;

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^4+\alpha x+2, x<0\\ \beta+\ln(1+x^4), x\geq 0\end{cases}$ și există $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$;

4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2-1, x\leq 2\\ \alpha x+\beta, x>2\end{cases}$ și există $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$;

5) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x+\min(x,2\alpha x+3), x\leq 1\\ \alpha x^2+\max(x^2,\alpha x-1), x>1\end{cases}$.

10.1) Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funcții continue în $a\in\mathbb{R}$. Să se arate că funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x)=\begin{cases}f(x), x\in\mathbb{Q}\\ g(x), x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$ este continuă în a, dacă și numai dacă $f(a)=g(a)$.

2) Să se determine $\alpha\in\mathbb{R}$ astfel încât domeniul de continuitate al funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x[x], x\in\mathbb{Q}\\ \alpha x, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$ este un interval.

11*.Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, două funcții continue cu proprietatea $f(x)=g(x),\forall x\in\mathbb{Q}$. Atunci $f(x)=g(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

12. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ verifică inegalitatea dată, atunci f este continuă în $x=0$, în fiecare din cazurile:

a) $|f(x)|\leq Mx, M>0,\forall x\in\mathbb{R}$; b) $|f(x)-x^2|\leq Mx^2, M>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

13.Să se determine funcțiile care satisfac una din condițiile următoare:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuă în $x=0$ și $f(2x)=f(3x),\forall x\in\mathbb{R}$.

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continuă în $x=0, f(3x)=f(x)+x,\forall x\in\mathbb{R}$.

14.Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Precizați continuitatea funcțiilor f,g și apoi pentru funcțiile $f+g, fg, \dfrac{f}{g}$, în cazurile:

1) $f(x)=\begin{cases}-x, x\geq 0\\ 2x, x<0\end{cases}, g(x)=\begin{cases}1-2x, x<1\\ 2-3x, x\geq 1\end{cases}$; 2) $f(x)=\begin{cases}x+1, x\geq -1\\ 3x+1, x<-1\end{cases}, g(x)=1-3x$;

3) $f(x)=\begin{cases}x+2, x\leq 1\\ 3, x>1\end{cases}, g(x)=\begin{cases}-1, x>-1\\ 1, x\leq 1\end{cases}$; 4) $f(x)=\begin{cases}2x, x\leq 0\\ 3x, x>0\end{cases}, g(x)=\begin{cases}2x-1, x\leq 1\\ 3x-2, x>1\end{cases}$;

15.Fie $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, unde $h(x)=\max(f(x),g(x)), x\in\mathbb{R}$. Studiați continuitatea lui h dacă

$f(x)=\begin{cases}2x+\alpha, x\le 1\\ x-1, x>1\end{cases}, g(x)=\begin{cases}x-1, x\le 1\\ x-\alpha, x>1\end{cases}, \alpha\in\mathbb{R}.$

16. **Fie $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, unde $h(x)=g(f(x)), x\in\mathbb{R}$. Studiați continuitatea lui h în cazurile:**

I. 1) $f(x)=x+1, g(x)=[x]$; 2) $f(x)=\begin{cases}-1, x<1\\ 1, x\ge 1\end{cases}, g(x)=\operatorname{sgn}(x)$;

3) $f(x)=\begin{cases}2x, x\in\mathbb{Q}\\ x^2, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}, g(x)=\begin{cases}x^3, x\in\mathbb{Q}\\ 9x, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$.

II. ($\alpha\in\mathbb{R}$) 1) $f(x)=\begin{cases}x+\alpha, x>1\\ \alpha x+2, x\le 1\end{cases}, g(x)=\begin{cases}3x+2, x\le -1\\ 1+2x, x>-1\end{cases}$;

2) $f(x)=\begin{cases}\alpha x, x\ge 1\\ 2x, x<1\end{cases}, g(x)=\begin{cases}-x+\alpha, x<-1\\ x+2\alpha, x\ge -1\end{cases}$.

4.5. PROPRIETĂȚI ALE FUNCȚIILOR CONTINUE

1. Proprietăți locale

Proprietățile locale de care se bucură limitele de funcții, le regăsim și la continuitatea punctuală a funcțiilor. Mai precis are loc următoarea

Teoremă 1) (de mărginire locală a unei funcții continue). Dacă $f:E\to\mathbb{R}$ **este o funcție continuă într-un punct** $a\in E$, atunci există o vecinătate a punctului pe care f este mărginită.

2) (pentru semnul unei funcții continue, nenule, într-un punct). Dacă $f:E\to\mathbb{R}$ **este o funcție continuă** în $a\in E$ și $f(a)\neq 0$, atunci există o vecinătate a lui a pe care f nu-și schimbă semnul.

Demonstrație. 1) Din definiția continuității unei funcții într-un punct a avem că $\forall\varepsilon>0$, există $\delta(a,\varepsilon)=\delta>0$ astfel încât dacă $|x-a|<\delta$ să rezulte $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$. Dar ultima egalitate se scrie: $f(a)-\varepsilon<f(x)<f(a)+\varepsilon$, ceea ce înseamnă că pentru $\varepsilon>0$, dat, funcția este mărginită pentru $x\in(a-\delta,a+\delta)=U_a$ (unde U_a reprezintă o vecinătate a lui a).

2) Presupunem că $f(a)>0$. Din definiția continuității lui f în a rezultă $-f(a)<f(x)-f(a)<f(a)$, pentru $\varepsilon=f(a)$, adică $f(x)>0$ pentru $x\in(a-\delta,a+\delta)$. Analog, dacă $f(a)<0$. ■

Observații. 1) Această teoremă este o teoremă de existență locală, pentru funcții continue, în sensul că ne spune ce se întâmplă pe o anumită vecinătate a unui punct în care funcția este continuă.

2) Arătați că dacă $f:I\to\mathbb{R}$ este continuă cu proprietatea că oricare ar fi $(a,b)\subset I$, există $c\in(a,b)$ astfel încât $f(c)=0$, atunci $f(x)=0, \forall x\in I$.

2. Proprietăți pe intervale

1) Proprietatea lui Darboux

Funcțiile continue au proprietatea remarcabilă de a transforma un interval oarecare tot într-un interval, sau altfel spus, o funcție continuă definită pe un interval nu poate „sări" de la o valoare la alta, fără să treacă prin toate valorile intermediare. Această proprietate nu este caracteristică numai funcțiilor continue. Există funcții care fără să fie continue pe un interval au această proprietate. De exemplu, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin\frac{1}{x}, x\neq 0$ și $f(0)=0$.

Are loc următoarea

Definiție. Fie I un interval. Se spune că funcția $f:I\to\mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux pe intervalul I, dacă pentru orice puncte $a,b\in I, a<b$ și oricare număr real λ situat între $f(a)$ și $f(b)$ (dacă $f(a)<f(b)$) sau între $f(b)$ și $f(a)$ (dacă $f(b)<f(a)$), **există** cel puțin un punct x_λ **din intervalul** (a,b) astfel încât $f(x_\lambda)=\lambda$.

Observații. 1) Deci, o funcție care are proprietatea lui Darboux pe un interval I, dacă ia două valori distincte, atunci ia toate valorile cuprinse între ele. Din acest motiv proprietatea se mai numește și **proprietatea valorilor intermediare**.

2) Trebuie observat că dacă λ este o valoare intermediară între $f(a)$ și $f(b)$, atunci $x_\lambda\in(a,b)$ și nu $x_\lambda\in I-(a,b)$, adică x_λ **este un punct situat între abscisele** a **și** b **pentru care s-au considerat valorile** $f(a)$ și $f(b)$ și nu oricum din I.

3) Altfel formulată proprietatea: **pentru** λ **valoare intermediară între** $f(a)$ și $f(b)$, **ecuația** $f(x)=\lambda$, **are cel puțin o soluție** x_λ în intervalul (a,b).

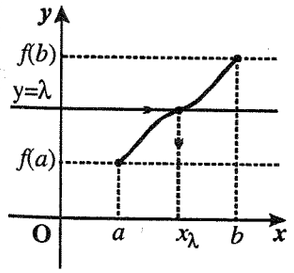


Fig.10

4) **Geometric**, o funcție care are proprietatea lui Darboux pe intervalul $[a,b], a<b$ și $f(a)<f(b)$, se exprimă prin aceea că o dreaptă orizontală $y=\lambda$ situată între dreptele orizontale $y=f(a)$ și $y=f(b)$ intersectează graficul lui f cel puțin într-un punct de abscisă $x_\lambda\in(a,b)$ (Fig.10).

5) Pentru a arăta că o funcție $f:I\to\mathbb{R}$, I interval, **nu are proprietatea lui Darboux pe** I, se aleg două puncte $a,b\in I$, se calculează $f(a),f(b)$ și se alege o valoare $\lambda\in(f(a),f(b))$ sau $\lambda\in(f(b),f(a))$ pentru care se arată că ecuația $f(x)=\lambda$ **nu are soluție în intervalul** (a,b).

6) Se arată că dacă $I\xrightarrow{f}J\xrightarrow{g}\mathbb{R}$ ($I,J\subseteq\mathbb{R}$, **intervale**) sunt funcții cu proprietatea lui Darboux, atunci $g\circ f$ este, de asemenea, o funcție cu proprietatea lui Darboux.

Exemplu. **Funcția** $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x+1, x\in[-1,0]\\ x, x\in(0,1]\end{cases}$ **nu are proprietatea lui Darboux pe** $[-1,1]$.

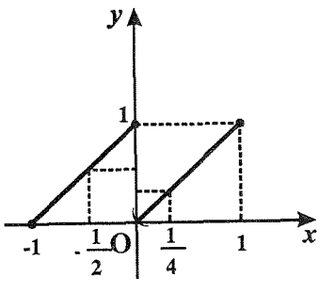


Fig.11

R. **Fie** $a=-\frac{1}{2}<b=\frac{1}{4}$ **pentru care** $f(a)=\frac{1}{2}, f(b)=\frac{1}{4}$ **(Fig.11). Fie** $\lambda=\frac{1}{3}\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$.

Constatăm că ecuația $f(x)=\lambda$**, nu are soluție în** $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$**. Într-adevăr, dacă ar exista** $x_\lambda\in\left(-\frac{1}{2},0\right]$**, atunci** $f(x_\lambda)=x_\lambda+1=\frac{1}{3}$**, adică** $x_\lambda=-\frac{2}{3}\notin\left(-\frac{1}{2},0\right]$**. De asemenea, dacă ar exista** $x_\lambda\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$**, atunci** $f(x_\lambda)=x_\lambda=\frac{1}{3}$**. Dar** $x_\lambda\notin\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$**. În final, ecuația** $f(x)=\frac{1}{3}$ **nu are soluție în intervalul** $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$**. Să observăm că funcția dată are pe** $x=0$ **ca punct de discontinuitate de speța întâi.**

Următorul rezultat spune că dacă o funcție are proprietatea lui Darboux pe un interval, atunci ea nu poate avea punct de discontinuitate de speța întâi.
Cu această observație rezolvarea exercițiului precedent este simplă. Din $l_s(0)=1\neq l_d(0)=0$ se deduce că $x=0$ este punct de discontinuitate de prima speță și deci f nu are proprietatea lui Darboux pe $[-1,1]$.

Să observăm că $f([-1,1])=[0,1]$, adică f duce intervalul tot într-un interval (fără ca f să fie continuă).
Mai precis are loc următoarea

Teoremă. Dacă $f:I\to\mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux pe I și dacă există una din limitele laterale într-un punct $x_0\in I$, atunci această limită este egală cu $f(x_0)$.

Demonstrație. Presupunem că există $l_s(x_0)\in\mathbb{R}$ și $l_s(x_0)<f(x_0)$. Atunci există $\alpha\in\mathbb{R}$ astfel încât $l_s(x_0)<\alpha<f(x_0)$. Din $l_s(x_0)<\alpha$ se deduce că există $V\in\vartheta(x_0)$ astfel încât $\forall x<x_0, x\in V\cap I$ să avem $f(x)<\alpha$. Fie $a\in V\cap I, a<x_0$. Atunci $f(a)<\alpha<f(x_0)$. Deci $\forall x\in(a,x_0)$, avem $x\in V$ și deci $f(x)<\alpha$, ceea ce arată că f nu ia valoarea α în nici un punct cuprins între a și x_0, fals. Deci $l_s(x_0)=f(x_0)$, adică f este continuă la stânga în x_0. Analog, dacă există $l_d(x_0)\in\mathbb{R}$, se deduce $l_d(x_0)=f(x_0)$. ■

Observație. Deci o funcție cu proprietatea lui Darboux poate avea doar discontinuități de speța a doua.
Din teoremă rezultă

Corolar. 1) Dacă $f:I\to\mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux pe I, atunci ea nu are nici un punct de discontinuitate de prima speță.

2) Dacă $f:I\to\mathbb{R}$ are un punct de discontinuitate de prima speță, atunci f nu are proprietatea lui Darboux.

Observații. **1)** Ținând seamă de **1)** și de teorema de la Monotonie și discontinuitate rezultă că pentru o funcție monotonă $f:I\to\mathbb{R}, I$ interval, proprietatea lui Darboux și continuitatea pe I sunt echivalente.
2) Pentru a demonstra că $f:I\to\mathbb{R}$, (I interval) nu are proprietatea lui Darboux se alege $x_0\in I$ care să fie punct de discontinuitate de prima sau a doua speță.

Exemple. **1) Să se arate că funcția** $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=x-[x]$ **nu are proprietatea lui Darboux pe** $[-1,1]$.

R. **Funcția explicitată este:** $f(x)=\begin{cases}x-1, x\in[-1,0)\\ x, x\in[0,1)\\ 0, x=1\end{cases}$. **Din** $l_s(0)=-1, l_d(0)=0=f(0)$, **deducem că** $x=0$ **este punct de discontinuitate de speța întâi. Prin urmare** f **nu are proprietatea lui Darboux pe** $[-1,1]$.

2) Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x, x\in\mathbb{Q}\\ x^3, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$ **nu are proprietatea lui Darboux pe** $\mathbb{R}$.

R. **Punctele de continuitate ale lui** f **se obțin rezolvând ecuația** $x=x^3$. **Găsim** $x\in\{\pm1,0\}$. **Restul punctelor sunt de discontiniutate de speța a doua.**
Luăm $a=\sqrt{8}, b=\sqrt{10}$ **pentru care** $f(a)=8\sqrt{8}, f(b)=10\sqrt{10}$. **Fie** $\lambda=27\in(8\sqrt{8},10\sqrt{10})$. **Arătăm că nu există** $x_\lambda\in(a,b)$ **pentru care** $f(x_\lambda)=\lambda$. **Dacă ar exista** $x_\lambda\in(a,b)\cap\mathbb{Q}$ **pentru care** $f(x_\lambda)=\lambda$ **am avea** $x_\lambda=27$, **care însă nu aparține intervalului** (a,b). **De asemenea, pentru** $x_\lambda\in(a,b)\cap(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$ **din** $f(x_\lambda)=\lambda$ **rezultă** $x_\lambda^3=27$, **adică** $x_\lambda=3$, **care nu**

aparține lui $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$. Deci, ecuația $f(x)=\lambda$, nu are soluție în (a,b), adică f nu are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$.

3) Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbb{Q}\\ 0, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$, nu are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$.

R Deoarece $f(\mathbb{R})=\{0,1\}$, pentru $\lambda\in(0,1)$, ecuația $f(x)=\lambda$ nu are soluție în $\mathbb{R}$.

Deci, f nu are proprietatea lui Darboux.

Următorul rezultat afirmă că o clasă de funcții cu proprietatea lui Darboux este cea a funcțiilor continue pe un interval. Are loc următoarea

Teoremă (Cauchy-Weierstrass-Bolzano). Orice funcție continuă $f:I\to\mathbb{R}$, I interval, are proprietatea lui Darboux pe I.

Observații **1)** Reciproca teoremei este falsă. N-avem decât să luăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin\frac{1}{x}$, dacă $x\neq 0$ și $f(0)=0$, care are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$, dar este discontinuă în $x=0$.

2) Cerința ca f să fie definită pe un interval este esențială.

Funcția $f:(-1,0)\cup(0,1)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}-1, x\in(-1,0)\\ 1, x\in(0,1)\end{cases}$ este continuă, dar nu ia valori intermediare între -1 și 1, deoarece $\operatorname{Im} f=\{-1,1\}$.

3) Dacă $f:I\to\mathbb{R}$ (I interval) are proprietatea lui Darboux, atunci $\operatorname{Im} f$ conține un interval, adică o mulțime infinită de puncte (între $f(a)$ și $f(b)$ - presupunem $f(a)<f(b)$ - $a,b\in I$ se află toate punctele intervalului $(f(a),f(b))$, adică $(f(a),f(b))\subseteq\operatorname{Im} f$).

Dacă $f(I)$ nu este interval, atunci f nu are proprietatea lui Darboux. (De ex. funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x, x\in(0,1]\\ 3, x=0\end{cases}$ nu are proprietatea lui Darboux deoarece $f([0,1])=(0,1]\cup\{3\}$ care nu este interval).

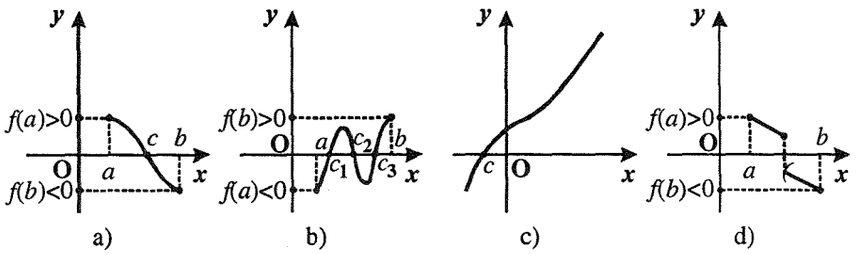
Deci, dacă $f:I\to\mathbb{R}$ are un număr finit (≥ 2) de valori, f nu are proprietatea lui Darboux.

Alte consecințe importante ale acestei teoreme au aplicabilitate în rezolvarea ecuațiilor (pentru determinarea unei rădăcini, cu o anumită acuratețe prin **metoda bisecției intervalului**) și a inecuațiilor (prin studiul semnului unei funcții continue).

Corolar 1 (de localizare a unei rădăcini). a) Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă pentru care $f(a)f(b)\leq 0$. Atunci există cel puțin un punct $c\in[a,b]$ astfel încât $f(c)=0$ (Fig.12 a), b)).

Dacă o funcție continuă are valori de semne contrare la capetele unui interval, atunci ea se anulează cel puțin o dată pe interval.

b) Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă pentru care $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty \text{ și } \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty\right)$ sau $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty \text{ și } \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty\right)$, atunci există $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(c)=0$ (Fig. 12 c)).



a) b) c) d)

Fig.12

Demonstrație a) Din $f(a)f(b)\leq 0$ se deduce $f(a)\leq 0$ și $f(b)\geq 0$ sau $f(a)\geq 0$ și $f(b)\leq 0$. Cum f este continuă, are proprietatea lui Darboux, adică f nu poate sări de la o valoare negativă $f(a)$ (în primul caz) la alta pozitivă $f(b)$ fără să treacă prin zero. Deci, există $c\in[a,b]$ astfel încât $f(c)=0$.

b) Din $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, există $a<0$ pentru care $f(a)<0$, iar din $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, există $b>0$, pentru care $f(b)>0$. Deci $f(a)\cdot f(b)<0$. Din a) rezultă că există $c\in(a,b)$ astfel încât $f(c)=0$. ■

Observații **1)** Prima parte a corolarului se poate reformula spunând că ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție în intervalul $[a,b]$.

2) Dacă $f(a)f(b)<0$ **(inegalitate strictă)**, atunci există cel puțin un element $c\in(a,b)$ **(interval deschis)** astfel încât $f(c)=0$.

3) Dacă f este strict monotonă, atunci **soluția este unică** (deoarece f este injectivă).

4) Dacă f este discontinuă pe $[a,b]$, atunci din $f(a)f(b)<0$ nu mai rezultă cu necesitate că există $c\in(a,b)$ cu $f(c)=0$ (Fig.12 d)).

Exemple. 1) **Ecuația $x^n-a=0, a\geq 0, n\in\mathbb{N}^*$, are cel puțin o rădăcină reală.**

R. **Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^n-a$, funcție continuă. Pe de altă parte $f(0)=-a\leq 0$, $f(a+1)=(a+1)^n-a>1+na-a>0$. Deci, există $c\in(0,a+1)$ astfel încât $f(c)=0$. Prin acest exmplu am arătat existența soluției ecuației $x^n-a=0, n\in\mathbb{N}^*, a>0$, pe care am abordat-o în anii precedenți.**

2) **Să se arate că ecuația $x+e^x=0$ are exact o soluție în intervalul $[-1,1]$.**

R. **Fie $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=x+e^x$, funcție continuă (ca sumă de funcții continue).**

Din $f(-1)f(1)=\left(-1+\frac{1}{e}\right)(1+e)<0$ rezultă că există $c\in(-1,1)$ cu $f(c)=0$. Funcția f fiind strict crescătoare, este injectivă. Deci soluția găsită este unică.

3) **Să se arate că ecuația $x^3+x^2+5x+2006=0$ are cel puțin o soluție pe $\mathbb{R}$.**

R. **Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+x^2+5x+2006$, continuă pentru care avem $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$. Conform punctului b) al corolarului există $c\in\mathbb{R}$ pentru care $f(c)=0$.**

Observație. Analog se arată că ecuația $f(x)=0$, unde $f(x)$ este funcție polinomială de grad impar, are cel puțin o soluție reală.

Corolar 2 (Criteriu ca o funcție continuă să aibă punct fix). Fie $f:[0,1]\to[0,1]$ o funcție continuă. Atunci ecuația $x-f(x)=0$ are cel puțin o soluție în $[0,1]$.

O astfel de soluție se numește **punct fix** pentru f.

Deci, $c\in[0,1]$ **este punct fix pentru** f dacă $f(c)=c$.

Demonstrație. Se consideră funcția $g:[0,1]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)-x$, care este o funcție continuă (diferență de funcții continue).

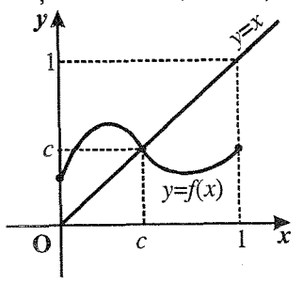


Fig.13

Avem $g(0)=f(0)\geq 0, g(1)=f(1)-1\leq 0$, adică $g(0)g(1)\leq 0$. Conform corolarului precedent există $c\in[0,1]$ astfel încât $g(c)=0$, adică $f(c)=c$. ■

Observații. 1) Acest rezultat spune că plecând continuu din punctul $(0,f(0))$ în punctul $(1,f(1))$, graficul este tăiat cel puțin într-un punct de prima bisectoare $y=x$ (Fig.13).

2) Un rezultat similar are loc dacă în loc de f

continuă impunem ca f să fie monotonă pe $[0,1]$. Are loc teorema lui Knaster: Dacă $f:[0,1]\to[0,1]$ este o funcție monoton crescătoare, atunci există $c\in[0,1]$ astfel încât $f(c)=c$.

3) Dacă intervalul nu este închis, concluzia nu mai este valabilă. De exemplu $f:(0,1)\to(0,1), f(x)=x^2$, n-are punct fix.

Exemple. 1) **Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, două funcții continue pentru care $f(a)<g(a)$, $f(b)>g(b)$. Să se arate că există $c\in(a,b)$ astfel încât $f(c)=g(c)$.**

Interpretare geometrică.

R. **Se consideră funcția continuă $h:[a,b]\to\mathbb{R}, h(x)=f(x)-g(x)$ pentru care avem $h(a)<0$, $h(b)>0$. Cum h are proprietatea lui Darboux, există $c\in(a,b)$ cu $h(c)=0$, adică $f(c)=g(c)$. Graficele celor două funcții se taie în $x=c$.**

2) **Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, continuă. Să se arate că există $c\in[a,b]$ astfel încât $f(c)=\frac{f(a)+f(b)}{2}$.**

R. **Presupunem că $f(a)<f(b)$. Atunci $f(a)<\frac{f(a)+f(b)}{2}<f(b)$. Deoarece f este continuă, iar $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ este o valoare intermediară, f are proprietatea lui Darboux pe $[a,b]$ și deci există $c\in[a,b]$ astfel încât $f(c)=\frac{f(a)+f(b)}{2}$.**

Dacă $f(a)=f(b)$, atunci $\frac{f(a)+f(b)}{2}=f(a)$ și se ia $c=a$.

Următorul rezultat este important în **rezolvarea inecuațiilor**. Practic acum avem argumentarea rezolvării acestora din anii precedenți. Avem

Corolar 3 (Semnul unei funcții continue). Fie $f:I\to\mathbb{R}, I$ interval, f continuă, care nu se anulează pe I. Atunci f are același semn pe I.

O funcție continuă care nu se anulează pe un interval, păstrează semn constant pe tot intervalul.

Demonstrație. Vom demonstra prin reducere la absurd. Presupunem că există $a,b\in I$ $a<b$ în care f ia valori de semne contrare, adică astfel încât $f(a)f(b)<0$. Din corolarul 1. a) se deduce că există $c\in(a,b)\subset I$ astfel încât $f(c)=0$, contradicție. În concluzie f are semn constant pe I. ■

Procedeu practic de rezolvare a inecuațiilor $f(x)>(\geq,<,\leq)0, x\in D$.

1) Se rezolvă ecuația $f(x)=0$ și se ordonează crescător soluțiile situate în domeniul lui f: $x_1<x_2<\ldots<x_n$.

2) Pentru a determina semnul lui f pe intervalul (x_i, x_{i+1}) (adică semnul lui f între două rădăcini consecutive) se alege un punct convenabil $c_i \in (x_i, x_{i+1})$ şi se calculează valoarea lui f în acest punct, adică $f(c_i)$. Semnul acestui număr este semnul lui f pe tot intervalul (x_i, x_{i+1}). Analog, procedăm pentru semnul lui f la stânga lui x_1 şi la dreapta lui x_n.

3) Dacă rădăcinile lui f sunt simple, atunci dacă am stabilit semnul lui f pe un interval (x_i, x_{i+1}), atunci pe intervalele vecine $(x_{i-1}, x_i), (x_{i+1}, x_{i+2})$ avem semne contrare celui de pe (x_i, x_{i+1}). Se repetă procedeul până se epuizează domeniul lui f (semnele alternează).

Exemplu . Să se rezolve inecuaţiile:

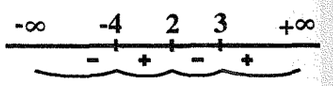
a) $x^3 - x^2 - 14x + 24 < 0$; **b)** $\dfrac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x - 2} \geq 0$; **c)** $\dfrac{\lg^2 x - 3\lg x + 4}{\lg x - 1} < 2$.

R . a) Funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$ **este continuă. Ecuaţia** $f(x) = 0$ **are soluţiile** $x_1 = -4, x_2 = 2, x_3 = 3$ **. Deoarece** f **este continuă şi nu se anulează pe intervalele** $(-\infty, -4), (-4, 2), (2, 3), (3, \infty)$, f **are semn constant pe fiecare interval.**

Din $f(-5) = -56 < 0, -5 < -4$ **se deduce** $f(x) < 0, \forall x < -4$ **. Din** $f(0) = 24 > 0, 0 \in (-4, 2)$ **rezultă** $f(x) > 0, \forall x \in (-4, 2)$ **. Era de aşteptat ca** $f(x) > 0, \forall x \in (-4, 2)$, **deoarece** $f(x) < 0, \forall x < -4$, **iar în** $x = -4$, $f(-4) = 0$ **şi** $x = -4$ **este rădăcină simplă pentru** $f(x) = 0$ **. Dacă** $x \in (2, 3)$, **atunci** $f(x) < 0$, **pentru că** $x = 2$ **este rădăcină simplă a ecuaţiei** $f(x) = 0$ **. Analog,** $f(x) > 0, \forall x > 3$ **. Aceste rezultate se trec în tabelul de semn al funcţiei,**

x	$-\infty$	-4	2	3	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0 $+$	0	$-$ 0	$+$

sau pe axa reală

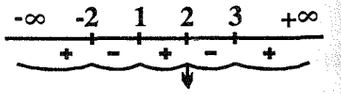


Deci, $f(x) < 0$ **dacă** $x \in (-\infty, -4) \cup (2, 3)$ **.**

b) Se impune condiţia $x - 2 \neq 0, x \neq 2$ **. Se rezolvă ecuaţia** $f(x) = 0$ **şi se obţin soluţiile** $x_1 = -2$, $x_2 = 1, x_3 = 3$ **. Observăm că toate rădăcinile sunt simple. Este suficient să găsim semnul lui** f **pe un interval şi apoi pe celelalte intervale, alternăm semnele. Pentru** $x = 0 \in (-2, 1), f(0) = -3 < 0$ **. Tabelul de semn pentru** f **este**

x	$-\infty$	-2	1	2	3	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0 $-$	0 $+$	$\|$	$-$	0 $+$

sau pe axa reală

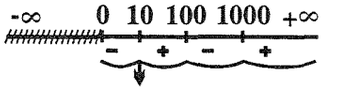


Săgeata în dreptul lui $x = 2$**, ne spune că în acest punct funcţia nu este definită. De aici** $f(x) \geq 0$ **dacă** $x \in (-\infty, -2] \cup [1, 2) \cup [3, \infty)$ **.**

c) Se impun condiţiile: $x > 0, \lg x - 1 \neq 0$**, adică** $x > 0, x \neq 10$ **. Se aduce inecuaţia la forma echivalentă** $f(x) = \dfrac{\lg^2 x - 5\lg x + 6}{\lg x - 1} < 0$**. Ecuaţia** $f(x) = 0$ **are soluţiile** $x_1 = 100, x_2 = 1000$ **. Pentru** $x = 1, f(1) = -6 < 0$ **. Rădăcinile fiind simple, tabelul de semn are forma**

x	0	10	100	1000	$+\infty$
$f(x)$	$-$ $\|$	$+$ 0	$-$	0	$+$

sau pe axa reală



Deci, $f(x) < 0$ **dacă** $x \in (0, 10) \cup (100, 1000)$ **.**

Următorul rezultat afirmă că o funcţie continuă duce un interval într-un interval. Mai precis are loc următorul

Corolar 4. Fie $f: E \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi un interval $I \subseteq E$. Atunci mulţimea $f(I)$ este un interval (Fig. 14. a), b)).

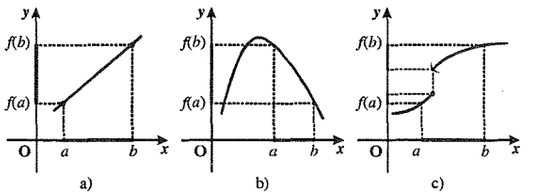


Fig. 14

Demonstraţie. Trebuie probat că $\forall \alpha, \beta \in f(I), \alpha < \beta$, avem $[\alpha, \beta] \subseteq f(I)$.

Dacă $\alpha, \beta \in f(I)$, atunci există $a, b \in I$ astfel încât $f(a) = \alpha, f(b) = \beta$. Fie $\lambda \in [\alpha, \beta]$. Funcţia f fiind continuă are proprietatea lui Darboux. Deci există $x_\lambda \in [a, b]$ astfel încât $f(x_\lambda) = \lambda$, ceea ce arată că $\lambda \in f(I)$. Deci $[\alpha, \beta] \subseteq f(I)$. ■

Observaţii. 1) Dacă f nu este continuă pe I, atunci $f(I)$ poate să nu mai fie interval (Fig. 14. c)).

2) Cu ajutorul acestui corolar se poate demonstra riguros surjectivitatea unor funcţii elementare.

Exemple .1) Funcţia $f: \mathbb{R} \to [-1, 1], f(x) = \sin x$ **este continuă şi** $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1, f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ **.**

Deci, $f\left(\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$ **şi evident** $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ **. Prin urmare funcţia** $f: \mathbb{R} \to [-1, 1], f(x) = \sin x$ **este surjectivă.**

2) Să arătăm că funcția exponențială $f:\mathbb{R}\to(0,\infty), f(x)=a^x, a>0, a\neq 1$ este surjectivă. Pentru $y>0$, trebuie să arătăm că există $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=y\Leftrightarrow a^x-y=0$.

Se consideră funcția $f_y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_y(x)=a^x-y$, continuă pe $\mathbb{R}$ pentru care, dacă $a>1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_y(x)=-y<0$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f_y(x)=+\infty$ sau dacă $0<a<1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_y(x)=\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f_y(x)=-y<0$. Deci conform corolar 1. b), există $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $f_y(c)=0$, adică $a^c-y=0$.

3) Afirmația din corolar rămâne valabilă dacă $f:I\to\mathbb{R}, I$ interval și f are proprietatea lui Darboux.

Probleme propuse

1.Să se precizeze care din funcțiile de mai jos, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, au proprietatea lui Darboux (pe $\mathbb{R}$):

1) $f(x)=\begin{cases}1, x>0\\0, x=0\\-1, x<0\end{cases}$ (funcția semn, $f(x)=\operatorname{sgn}(x)$); 2) $f(x)=\operatorname{sgn}\left(x^2-1\right)$;

3) $f(x)=\begin{cases}x-1, x\le 1\\0, x>1\end{cases}$; 4) $f(x)=[x]$; 5) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{|x|}, x\neq 0\\1, x=0\end{cases}$; 6) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, x\neq 0\\1, x=0\end{cases}$;

7) $f(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbb{Q}\\-1, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$; 8) $f(x)=\begin{cases}3-x, x\in\mathbb{Q}\\\frac{2}{x}, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$; 9) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, x\neq 0\\1, x=0\end{cases}$.

2.a) Arătați că dacă $f:I\to\mathbb{R}, I$ interval și $f(I)\subseteq\mathbb{Q}$ sau $f(I)\subseteq\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, atunci f nu are proprietatea lui Darboux.

b) Fie $f:[a,b]\to\mathbb{Q}$ funcție cu proprietatea lui Darboux. Arătați că f este constantă.

c) Poate fi continuă funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}-\mathbb{Q}$?

3.Determinați funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care are proprietatea lui Darboux si care verifică egalitatea $f^2(x)=x^2, \forall x\in\mathbb{R}$.

4.Fie C mulțimea tuturor cercurilor de rază cel mult 10 cm. Arătați că există cel puțin un cerc din C a cărei arie este egală cu 250 cm^2.

5.Să se arate că ecuațiile de mai jos au cel puțin o soluție în intervalul indicat:

1) $x^4+3x+1=0,[-1,0]$; 2) $x^5+x^2-1=0,\mathbb{R}$; 3) $x^{13}+7x^3-5=0,(0,\infty)$; 4) $x^3=\sqrt{x+2},[1,2]$;

5) $(x-1)e^x+x=0,[0,1]$; 6) $x\cdot 2^x-1=0,(0,1)$; 7) $x+\ln x=0,\left(\frac{1}{e},1\right)$; 8) $(1-x)\cos x=\sin x,[0,1]$;

9) $\sin 2x-\cos x=0,[0,\pi]$; 10) $x\sin^4 x-1=0,\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; 11) $\arcsin x+\operatorname{arctg} x+1=0,[-1,1]$;

12) $x+\operatorname{arctg} x-1=0,\mathbb{R}$; 13) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-4}=0,(1,4)$.

6.Arătați că: a) ecuația $x^4+7x^3-9=0$ are cel puțin două rădăcini reale;

b) ecuația $x^3-4x+2=0$ are trei rădăcini reale distincte în $[-3,3]$ și localizați rădăcinile între întregi consecutivi.

c) ecuația $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4=0$ cu $(a+c+e)^2<(b+d)^2$ are o rădăcină de modul cel mult 1.

7.Să se stabilească semnul funcțiilor pe domeniul de definiție

1) $f(x)=x^3+x^2-2x$; 2) $f(x)=x^3-3x-2$; 3) $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}$; 4) $f(x)=(x+1)\sqrt{x-2}$;

5) $f(x)=\frac{3^x-1}{x+2}$; 6) $f(x)=\frac{\ln^2 x-1}{\sqrt{x-1}}$; 7) $f(x)=\left(2^x-16\right)(\ln x+1)$; 8) $f(x)=\sin x+\cos x$;

9) $f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos x}$; 10) $f(x)=\frac{\operatorname{tg} x-1}{\operatorname{tg} x+1}$.

8.Să se rezolve inecuațiile:

1) $x^3+x^2\le 0$; 2) $x^3-x^2-2x>0$; 3) $\frac{x}{(x-1)(x+2)}\ge 0$; 4) $x^2\sqrt{x+1}\le 0$; 5) $(x-1)\sqrt{x-1}\ge 0$;

6) $\frac{\sqrt{x+5}}{1-x}<1$; 7) $\frac{4-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+3}}\le 3$; 8) $\left(2^x-4\right)(x+1)\ge 0$; 9) $\sqrt{x-2}\left(3^x-9\right)\le 0$;

10) $\left(x^2-4\right)(\lg x+1)>0$; 11) $\frac{2^x-16}{\ln x-1}\le 0$; 12) $\frac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x}\le\frac{1}{2}$; 13) $\frac{\log_5\left(x^2+3\right)}{4x^2-16x}<0$.

9.Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, o funcție continuă și mărginită. Să se arate că ecuația $f(x)=2x+1$ are cel puțin o soluție.

10.Fie $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x}$ pentru care $f(-1)f(1)<0$. Ecuația $f(x)=0$, nu are soluții. Se contrazice corolarul de localizare a unei rădăcini ?

11. Fie $f:[-a,a]\to[-a,a], a>0$ o funcție continuă. Arătați că există $c,c'\in[a,b]$ astfel încât $f(c)=c$ și $f(c')=-c'$.Interpretare geometrică.

12.Arătați că următoarele funcții sunt surjective: 1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+1$;

2) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+\ln x$; 3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+e^x$; 4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+\sin x$.

2) Proprietăți de mărginire ale funcțiilor continue pe un interval închis.

Teorema lui Weierstrass

Reamintim că: 1) prin interval închis și mărginit din $\mathbb{R}$ înțelegem un interval de forma $[a,b], a,b\in\mathbb{R}, a<b$. Un astfel de interval se numește **interval compact.**

2) o funcție $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este continuă pe compactul $[a,b]$ dacă f este continuă în toate punctele intervalului deschis (a,b), este continuă la dreapta în $x=a$ și este continuă la stânga în $x=b$. Mulțimea funcțiilor continue, definite pe $[a,b]$ cu valori în $\mathbb{R}$ se notează cu $C([a,b])$.

Am văzut la proprietăți locale ale funcțiilor continue că dacă f este continuă într-un punct $x_0 \in [a,b]$, atunci f este mărginită pe o vecinătate a lui x_0, adică $\exists M > 0, \exists V \in \vartheta(x_0)$ astfel încât $|f(x)| \le M, \forall x \in V$.

Dacă f este continuă pe un interval I, nu rezultă numaidecât că f este mărginită pe I. De exemplu $f:(0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ este o funcție continuă și are proprietatea că $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = \infty$, ceea ce arată că f este nemărginită.

Din $f(1) = 1, \lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = \infty, f$ continuă rezultă $\operatorname{Im} f = f((0,1]) = [1, \infty)$. Nu întotdeauna din $f: I \to \mathbb{R}$, continuă, I interval, din forma lui I se poate deduce forma lui $f(I)$.

De exemplu, $f:(-1,1) \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ dă $\operatorname{Im} f = [0,1)$, iar pentru $f:[-1,1] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ avem $\operatorname{Im} f = [0,1]$.

Ultimul rezultat ne sugerează să formulăm o afirmație generală pentru funcțiile continue definite pe un interval închis și mărginit.

Are loc următoarea:

Teoremă(Weierstrass). Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ **o funcție continuă.** Atunci:

1) f **este mărginită** și

2) f **își atinge marginile pe acest interval.**

Deci, $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continuă $\Rightarrow$ **1)** $\exists k > 0$ astfel încât $|f(x)| \le k, \forall x \in [a,b]$;

2) $\exists \alpha, \beta \in [a,b]$ astfel încât $f(\alpha) = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x), f(\beta) = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ și $f(\alpha) \le f(x) \le f(\beta), \forall x \in [a,b]$.

Orice funcție continuă pe un interval compact este mărginită și își atinge marginile pe compact.

Demonstrație (facultativ) 1) În prima etapă vom demonstra mărginirea funcției f. Vom proceda prin reducere la absurd. Presupunem că f nu este mărginită pe $[a,b]$, ceea ce înseamnă că pentru orice $k > 0$, există măcar un punct $x \in [a,b]$, astfel încât $|f(x)| > k$. Luăm $k = n, n = 1, 2, \ldots$ și construim șirul $(x_n), x_n \in [a,b]$ pentru care $|f(x_n)| > n$. Cum $x_n \in [a,b], \forall n$ rezultă că șirul este mărginit.

Atunci (teorema Bolzano-Weierstrass, Cesaro) din acest șir se poate extrage un

subșir convergent (x_{n_k}). Presupunem că $x_{n_k} \to a_0$. Cum $a \le x_{n_k} \le b$, atunci și $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = a_0 \in [a,b]$. Din continuitatea funcției f rezultă $f(x_{n_k}) \underset{k}{\to} f(a_0) \in \mathbb{R}$, contradicție, deoarece $f(x_{n_k}) > n_k$ și deci $f(x_{n_k}) \underset{k}{\to} \infty$.

Contradicția a provenit din presupunerea că f nu este mărginită. Prin urmare f este mărginită.

2) Este suficient să demonstrăm afirmația referitoare la marginea superioară, deoarece $\inf\limits_{x \in [a,b]} f(x) = -\sup\limits_{x \in [a,b]} (-f(x))$.

Fie $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Trebuie să demonstrăm că există cel puțin un punct $\beta \in [a,b]$ pentru care $f(\beta) = M$. Presupunem, din nou, prin absurd, că un astfel de punct nu există. Funcția $g:[a,b] \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ este continuă pe $[a,b]$ și $g(x) > 0, x \in [a,b]$. Conform primei părți a acestei teoreme rezultă g este mărginită, adică există un număr real $M_1 > 0$ pentru care $g(x) = \frac{1}{M - f(x)} \le M_1$.

De aici rezultă $f(x) \le M - \frac{1}{M_1} < M$, ceea ce este imposibil, deoarece M era cel mai mic majorant pentru f, ori din relația de mai sus ar rezulta că $M - \frac{1}{M_1}$ este un majorant al lui f strict mai mic decât M. Contradicția arată că există cel puțin un punct $\beta \in [a,b]$ pentru care $f(\beta) = M$.

Și pentru acest punct se putea da o demonstrație utilizând șirurile.

Dacă $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, atunci există șirul $(c_n), c_n \in [a,b]$ pentru care $f(c_n) \to M$. Cum (c_n) este mărginit, din el se poate extrage subșirul $(c_{n_k}) \underset{k}{\to} c \in [a,b]$. Din continuitatea lui f rezultă $f(c_{n_k}) \underset{k}{\to} f(c)$.

Cum $(f(c_{n_k}))$ este subșir al șirului convergent $(f(c_n))$, se deduce $f(c_{n_k}) \underset{k}{\to} M$.

Din unicitatea limitei rezultă $M = f(c)$. ■

Observații. 1) (Teorema intervalului) Dacă $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ **este o funcție continuă**, atunci $f([a,b]) = [m, M]$, unde $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x) = \inf f([a,b])$,

$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = \sup f([a,b])$ **(O funcție continuă duce un compact într-un compact).**

Într-adevăr din teoremă $m, M \in f([a,b])$. Dacă $y \in [m,M]$, atunci (f are proprietatea lui Darboux) există $x \in [a,b]$ astfel încât $f(x) = y$. Deci $[m,M] \subseteq f([a,b])$. Cum $f([a,b]) \subseteq [m,M]$ se deduce $f([a,b]) = [m,M]$.

2) **(Teorema intervalului)** Dacă $f:(a,b)\to\mathbb{R}, a,b\in\mathbb{R}, a<b$, este **continuă** și **injectivă**, iar $m = \min\left(\lim_{x\searrow a} f(x), \lim_{x\nearrow b} f(x)\right)$, $M = \max\left(\lim_{x\searrow a} f(x), \lim_{x\nearrow b} f(x)\right)$, atunci $\operatorname{Im} f = (m,M)$ **(O funcție continuă și injectivă duce un interval deschis tot într-un interval deschis)**

Dacă f este continuă și injectivă, atunci f este strict monotonă (vezi următorul paragraf). Deci există $\lim_{x\searrow a} f(x), \lim_{x\nearrow b} f(x) \in \mathbb{R}$ și în plus

$m < f(x) < M, \forall \in (a,b)$.

Cum f este continuă rezultă că f ia toate valorile între m și M.

3) Dacă $m = M$, atunci f este funcția constantă $f(x) = m, \forall\, x \in [a,b]$.

4) Este esențial ca f să fie continuă pe intervalul $[a,b]$ pentru ca teorema să fie adevărată.

Funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}, x\in(0,1], f(0) = 1$, este discontinuă în $x = 0$, deoarece $\lim_{x\searrow 0} f(x) = \infty \neq 1 = f(0)$. De aici rezultă că f este nemărginită.

De asemenea, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \operatorname{arctg} x$ este continuă pe $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$, dar nu-și atinge pe $\mathbb{R}$ nici marginea superioară $\frac{\pi}{2}$ și nici marginea inferioară $-\frac{\pi}{2}$.

5) Dacă f este discontinuă pe $[a,b]$, atunci nu este obligatoriu ca f să-și atingă marginile.

Exemple. 1) $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, x\in\{0\}\cup\left[\frac{1}{2},1\right] \\ x, x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\end{cases}$ **este discontinuă în 0 și $\frac{1}{2}$ și nu-și atinge marginile $m = 0$ și $M = \frac{1}{2}$.**

2) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -1, x\in[-1,0] \\ 1, x\in(0,1]\end{cases}$ **este discontinuă în 0, dar își atinge marginile** $m = -1 = f(x), x\in[-1,0]$, $M = 1 = f(x), x\in(0,1]$.

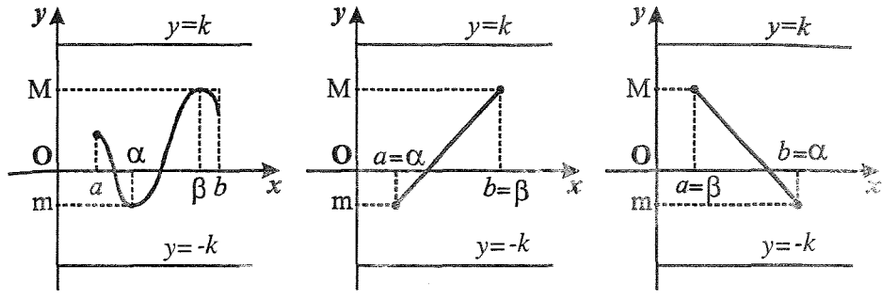


Fig.15

6) În Fig.15 este reprezentat graficul unei funcții continue $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Evident există $k>0$ astfel încât graficul lui f să fie cuprins între dreptele orizontale $y = k$ și $y = -k$. Acesta este aspectul geometric din prima parte a teoremei. Partea a doua a teoremei spune că marginile inferioară și superioară se ating pe intervalul $[a,b]$ în punctele $x = \alpha$ și respectiv $x = \beta$ (în Fig.15 a) aceste puncte sunt situate în interiorul intervalului, iar în Fig.15 b), c) – pentru funcție strict crescătoare și respectiv descrescătoare – aceste puncte sunt situate la capetele intervalului).

Exerciții rezolvate

1. Există funcții $f\in C([a,b]), a,b\in\mathbb{R}, a<b$ pentru care $f([a,b]) = A$, unde:

1) $A = (0,1]$; 2) $A = (0,1)$; 3) $A = [0,\infty)$; 4) $A = [0,1]\cup[2,5]$?

R. **1) Din teorema lui Weierstrass $f([a,b]) = [c,d], c,d\in\mathbb{R}, c<d$. Deci, răspunsul este negativ; 2) Nu; 3) Conform teoremei lui Weierstrass, f este mărginită. Deci, răspunsul este nu; 4) Nu. Cum f este continuă pe $[a,b]$, are proprietatea lui Darboux și deci nu poate sări de la valoarea 1 la valoarea 2, fără să treacă și prin celelalte valori intermediare.**

2. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x + e^x$ este bijectivă.

R. **Funcția f este strict crescătoare (ca sumă de astfel de funcții). Deci f este injectivă. Din $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ și f continuă rezultă $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$, adică f este surjectivă. Deci f este bijectivă.**

3. Se dă $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, continuă cu $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Arătați că f este mărginită.

R. **Din $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, există o vecinătate $V = (\delta,\infty]\in\vartheta(\infty), \delta>0$ astfel încât $\forall\, x\in V, |f(x)|\le 1$. Pe de altă parte pe $[0,\delta]$ funcția fiind continuă este mărginită. Deci $\exists k>0$ astfel încât $|f(x)|\le k, \forall\, x\in[0,\delta]$. Punem $M = \max\{1,k\}$ și avem $|f(x)|\le M, \forall\, x\ge 0$.**

4. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, funcție continuă. Să se arate că $\forall x_1,x_2\in[a,b]$ și $\alpha\in[0,1]$, există $c\in[a,b]$ astfel încât $f(c)=\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$.

R. Cum f este continuă pe compactul $[a,b]$, conform teoremei lui Weierstrass, își atinge marginile pe $[a,b]$. Deci există $c_1,c_2\in[a,b]$, astfel încât

$f(c_1)=\min\limits_{x\in[a,b]}f(x), f(c_2)=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$ și $f(c_1)\le f(x)\le f(c_2), \forall x\in[a,b]$.

În plus $\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)\le\alpha f(c_2)+(1-\alpha)f(c_2)=f(c_2)$ și

$\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)\ge\alpha f(c_1)+(1-\alpha)f(c_1)=f(c_1)$. Deci

$f(c_1)\le\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)\le f(c_2)$. Cum f, fiind continuă, are proprietatea lui Darboux rezultă că există $c\in[c_1,c_2]$ astfel încât $f(c)=\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$.

Probleme propuse

1. Pentru fiecare din funcțiile continue f și intervalul I, determinați $f(I)$:

1) $f(x)=3x+1, I=[-1,2]$; 2) $f(x)=-2x, x\in[-2,1)$; 3) $f(x)=x^2+1, x\in(-1,2)$;

4) $f(x)=-x^2+1, x\in[-2,2]$; 5) $f(x)=\frac{1}{x}, x\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$; 6) $f(x)=\sqrt{x}, x\in[0,4]$;

7) $f(x)=\sqrt[3]{x}, x\in[-8,27]$; 8) $f(x)=\sin x, x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$; 9) $f(x)=tg\,x, x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$;

10) $f(x)=\arcsin x, x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$; 11) $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}, x\in(0,1)$; 12) $f(x)=x+\sqrt{x}, x\in[0,4]$.

2. În exercițiile de mai jos desenați graficul funcției f definită pe $[0,1]$ și care verifică condițiile (dacă e posibil): 1) f continuă pe $[0,1]$, valoarea minimă 0, valoarea maximă $\frac{1}{2}$; 2) f continuă pe $(0,1)$, ia valorile 0 și 1, dar nu ia valoarea $\frac{1}{2}$; 3) f continuă pe $[0,1]$, ia valorile 1 și -1, dar nu ia valoarea 0; 4) f continuă pe $[0,1]$, valoarea minimă este 1, iar maximă, de asemenea, 1; 5) f continuă pe $[0,1]$ și nu ia valori întregi; 6) f continuă pe $[0,1]$, și nu ia valori raționale; 7) f nu este continuă pe $[0,1]$, ia atât valoarea minimă cât și maximă și toate valorile intermediare; 8) f continuă pe $[0,1]$ și ia numai două valori distincte; 9) f continuă pe $[0,1]$ și are mulțimea valorilor un interval nemărginit.

3. Să se arate că următoarele funcții sunt bijective: 1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+x+1$;

2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+3^x$; 3) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+\ln x$; 4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+\frac{1}{2}\cos x$.

4. Fie $f:[0,1]\to[0,1]\cup[2,3]$ o funcție continuă astfel încât $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$. Să se arate că:

a) f nu este surjectivă; b) f nu este strict crescătoare; c) f nu este injectivă.

4.6. CONTINUITATEA FUNCȚIILOR INVERSE

Un alt mod de a genera funcții continue, pe lângă operațiile algebrice sau compunerea de funcții continue, o constituie inversarea funcțiilor continue. Strâns legat de acest concept este

1. Continuitatea funcțiilor monotone

Funcțiile monotone (crescătoare sau descrescătoare) **pe un interval** formează o clasă importantă și posedă proprietăți specifice. Am văzut că o funcție monotonă definită pe un interval este, în fiecare punct din interval, fie continuă, fie discontinuă (discontinuitate de speța întâi). Pentru a ajunge la bijectivitatea unei funcții trebuie să evidențiem injectivitatea și surjectivitatea ei. Știm că dacă $f:I\to\mathbb{R}$, (I interval) este o funcție strict monotonă, atunci ea este injectivă. Reciproca nu-i adevărată așa cum arată funcția

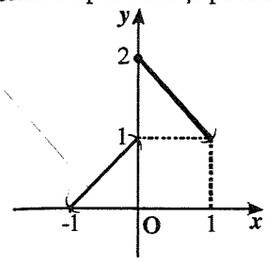


Fig.16

$f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1, x\in(-1,0)$

$f(x)=-x+2, x\in[0,1)$, având graficul în Fig.16.

Reciproca are loc dacă la condiția de injectivitate se adaugă cerința de continuitate.

Mai precis are loc următoarea

Teoremă. Dacă funcția $f:I\to\mathbb{R}$ (I interval) este continuă și injectivă, atunci f este strict monotonă.

Demonstrație. Prin reducere la absurd. Deci, presupunem că f nu este strict monotonă, adică există $x_1,x_2,x_3\in I$ astfel încât $x_1<x_2<x_3$ și $f(x_2)$ nu este nici între $f(x_1)$ și $f(x_3)$, nici între $f(x_3)$ și $f(x_1)$. Să presupunem că $f(x_1)<f(x_3)$. Atunci $f(x_2)<f(x_1)<f(x_3)$ sau $f(x_1)<f(x_3)<f(x_2)$ (Cazuri de egalitate între valorile lui f în x_1,x_2,x_3 nu există, deoarece f este injectivă).

Analizăm cazul $f(x_2)<f(x_1)<f(x_3)$. Cum f are proprietatea lui Darboux – fiind continuă pe I - se deduce existența unui element $x_0\in(x_2,x_3)$ pentru care $f(x_0)=f(x_1)$. Din f injectivă și ultima egalitate rezultă $x_0=x_1$, fals, deoarece $x_1<x_2$! Contradicția obținută arată că f este strict monotonă pe I. ■

Observație. Teorema rămâne adevărată dacă cerem ca f să fie injectivă și să aibă proprietatea lui Darboux pe I.

Ne punem problema: în ce condiții este valabilă reciproca teoremei ? Oare o funcție $f: I \to \mathbb{R}$ (I interval) strict monotonă este continuă ? Răspunsul este negativ (Fig.17). $f((-1,1)) = (0,1) \cup [2,3)$.

Dacă însă f este astfel încât $f(I)$ este interval, atunci are loc următoarea

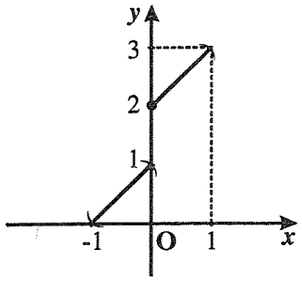


Fig.17

Teoremă. Fie $f: I \to \mathbb{R}, I \subseteq \mathbb{R}$ interval. Dacă f este monotonă și $\operatorname{Im} f$ este interval, atunci f este continuă.

Demonstrație . Fie $x_0 \in I$. Să arătăm că f este continuă în x_0 (dacă x_0 este punct izolat, atunci cererea este validată). Cum f este monotonă există $l_s(x_0), l_d(x_0) \in \mathbb{R}$. Fie f crescătoare. Deci $l_s(x_0) \le f(x_0) \le l_d(x_0)$. Dacă x_0 ar fi punct de discontinuitate, atunci $l_s(x_0) < f(x_0)$ sau $l_d(x_0) > f(x_0)$. Presupunem că $l_s(x_0) < f(x_0)$. Fie $x < x_0$. Atunci $f(x) \le f(x_0)$ și $f(x) \le l_s(x_0)$. De aici în intervalul $(l_s(x_0), f(x_0))$ nu se află nici o valoare a lui f, contradicție deoarece $f(I)$ este interval. Deci, $f(x_0) = l_s(x_0)$, adică f este continuă la stânga în x_0. Analog se probează continuitatea la dreapta în x_0. ■

2. Continuitatea funcțiilor inverse

În fine, vom prezenta un rezultat fundamental relativ la continuitatea funcțiilor inverse. Mai precis are loc următoarea

Teoremă. Fie $f: I \to J, I, J \subseteq \mathbb{R}$ **intervale**, f **bijectivă**.
Dacă f este continuă, atunci f^{-1} este continuă.
În plus, **cele două funcții au aceeași monotonie**.

Demonstrație . Cum f este bijectivă are sens să vorbim de inversa ei f^{-1}.
Pe de altă parte din f continuă și injectivă, via prima teoremă din acest paragraf, rezultă f strict monotonă. Presupunem că f este strict crescătoare. Să arătăm că f^{-1} are aceeași monotonie ca și f. Fie $x_1, x_2 \in I$, cu $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$. Dacă $y_1 < y_2$, atunci $x_1 < x_2$, adică $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, ceea ce arată că f^{-1} este strict crescătoare.

În fine, din $f^{-1}: J \to I$ monotonă și $\operatorname{Im} f^{-1} = I$, interval, via teorema precedentă, rezultă f^{-1} este continuă. ■

Observație. Dacă $f: E \to \mathbb{R}$ este continuă și monotonă, iar E **nu este interval**, atunci inversa ei nu este obligatoriu funcție continuă. Așa este funcția continuă și crescătoare $f: (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x-1, x > 1 \\ x+1, x \le -1 \end{cases}$, cu inversa $f^{-1}: \mathbb{R} \to (-\infty, -1] \cup (1, \infty), f^{-1}(x) = \begin{cases} x+1, x > 0 \\ x-1, x \le 0 \end{cases}$ având $x = 0$ punct de discontinuitate de prima speță.

3. Aplicații la funcții elementare

1) Funcția $f: [0, \infty) \to [0, \infty), f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}, n \ge 2, n$ par este bijectivă, continuă, și strict crescătoare. Inversa ei este $f^{-1}: [0, \infty) \to [0, \infty), f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ (funcția radical de ordin par).

2) Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}, n \ge 2, n$ impar este bijectivă, continuă și strict crescătoare. Atunci inversa ei $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ (funcția radical de ordin impar) este continuă și strict crescătoare.

3) Funcția $f: \mathbb{R} \to (0, \infty), f(x) = a^x, a > 1$ este bijectivă, continuă și strict crescătoare. Atunci funcția inversă $f^{-1}: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \log_a x$ este continuă și strict crescătoare. Dacă $0 < a < 1$, atunci f, f^{-1} sunt continue și strict descrescătoare.

4) Funcția $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1], f(x) = \sin x$ este bijectivă, continuă și strict crescătoare. Inversa ei, $f^{-1}: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], f^{-1}(x) = \arcsin x$ este continuă și strict crescătoare.

5) Funcția $f: [0, \pi] \to [-1, 1], f(x) = \cos x$ este bijectivă, continuă și strict descrescătoare. Atunci funcția inversă $f^{-1}: [-1, 1] \to [0, \pi], f^{-1}(x) = \arccos x$, este continuă și strict descrescătoare.

6) Funcția $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x$ este bijectivă, continuă și strict crescătoare. Funcția inversă $f^{-1}: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$ este continuă și strict crescătoare.

7) Funcția $f: (0, \pi) \to \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{ctg} x$ este bijectivă, continuă și strict descrescătoare. Atunci inversa $f^{-1}: \mathbb{R} \to (0, \pi), f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$, este continuă și strict descrescătoare.

REZUMATUL CAPITOLULUI

Noțiunea	Definiție. Caracterizare	Observații
Funcție continuă într-un punct	$f:E\to\mathbb{R}, a\in E\cap E'$ f este continuă în $x=a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$	Dacă $a\in E$ este punct izolat, atunci f este continuă în $x=a$. Nu are sens problema continuității în punctele în care f nu este definită.
Funcție continuă pe o mulțime	$f:E\to\mathbb{R}, A\subseteq E, A\neq\varnothing$ f este continuă pe $A \Leftrightarrow f$ este continuă în fiecare punct din A Funcțiile elementare sunt funcții continue	Dacă f este continuă pe E, atunci spunem că f este continuă (fără a mai preciza mulțimea)
Continuitatea laterală	1) $f:E\to\mathbb{R}, a\in\left(E\cap(-\infty,a)\right)'$ f este continuă la stânga în $x=a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\nearrow a} f(x)=f(a)$ 2) $f:E\to\mathbb{R}, a\in\left(E\cap(a,-\infty)\right)'$ este continuă la dreapta în $x=a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\searrow a} f(x)=f(a)$	
Continuitatea punctuală în $x=a$. Condiții echivalente.	1(cu șiruri) $\forall(x_n), x_n\in E, x_n\to a \Rightarrow f(x_n)\to f(a)$ 2) (criteriul $\varepsilon-\delta$) $\forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon)=\delta>0,\forall x\in E, \lvert x-a\rvert<\delta$ $\Rightarrow \lvert f(x)-f(a)\rvert<\varepsilon$ 3) (cu vecinătăți) $\forall V\in\mathcal{V}(f(a)),\exists U\in\mathcal{V}(a),$ $\forall x\in U\cap E \Rightarrow f(x)\in V$ 4) (continuitate bilaterală) $l_s(a)=l_d(a)=f(a)$	
Puncte de discontinuitate	1) de primă speță. $x=a\in E$ este punct de discontinuitate de prima speță pentru f dacă a este punct de discontinuitate, iar f are limite laterale finite în a. 2) de speța a doua- dacă nu este de prima speță.	

Operații cu funcții continue	Suma(diferanța), produsul, câtul, compunerea a două funcții continue este o funcție contiunuă	1) $f(a)>0,\forall a\in E, f,g$ funcții continue $\Rightarrow f^g$ funcție continuă. 2) f continuă $\Rightarrow \lvert f\rvert$ continuă 3) f,g continue $\Rightarrow \min(f,g),\max(f,g)$ continue.
Proprietăți ale funcțiilor continue	$f:E\to\mathbb{R}, a\in E\cap E' f(a)\neq 0\Rightarrow$ 1) $\exists V\in\vartheta(a), f(x)\neq 0,\forall x\in V$ 2) Proprietatea lui Darboux(P.D.) $f:I\to\mathbb{R}, I$ interval. f are P.D. pe I $\Leftrightarrow \forall a,b\in I, a<b,\forall\lambda\in\left(f(a),f(b)\right),$ $\exists x_\lambda\in(a,b), f(x_\lambda)=\lambda$ 3) $f:I\to\mathbb{R}, I$ interval, f continuă $\Rightarrow f$ are P.D.(Cauchy) 4) $f:I\to\mathbb{R}, I$ interval , f continuă și $f(x)\neq 0,\forall x\in I \Rightarrow f$ are semn constant pe I	
	5) $f:E\to\mathbb{R}, f$ continuă, $I\subseteq E$ interval $\Rightarrow f(I)$ este interval	$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, continuă $\Rightarrow f([a,b])=[m,M]$, unde $m=\inf\limits_{a\le x\le b} f(x)$, $M=\sup\limits_{a\le x\le b} f(x)$ (Teorema intervalului)
	6) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă $\Rightarrow f$ este mărginită și își atinge marginile pe acest interval	$\exists M>0, \lvert f(x)\rvert\le M$, $\forall x\in[a,b];\exists\alpha,\beta\in[a,b]$, $f(\alpha)=\inf\limits_{a\le x\le b} f(x)$, $f(\beta)=\sup\limits_{a\le x\le b} f(x)$

Probleme propuse

Continuitatea funcțiilor inverse

1. Fie $f:[-1,1]\to[0,1]\cup[3,4]$ o funcție continuă astfel încât $f(0)=0$. Să se arate că: 1) f nu este surjectivă; 2) f nu este strict monotonă; 3) f nu este injectivă.
2. Fie $f(x)=x$ dacă $x\in[0,1]$ și $f(x)=1+x$, dacă $x\in(1,2]$. Arătați că f și f^{-1} sunt strict crescătoare. Sunt f și f^{-1} continue în fiecare punct ?
3. Studiați continuitatea inversei funcției $f:[-1,\infty)\to[-4,\infty)$, $f(x)=x^2+2x-3$.
4. Fie $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $f(x)=\ln(x^2+1)$. Arătați că f este strict crescătoare și $f([0,\infty))=[0,\infty)$. Arătați că f admite o inversă monotonă, continuă.
5. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2, x\le 1\\ -2x-1, x>-1\end{cases}$. Arătați că f admite o inversă monotonă, continuă.
6. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x, x\in\mathbb{Q}\\ -x, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$. Arătați că f nu este monotonă pe nici un interval, este inversabilă și studiați continuitatea lui f^{-1}.
7. Fie $f:I=[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$, dacă $x\in\mathbb{Q}$ și $f(x)=1-x$, dacă $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$. Arătați că $f(f(x))=x, \forall x\in I$. Deduceți că f este bijectivă pe I. Este f continuă pe I ?

Teste de evaluare

Testul 1 (1 punct din oficiu)

1. Stabiliți punctele în care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x, x\in\mathbb{Q}\\ 2-2x, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$ este continuă. (2 puncte)
2. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+a, x<1\\ 2, x=1\\ bx, x>1\end{cases}$ să fie continuă pe $\mathbb{R}$. (1 punct)
3. Să se studieze continuitatea funcției $f:[0,3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+x^n}{3^n}$. (2 puncte)
4. Să se determine parametrii reali a,b,c pentru care funcția $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+b, x\le 0\\ \sqrt{cx^2+4x+4}, x\in\left(0,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\end{cases}$ este continuă în $x=0$, $f(-1)=f(1)$ și există $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$. (2 puncte)
5. a) Să se arate că ecuația: $(x^2+x+1)(x-2)+(x^2-x+1)(x-3)=0$ are o rădăcină în intervalul $(2,3)$.
b) Stabiliți semnul funcției $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln^2 x-3\ln x+2$.

c) Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă cu $f(a)\ge a$, $f(b)\le b$. Arătați că f are cel puțin un punct fix. (2 puncte)

Testul 2 (1 punct din oficiu)

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left[x+\dfrac{1}{2}\right]$, unde $[x]$ este partea întreagă a lui x. Să se determine punctele de discontinuitate ale lui f. (2 puncte)
2. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+a, x\le 2\\ ax+b, x>2\end{cases}$ să fie continuă pe $\mathbb{R}$ și în plus să existe $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$. (2 puncte)
3. Să se studieze continuitatea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+nx}{1+|nx|}$. (1 punct)
4. Fie funcția continuă $f:[-2,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x$.
a) Să se arate că $f([-2,2))=[-1,8]$ unde -1 și 8 sunt marginile valorilor funcției.
b) Nu contravine aceasta cu proprietatea funcțiilor continue definite pe un interval închis și mărginit ? (2 puncte)
5. a) Să se arate că ecuația $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}-1=0$ are cel puțin o rădăcină în intervalul $[5,17]$.
b) Să se rezolve inecuația $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}-1>1$. (2 puncte)

5. FUNCȚII DERIVABILE

În acest capitol este dezvoltată teoria diferențierii. Este prezentată noțiunea de derivată a unei funcții într-un punct și se dau derivatele funcțiilor elementare, operațiile algebrice (suma, produsul, câtul) cu funcții derivabile , compunere de funcții derivabile, derivarea funcției inverse precum și reguli de derivare.

Sunt enunțate și demonstrate teoreme fundamentale ale calculului diferențial (Fermat, Rolle, Lagrange), fiind ilustrate cu probleme diverse. Consecințe ale acestor teoreme beneficiează de comentarii și aplicații.

Sunt prezentate aplicații ale derivatelor în studiul funcțiilor. Rolul derivatei întâi în studiul monotoniei, stabilirea punctelor de extrem și rezolvarea unor inegalități. Rolul derivatei a doua în stabilirea intervalelor de convexitate(concavitate) și precizarea punctelor de inflexiune sau a celor de extrem pentru o funcție.

Un paragraf conține aplicații practice rezolvate utilizând cunoștințe din acest capitol .

Istoric . Calculul diferențial a fost generat de probleme de mecanică și de geometrie. Calculul diferențial se ocupă de raportul cu care se schimbă „lucrurile". Matematicianul englez Sir Isaac Newton (1642 – 1727), unul dintre cei mai mari matematicieni ai lumii, este considerat „descoperitorul" calculului diferențial în 1666 și prezentat în „Method of Fluxions" (1671). Totuși această lucrare n-a fost publicată până în 1736, timp în care matematicianul și filozoful german Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) a descoperit independent de Newton , calculul diferențial, pe care l-a publicat în 1684. Ultimii șapte ani din viață, Leibniz și i-a petrecut într-o amară controversă cu Newton privind prioritatea în descoperirea calculului diferențial. Descoperirea calculului diferențial a avut un impact profund în comunitatea matematicienilor. Notația lui Newton pentru derivată este $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, iar cea a lui Leibniz este $f'(x)=\frac{dy}{dx}$.

Alți matematicieni care au adus contribuții importante la dezvoltarea calculului diferențial sunt P. Fermat (1601-1665), M. Rolle (1652-1719), J. L. Lagrange (1736-1813), L'Hôpital (1661 – 1704), (care a scris prima carte despre calculul diferențial, „Analyse des infiniments petits"apărută în 1696 la Paris și în care se află și celebra regulă care–i poartă numele . Totuși regula a fost stabilită de Jean Bernoulli(1667-1748), matematician elvețian – din celebra familie de matematicieni Bernoulli – care s-a ocupat de instruirea matematică lui l'Hôpital, activitate pentru care era remunerat), B.Taylor (1685-1731), A.L. Cauchy (1789-1857), J. G . Darboux (1842-1917).

"Si Newton et Leibniz avaient su que les fonctions continues n'ont pas nécessairement de dérivées la calcul différentiel n'aurait jamais été crée." Emile Piccard (1905).

"Qu'est-ce qu'une dérivée véritablement ? Résponse : une limite:" Cauchy „Cours d'Analyse" , 1821.

„Legea diferențială este singura formă care satisface pe deplin exigența cauzalității proprie fizicianului modern." A. Einstein

- Probleme care conduc la noțiunea de derivată 387
- Definiția derivatei unei funcții într-un punct 389
- Derivabilitatea pe un interval. Funcția derivată 410
- Reguli de derivare. Derivatele funcțiilor elementare 412
- Derivate de ordin superior 437
- Teoreme fundamentale ale calculului diferențial 451
- Probleme de extrem. Aplicații ale derivatelor 512
- Asimptote 515
- Teste de evaluare 524

5.1. PROBLEME CARE CONDUC LA NOȚIUNEA DE DERIVATĂ

Două probleme au stat la originea noțiunii de derivată:

1) Definirea tangentei la o curbă în plan.

2) Definirea vitezei instantanee a unui punct mobil.

1. Tangenta la o curbă

Să considerăm $f:[a,b]\to\mathbb{R}, a<b$ o funcție continuă. Am definit mulțimea $G_f=\{(x,f(x));x\in[a,b]\}$ ca fiind graficul lui f , iar C_f reprezentarea geometrică a lui G_f . Fie $x_0\in(a,b)$ și $(x_0,f(x_0))\in G_f$ punctul de pe grafic de abscisă x_0 .

Dorind să dea un sens dreptei tangente în $(x_0,f(x_0))$ la C_f , LEIBNIZ a fost condus la noțiunea de **derivată a unei funcții într-un punct.**

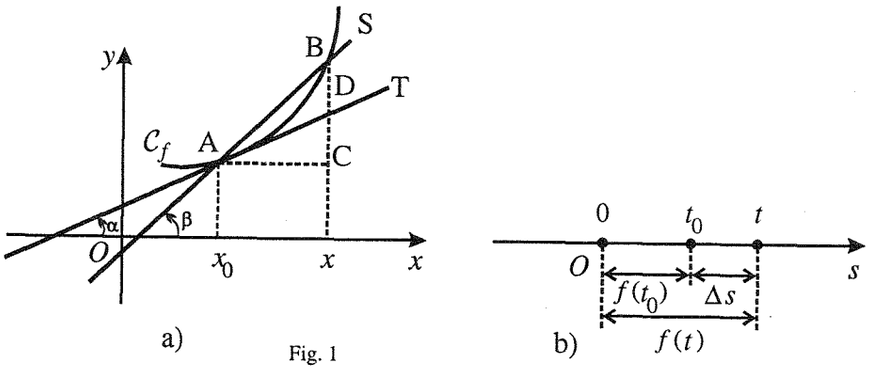


Fig. 1

Fie $x \in (a,b)$, $x \neq x_0$ şi punctul $(x, f(x)) \in G_f$. În Fig.1.a), am notat cu C_f graficul lui f în reperul xOy, $A(x_0, f(x_0))$, $B(x, f(x))$, secanta AB prin S, tangenta în A cu T, α unghiul tangentei cu axa Ox, β unghiul secantei AB cu axa Ox unde $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$. Pentru $\beta > 0$, unghiul este măsurat în sens trigonometric (invers deplasării acelor de ceas), iar pentru $\beta < 0$ în sens antitrigonometric. Am dus AC paralelă cu Ox. Atunci $AC = x - x_0$ (am presupus $x \geq x_0$), $BC = f(x) - f(x_0)$. Se ştie din geometrie că panta dreptei AB este:

$m_x = m_{AB} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \operatorname{tg}\beta$, adică raportul între creşterea funcţiei $(f(x) - f(x_0))$ şi creşterea argumentului $(x - x_0)$.

Dacă $x \to x_0$, atunci $f(x) \to f(x_0)$ şi punctul B se mişcă pe C_f către A. Dacă în această situaţie unghiul β tinde către o valoare α diferită de $\frac{\pi}{2}$ şi $-\frac{\pi}{2}$, atunci există limita $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} m_x = m_0 = \lim\limits_{\beta \to \alpha} \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha$ şi reprezintă **panta tangentei** la C_f în $A(x_0, f(x_0))$. Atunci ecuaţia tangentei în $A(x_0, f(x_0))$ la C_f este $\boxed{y - f(x_0) = m_0(x - x_0)}$ şi corespunde la $m_0 \in \mathbb{R}$ (deci m_0 finit).

Dacă $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$, atunci $m_0 = \pm\infty$, iar ecuaţia tangentei în A este $\boxed{x = x_0}$ adică o dreaptă paralelă cu Oy.

Observaţie. Panta curbei continue $y = f(x)$ în punctul A este panta tangentei în A la curbă.

2. Viteza instantanee

Studiind problema vitezei instantanee a unui punct material, NEWTON a fost condus la studiul limitei unui raport de tipul lui m_x.

Presupunem că un punct se deplasează pe o axă s şi fie $s = f(t)$ coordonata sa la momentul t (Fig. 1.b)).

Atunci $\Delta s = f(t) - f(t_0)$ reprezintă drumul parcurs în intervalul $[t_0, t]$ $(\Delta t = t - t_0)$ iar raportul $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ reprezintă **viteza medie** în intervalul de timp $[t_0, t]$, iar limita **(dacă există)**

$\lim\limits_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v(t_0)$ se numeşte **viteza instantanee** la momentul t_0.

Analog, dacă $v(t)$ este viteza punctului la momentul t, atunci **acceleraţia punctului material la momentul** t_0 este $a(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$, dacă limita există.

5.2 DEFINIŢIA DERIVATEI UNEI FUNCŢII ÎNTR-UN PUNCT

Noţiunea de **derivată,** alături de noţiunea de **integrală,** este cea mai importantă din analiza matematică.

În secţiunea 5.1 am văzut că probleme diverse au condus pe marii matematicieni LEIBNIZ şi NEWTON la examinarea raportului $R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $x \neq x_0$, a existenţei limitei acestuia când $x \to x_0$.

Fie $f : E \to \mathbb{R}$ unde E este un **interval** sau o **reuniune de intervale** din $\mathbb{R}$.

Definiţii. 1) Se spune că funcţia f **are derivată** în $x_0 \in E$ dacă limita $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ există în $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

În acest caz această limită se notează cu $f'(x_0)$ şi se numeşte **derivata funcţiei f în punctul x_0**.

Deci $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

2) Se spune că funcţia f **este derivabilă în** $x_0 \in E$ dacă limita $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ există în $\mathbb{R}$ (**există** şi este **finită**).

În acest caz limita se notează, de asemenea, cu $f'(x_0)$, adică

$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Observaţii. **1)** Notaţia $f'(x_0)$ a fost făcută de matematicianul francez Lagrange. Să observăm că dacă f **are derivată într-un punct** x_0 aceasta poate fi un număr real finit, caz în care f **este derivabilă** în x_0, dar poate fi $+\infty$ sau $-\infty$ când spunem că f **are derivată infinită în** x_0 (când f nu este derivabilă în x_0 !).

Mulțimea punctelor din E în care f este derivabilă se numește **domeniul de derivabilitate** al funcției f, notat $D_{f'} \subset E$.

2) Pentru $f'(x_0)$ uneori se utilizează notațiile : $D_f(x_0), \frac{df(x_0)}{dx}$.

3) Notând $\Delta f = f(x) - f(x_0)$-numită creșterea funcției, $\Delta x = x - x_0$-numită creșterea argumentului, atunci $f'(x_0)$ reprezintă limita raportului dintre creșterea funcției și creșterea argumentului ,când creșterea argumentului tinde la zero, adică:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Alteori este utilizată scrierea următoare: Schimbând variabila în limita raportului prin $h = x - x_0 \to 0$ dacă $x \to x_0$ avem $(x_0 + h \in E)$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

4) Revenind la problema din 5.1, care a condus la noțiunea de derivată a unei funcții într-un punct putem face precizările următoare:

Dacă funcția f (continuă în x_0) **are derivată în punctul** x_0 **,atunci graficul său** $\mathcal{C}_f$ admite tangentă în punctul corespunzător $A(x_0, f(x_0))$ și anume :

- **Dacă derivata este finită** , atunci coeficientul unghiular al tangentei este egal cu $m = f'(x_0)$, când ecuația tangentei în A la curba $\mathcal{C}_f$ are forma $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ (Fig.2.a).
- **Dacă derivata este infinită**, atunci tangenta este paralelă cu Oy și are ecuația $x = x_0$ (Fig.2.b).

5) Dacă $E = [a, b]$, atunci prin derivata lui f în a înțelegem

$$f'(a) = \lim_{x \searrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$, iar prin derivata lui f în b înțelegem

$$f'(b) = \lim_{x \nearrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$,dacă aceste limite există.

6) Faptul că f are derivată în x_0, numărul $f'(x_0)$ se poate exprima cu ajutorul șirurilor : $\forall x_n \in E, x_n \to x_0, x_n \neq x_0$ să rezulte $\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \to f'(x_0)$.

Să observăm că $x_0 \in E$ trebuie să fie punct de acumulare pentru domeniul lui f, ceea ce aici are loc deoarece E este interval sau reuniune de intervale.

7) Interpretarea practică a derivatei. Raportul $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ măsoară **viteza medie de schimbare a valorilor funcției** f **relativ la schimbarea argumentului,**

în timp ce $f'(x_0)$ poate fi interpretată ca viteza instantanee în x_0, de schimbare a lui f relativ la x.

De exemplu pentru $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + 1, f'(x) = 3, \forall x \in \mathbb{R}$,reprezintă panta dreptei asociată funcției. Semnificația lui $f'(x) = 3$ este următoarea: la o creștere a lui x cu **o unitate**, f crește cu **trei unități**. În acest caz viteza de schimbare este constantă. De obicei, viteza de schimbare, adică $f'(x)$ este o funcție de x ,ceea ce înseamnă că ea variază de la un punct la altul. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3x + 5$, atunci $f'(x) = 2x - 3, \forall x \in \mathbb{R}$.

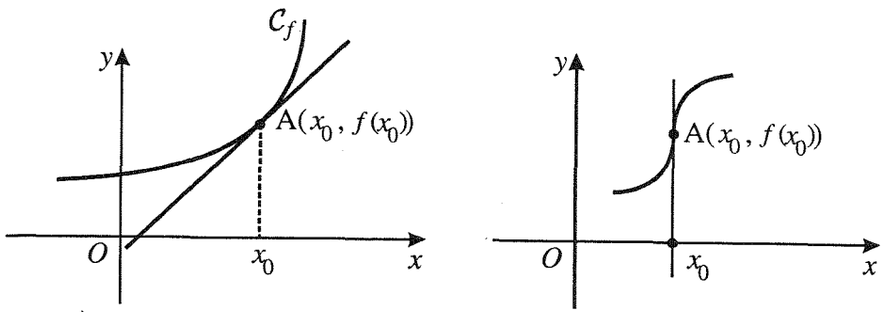


Fig. 2

Exerciții rezolvate

1 .Să se arate că funcțiile următoare sunt derivabile în punctele indicate și să se calculeze derivata. Scrieți ecuația tangentei la curbă în acel punct.

Pentru calculul derivatei în x_0 utilizați fie $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, fie

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

a) $f(x) = x^2, x_0 = -3$; **b)** $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 2$.

R . a) Trebuie arătat că există limita raportului

$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ **când** $x \to x_0$ **și că această limită este finită .**

Avem: $\lim_{x \to -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} = \lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \lim_{x \to -3} (x - 3) = -6 \in \mathbb{R}$.

Deci $f'(-3) = -6$ **, ceea ce arată că** f **este derivabilă în** $x = -3$.

Ecuația tangentei în $(-3, f(-3))$ **este** $y - y_0 = m(x - x_0)$, **unde** $y_0 = f(x_0) = 9$ **adică :**

$y-9=-6(x+3)$ sau $6x+y+9=0$.

b)În acest caz $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\in\mathbb{R}$.

Deci $f'(2)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ și f este derivabilă în $x=2$.

Ecuația tangentei în $(2,\sqrt{2})$ este: $y-\sqrt{2}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(x-2)$.

2 .Să se arate că funcția $f(x)=\sqrt{x}$ are derivată în $x_0=0$ și să se calculeze $f'(x_0)$.

R .Calculăm limita raportului $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{0_+}=\infty$. Deci f nu este derivabilă în $x=0$,dar are derivata infinită în $x=0, f'(0)=\infty$.

3 .Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0,\ x=0\end{cases}$ nu este derivabilă în $x_0=0$.

R . Avem : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\sin\dfrac{1}{x}$, care nu are limită în $x_0=0$. Deci f nu este derivabilă în 0.

4 .Pe parabola $f(x)=x^2-7x+3$ să se determine un punct în care tangenta la parabolă să fie paralelă cu dreapta $y=-5x+3$ și să se scrie ecuația tangentei .

R . Dacă $A(x_0,y_0)$ este un astfel de punct , atunci panta tangentei în A este egală cu $m=f'(x_0)$.

Avem : $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-7x+3-x_0^2+7x_0-3}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-x_0^2-7(x-x_0)}{x-x_0}=$

$=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(x-x_0)(x+x_0-7)}{x-x_0}=2x_0-7.$

Cum panta tangentei este egală cu panta dreptei $y=-5x+3$, adică cu -5 , avem egalitatea $2x_0-7=-5$ .De aici $x_0=1$ când $y_0=-3$.

Deci punctul căutat este $(1,-3)$, iar ecuația tangentei este $y-(-3)=-5(x-1)$ sau $y+5x-2=0$.

5 .Dacă $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ are derivată în punctul $x_0\in(a,b)$, atunci să se calculeze:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right)-f(x_0)\right]$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right)-f\left(x_0-\dfrac{1}{n}\right)\right]$.

R .1) Se consideră șirul $x_n=x_0+\dfrac{1}{n}, n\geq 1, x_n\to x_0$.

Scriem șirul sub forma : $\dfrac{f\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right)-f(x_0)}{x_0+\dfrac{1}{n}-x_0}\to f'(x_0)$.

2) Se pune șirul sub forma $\dfrac{f\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right)-f(x_0)}{x_0+\dfrac{1}{n}-x_0}+\dfrac{f\left(x_0-\dfrac{1}{n}\right)-f(x_0)}{x_0-\dfrac{1}{n}-x_0}$ și ținând seama de criteriul cu șiruri pentru derivata unei funcții într-un punct găsim că limita are valoarea $2f'(x_0)$.

Probleme propuse

1.a) Să se calculeze limitele de mai jos și să se explice ce reprezintă fiecare dintre ele :

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$; 3) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$; 4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{e^x-\frac{1}{e}}{x+1}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$;

6) $\lim\limits_{x\nearrow -2}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x+2}$; 7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{6}}$; 8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{tg}x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$; 10) $\lim\limits_{x\nearrow 1}\dfrac{\arccos x}{x-1}$.

b) Să se arate că funcțiile următoare sunt derivabile în punctele indicate și să se calculeze derivata. Scrieți ecuația tangentei în acel punct la grafic.

1) $f(x)=x^2, x_0=1$; 2) $f(x)=3x^2, x_0=-1$; 3) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}, x_0=-1$; 4) $f(x)=\sqrt[3]{x}, x_0=1$;

5) $f(x)=x^3+x, x_0=0$; 6) $f(x)=\sqrt{3x}, x_0=5$; 7) $f(x)=x^2, x\in\mathbb{Q}, f(x)=0, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}, x_0=0$;

2. Să se arate că funcțiile următoare au derivată în punctele x_0 indicate și să se calculeze $f'(x_0)$:

1) $f(x)=\sqrt{x-1}, x_0=1$; 2) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}, x_0=2$; 3) $x|x|\leq f(x)\leq x^2, x_0=0$.

3. Să se arate că $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x\cdot\cos\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$ nu este derivabilă în $x_0=0$, dar

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$ este derivabilă în $x_0=0$.

4. a) Să se determine punctele de pe curba $f(x)=x^3-3x+2$ în care tangenta este paralelă cu dreapta $y=3x$ și să se scrie ecuațiile acestor tangente.

b) Fie curba de ecuație $y=ax^2+bx+c$, care trece prin punctul $(1,2)$.Știind că panta tangentei în $(2,1)$ este zero, determinați a,b,c.

5. Dreapta $y=-\dfrac{3x}{4}-\dfrac{3}{32}$ este tangentă graficului funcției $f(x)=\dfrac{x^4}{2}-x$ .Să se determine coordonatele punctului de tangență.

6. Să se determine coordonatele punctelor de intersecție ale axei Ox cu tangentele la graficul funcției $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, care formează unghiul $\dfrac{3\pi}{4}$ cu axa Ox .

7. 1) Să se arate că tangentele la graficul funcției $f(x)=\dfrac{x-4}{x-2}$, în punctele de intersecție cu axele de coordonate, sunt paralele.

2) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left(x^2+2mx+n\right)/\left(x^2+1\right), m,n\in\mathbb{R}, m\neq 0$. Arătați că există două puncte pe graficul funcției în care tangenta este paralelă cu Ox și produsul absciselor este –1. Determinați m,n astfel încât $f(1)=2, f'(2)=0$.

8. Să se arate că tangenta la curba $f(x)=x^5+8x+1$ în orice punct $(x_0,f(x_0)), x_0\in\mathbb{R}$ formează cu axa Ox un unghi ascuțit.

9. În care puncte ale graficului funcției $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+7x-4$ tangenta formează cu axa Ox un unghi de 45° ?

10. a) Dacă $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ are derivată în punctul $x_0\in(a,b)$,atunci să se calculeze limitele:

1) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$;2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)}{f(x_0)}\right)^n$, $f(x_0)>0$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f(x_0)-f\left(x_0-\frac{1}{2n}\right)\right]$; 4) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x_0f(x)-xf(x_0)}{x-x_0}$; 5) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+ah)-f(x_0-bh)}{ch}$.

b) Arătați că dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)\right]$, aceasta nu implică existența lui $f'(x_0)$. Construiți un exemplu.

11. Presupunem că $f:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}, \varepsilon>0, f(0)=0$ și că f este derivabilă în $x=0$. Să se arate că :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[f(x)+f\left(\frac{x}{2}\right)+\ldots+f\left(\frac{x}{k}\right)\right]=\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}\right)f'(0), k\in\mathbb{N}^*.$$

12. Dacă $f:E\to\mathbb{R}$ este derivabilă în punctul a din interiorul intervalului E ,atunci să se arate că:

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(a+\frac{1}{n}\right)+f\left(a+\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(a+\frac{k}{n}\right)-k\cdot f(a)\right]=\frac{k(k+a)}{2}f'(a), k\in\mathbb{N}^*.$$

13. O funcție $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ satisface condiția Lipshitz în $x\in(a,b)\Leftrightarrow\exists M>0$ și $\varepsilon>0$ astfel încât $|x-y|<\varepsilon$ și $y\in(a,b)\Rightarrow|f(x)-f(y)|\le M|x-y|$. Dați un exemplu de funcție care nu satisface condiția Lipshitz într-un punct de continuitate .Dacă f este derivabilă în x , atunci f satisface condiția Lipshitz în x.

14. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

1) $f(x)=\begin{cases}x^3, x\in\mathbb{Q}\\ 3x, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$. Studiați derivabiliatatea funcției în $x_0\in\{0,\pm\sqrt{2}\}$.

2) $f(x)=\begin{cases}\sin x, x\in\mathbb{Q}\\ x, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$. Studiați derivabilitatea în $x_0=0$.

15. Arătați că $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}0, x\in\mathbb{Q}\\ x^2(x-1)^2, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$ este derivabilă numai în $x_0\in\{0,1\}$.

16. Fie $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}0, x\in\mathbb{R}-\mathbb{N}^*\\ \frac{1}{2^n}, x=\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$. Să se arate că f este derivabilă în $x=0$ și $f'(0)=0$.

17. În problemele de mai jos exprimați raportul , rata de schimbare cu ajutorul derivatei:

1) Rata de creștere a numărului N de bacterii într-o cultură la timpul t este direct proporțional cu numărul N de bacterii .

2) Rata de descreștere a temperaturii T a corpului uman la momentul t este proporțională cu diferența dintre temperatura corpului și cea a mediului înconjurător.
3) Rata de descreștere a cantității Q de radium dintr-o substanță la momentul t este direct proporțională cu cantitatea Q din acel moment.
4) Forța F de atracție între două obiecte în spațiu este invers proporțională cu pătratul distanței x dintre ele. Determinați rata de schimbare a lui F relativă la x.

18. Testele de memorizare arată că $N(t)=10\sqrt{t}$ reprezintă numărul de cuvinte pe care o persoană normală le poate memora în t minute. Determinați rata de creștere a lui N când $t=16$.

19. În formulările de mai jos exprimați derivata x ca rată a schimbării lui ... relativ la... .

1) $\frac{dh}{dx}$, unde h este înălțimea deasupra nivelului mării și x este distanța parcursă orizontal de-a lungul unei șosele drepte.

2) $\frac{dN}{dt}$,unde N este numărul de persoane din stadion la momentul t , după ce porțile s-au deschis.

3) $\frac{dq}{dv}$, unde q este carburantul utilizat de automobil în litri/km, iar v este viteza automobilului în km/h.

20. Un lichid fierbinte a fost lăsat să se răcească. Temperaturile înregistrate la fiecare minut sunt date în tabelul

t	0	1	2	3	4	5
T	100°	93°	87°	83°	80°	78°

Determinați viteza de descreștere a temperaturii după 3 minute.

21. Un punct A se mișcă de-a lungul unei drepte astfel încât după t secunde spațiul parcurs este dat de legea $s(t)=t^3-12t^2+36t-27$. Ce reprezintă $s'(t), s'(2)$?

22. O săgeată este aruncată din O și descrie curba $y=100x-x^2$. Fie A punctul în care săgeata atinge Ox. Dacă H este punctul, de pe traictorie, de înălțime maximă, atunci $f'(H)=0$. Ce se întâmplă cu săgeata în acest punct ?

5.3. DERIVATE LATERALE

1. Derivata la stânga

În acelaşi mod în care am considerat, într-un punct, limita la stânga sau la dreapta, continuitatea la stânga sau la dreapta pentru funcții, în aceeași manieră se poate introduce noțiunea de derivabilitate la stânga sau la dreapta pentru o funcție.
Fie $f:E\to\mathbb{R}$, unde E este un **interval** sau **o reuniune de intervale** din $\mathbb{R}$ și $x_0\in\mathbb{R}$ punct de acumulare pentru $E\cap(-\infty,x_0)\neq\varnothing$.

Definiții. 1) Se spune că funcția f are **derivată la stânga** în x_0 dacă limita $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ **există în** $\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$.

În acest caz se notează limita prin $f_s'(x_0)$.

2) Se spune că funcția f este **derivabilă la stânga** x_0 dacă limita $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ **există în** $\mathbb{R}$.

Deci, f este derivabilă la stânga în x_0 dacă $f_s'(x_0)$ există și este finită.

Semnificația geometrică. Am văzut la 5.2 (Observația 4) că dacă f (continuă în x_0) are derivată în punctul x_0, atunci $f'(x_0)$ reprezintă panta tangentei în $A(x_0, f(x_0))$ la grafic dacă $f'(x_0)$ este finit, iar dacă $f'(x_0)=\pm\infty$, atunci tangenta în A la grafic este paralelă cu Oy.

Presupunem că f este continuă la stânga în x_0. Dacă $f_s'(x_0)\in\mathbb{R}$, atunci acest număr este panta semitangentei la grafic în A (Fig.3), (în Fig.3.a, $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ iar în Fig.3.b, $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

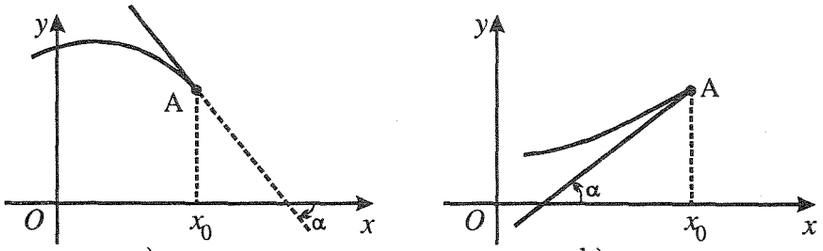


Fig. 3

Dacă $f_s'(x_0)=-\infty$, atunci semitangenta în A este paralelă cu Oy (Fig 4.a), iar dacă, $f_s'(x_0)=\infty$, de asemenea semitangenta este paralelă cu Oy (Fig.4.b).

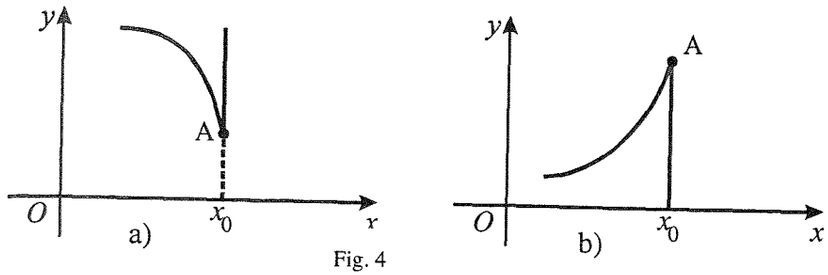


Fig. 4

Exerciții rezolvate

Să se stabilească dacă următoarele funcții au derivate la stânga în punctele indicate.

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\ge 0\\ -x, & x<0\end{cases}, x_0=0$; **2)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}, x_0=0$;

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\min(2x+1,3x+5), x_0=-4$; **4)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=[x-1], x_0=3$;

5) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x-1}, x_0=1$.

R. 1) Trebuie văzut dacă există limita raportului $\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{-x}{x}=-1$. **Deci** $f_s'(0)=-1\in\mathbb{R}$, **ceea ce arată că** f **este derivabilă la stânga în** $x_0=0$.

2) Cercetăm existența limitei raportului $\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{-1}{x}=\dfrac{-1}{0_-}=+\infty$. **Prin urmare** f **are derivată infinită la stânga în** $x_0=0, f_s'(0)=\infty$, **adică** f **nu este derivabilă la stânga în** $x_0=0$.

3) Se explicitează funcția dată și se obține: $f(x)=\begin{cases}2x+1, 2x+1\le 3x+5\\ 3x+5, 3x+5<2x+1\end{cases}=\begin{cases}2x+1, x\ge -4\\ 3x+5, x<-4\end{cases}$.

Avem raportul $R(x)$ **egal cu (pentru** $x<-4$**)**

$R(x)=\dfrac{f(x)-f(-4)}{x-(-4)}=\dfrac{3x+5-(-7)}{x+4}=\dfrac{3(x+4)}{x+4}=3$, **pentru care** $\lim\limits_{x\nearrow -4}R(x)=3$, **care este de fapt** $f_s'(-4)$. **Cum** $f_s'(-4)\in\mathbb{R}$ **se deduce că** f **este derivabilă la stânga în** $x_0=-4$.

4) În jurul punctului $x_0=3$, **funcția** f **are exprimarea** $f(x)=\begin{cases}\cdots\cdots\\ 1, x\in[2,3)\\ 2, x\in[3,4)\\ \cdots\cdots\end{cases}$. **Limita raportului** $R(x)$ **la stânga lui** $x_0=3$ **este:** $\lim\limits_{x\nearrow 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\nearrow 3}\dfrac{1-2}{x-3}=\dfrac{-1}{0_-}=\infty$. **Deci** $f_s'(3)=\infty\in\overline{\mathbb{R}}$, **arată că** f **are derivată infinită la stânga lui** $x_0=3$ **adică** f **nu este derivabilă la stânga în** $x_0=3$.

5) Se calculează limita $\lim\limits_{x\nearrow 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\nearrow 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}-0}{x-1}=\lim\limits_{x\nearrow 1}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\frac{1}{0_+}=\infty$, care arată că

$f_s'(1)=\infty$ și deci f nu este derivabilă la stânga în $x_0=1$, dar are derivată infinită la stânga în acest punct.

Exerciții propuse

Să se stabilească dacă funcțiile următoare au derivate la stânga în punctele indicate (și scrieți ecuațiile semitangentelor în aceste puncte la grafice):

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x-1|, x_0=1$; 2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x^2-5x+6|, x_0=1, x_0=2, x_0=3$;

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\max(x-3,2x+1), x_0=-4$; 4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=[2x+1], x_0=\frac{1}{2}$;

5) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x+1}, x_0=-1$.

2. Derivata la dreapta

Fie funcția $f:E\to\mathbb{R}$ unde E este un **interval** sau **o reuniune de intervale** $x_0\in E$ punct de acumulare pentru $E\cap(x_0,\infty)\neq\varnothing$.

Definiții. 1) Se spune că funcția f are **derivată la dreapta** în x_0 dacă limita $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ **există în** $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$.

Limita de mai sus se notează cu $f_d'(x_0)$.

2) Se spune că funcția f este **derivabilă la dreapta** în x_0 dacă limita $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ **există în** $\mathbb{R}$.

Deci, f este derivabilă la dreapta în x_0 dacă $f_d'(x_0)$ există și este finită.

Semnificația geometrică. Dacă $f_d'(x_0)\in\mathbb{R}$ ($\Rightarrow f$ este continuă la dreapta în x_0), atunci acest număr este panta semitangentei la grafic în A (Fig. 5) (în Fig. 5.a, $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, iar în Fig. 5.b, $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$).

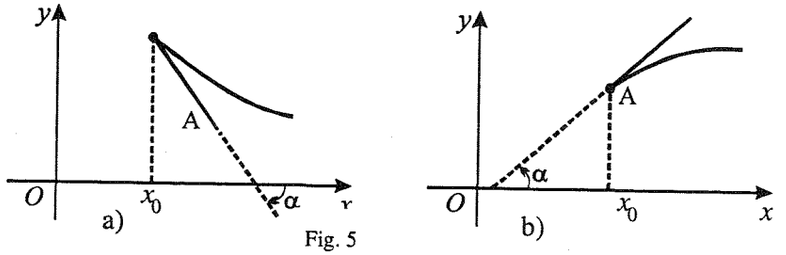


Fig. 5

Dacă $f_d'(x_0)=-\infty$ și f continuă la dreapta în x_0 atunci semitangenta este paralelă cu Oy (Fig. 6.a), iar pentru $f_d'(x_0)=\infty$ și f continuă la dreapta în x_0, de asemenea, semitangenta este paralelă cu Oy (Fig. 6.b).

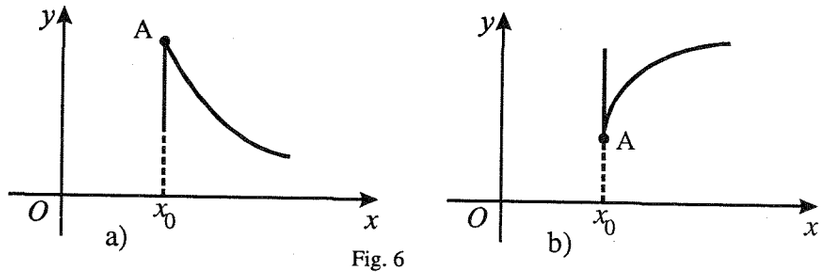


Fig. 6

Exerciții rezolvate

Pentru funcțiile de la 5.3.1 (Exerciții rezolvate) să se precizeze care este derivata la dreapta (dacă există) în punctele indicate.

R. 1) Cum limita $\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{x}{x}=1$ există și este finită se deduce că $f(x)=|x|$ este derivabilă la dreapta în $x_0=0$ și $f_d'(0)=1$. Să observăm că această derivată este diferită de $f_s'(0)=-1$.

Graficul (trasați-l) are un colț „ascuțit" în $x=0$, cu panta schimbându-se brusc de la -1 la 1, când x crește de la valori negative la valori pozitive și panta nu este definită în zero.

2) Acum avem: $\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{1}{x}=\infty$, adică f are derivată la dreapta în $x_0=0$, dar este infinită $f_d'(0)=\infty$ (și deci f nu este derivabilă la dreapta în $x_0=0$).

3) Se calculează $\lim\limits_{x\searrow -4}\frac{f(x)-f(-4)}{x-(-4)}=\lim\limits_{x\searrow -4}\frac{2x+1-(-7)}{x+4}=\lim\limits_{x\searrow -4}\frac{2(x+4)}{x+4}=2$, număr ce reprezintă $f_d'(-4)=2$ și arată că f este derivabilă la dreapta în $x_0=-4$.

4) Avem $\lim\limits_{x\searrow 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\searrow 3}\frac{2-2}{x-3}=0$.

Deci $f_d'(3)=0$, adică f este derivabilă la dreapta în $x_0=3$.

5) Limita raportului $R(x)$ este $\lim\limits_{x\searrow 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\searrow 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1}=\lim\limits_{x\searrow 1}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\infty$.

Deci $f_d'(1)=\infty$, adică f are derivată infinită în $x_0=1$.

Exerciții propuse

Pentru funcțiile de la 1. (Probleme propuse) să se precizeze care este derivata la dreapta (dacă există) în punctele indicate. Scrieți ecuațiile semitangentelor la grafice în aceste puncte.

3. Legătura între derivata într-un punct și derivatele laterale

Fie funcția $f:E\to\mathbb{R}$ și $x_0\in E$ (**interval** sau **reuniune de intervale**), unde x_0 nu este extremitate de interval. Atunci se poate da o caracterizare a faptului că f are derivată (este derivabilă) în x_0 cu ajutorul derivatelor laterale în x_0.
Mai precis are loc următoarea

Teoremă. 1) Funcția f **are derivată în** $x_0\Leftrightarrow f$ are derivate laterale în x_0 și $f_s'(x_0)=f_d'(x_0)=f'(x_0)\in\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

2) Funcția f **este derivabilă în** $x_0\Leftrightarrow f$ este derivabilă bilateral (adică la stânga și la dreapta) în x_0 și $f_s'(x_0)=f_d'(x_0)=f'(x_0)\in\mathbb{R}$.

Demonstrație. Imediat, ținând seama de legătura între existența derivatei unei funcții într-un punct și derivatele laterale în acest punct. ■

Observație. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Dacă f are derivată în punctul $x_0=a$, atunci ea coincide cu derivata la dreapta în $x_0=a$, adică $f'(a)=f_d'(a)=\lim\limits_{x\searrow a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Analog, dacă f are derivată în $x_0=b$, atunci ea coincide cu derivata la stânga în $x_0=b$, adică $f'(b)=f_s'(b)=\lim\limits_{x\nearrow b}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}$.

Exerciții rezolvate

Să se studieze derivabilitatea funcțiilor de mai jos $(f:\mathbb{R}\to\mathbb{R})$, în punctele indicate:

1) $f(x)=|x|, x_0=0$; **2)** $f(x)=x|x|, x_0=0$; **3)** $f(x)=\min(2x+1,3x+5), x_0=-4$;

4) $f(x)=\sqrt[3]{x-1}, x_0=1$; **5)** $f(x)=\begin{cases}\sin x, x\le 0\\ x, x>0\end{cases}, x_0=0$; **6)** $f(x)=\begin{cases}e^x-1, x<0\\ \ln(1+x), x\ge 0\end{cases}, x_0=0$.

R. 1) Am văzut la 5.3.1. și 5.3.2. că $f_s'(0)=-1\neq f_d'(0)=1$, adică f nu este derivabilă în $x_0=0$. Observăm că funcția dată este continuă în $x_0=0$.

2) Se explicitează funcția, când se obține $f(x)=\begin{cases}x^2, x\ge 0\\ -x^2, x<0\end{cases}$, iar de aici

$f_s'(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{-x^2}{x}=0$, $f_d'(0)=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{x^2}{x}=0$, **ceea ce arată că f este derivabilă în $x_0=0$ și $f'(0)=0$.**

3) Din 5.3.1. rezultă $f_s'(-4)=3$, iar în 5.3.2. am găsit $f_d'(-4)=2$. Din faptul că derivatele laterale ale funcției f în $x_0=-4$ sunt diferite rezultă că f nu este derivabilă în acest punct.

4) În 5.3.1. am obținut $f_s'(1)=\infty$, iar la 5.3.2. s-a găsit că $f_d'(1)=\infty$. Deci f nu este derivabilă în $x_0=1$, dar f are derivată în acest punct și $f'(1)=\infty$.

5) Pentru a decide dacă f este derivabilă în $x_0=0$ se calculează derivatele laterale. Avem: $f_s'(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $f_d'(0)=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{x}{x}=1$. **Cum** $f_s'(0)=f_d'(d)\in\mathbb{R}$, **rezultă că f este derivabilă în $x_0=0$ și $f'(0)=1$.**

6) Calculăm derivatele laterale în $x_0=0$. Avem: $f_s'(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$,

$f_d'(0)=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\searrow 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim\limits_{x\searrow 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$. **De aici** $f_s'(0)=f_d'(0)=f'(0)=1$, **ceea ce arată că f este derivabilă în $x_0=0$.**

Exerciții propuse

1. Să se studieze derivabilitatea funcțiilor de mai jos, în punctele indicate:

1) $f(x)=|x-1|, x_0=1$; **2)** $f(x)=(x+1)|x+1|, x_0=-1$; **3)** $f(x)=\max(x,x^2), x_0=0$;

4) $f(x)=\begin{cases}x\sqrt{x}, x\ge 0\\ |x|, x<0\end{cases}, x_0=0$; **5)** $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x+1}, x\ge -1\\ \dfrac{x+1}{x-1}, x<-1\end{cases}, x_0=-1$;

6) $f(x)=\begin{cases}\cos(x-2), x>2\\ x-1, x\le 2\end{cases}, x_0=2$; **7)** $f(x)=\begin{cases}2^x-1, x\ge 0\\ \sin x, x<0\end{cases}, x_0=0$;

8) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-1}, x\ge 1\\ \arccos x, x\in[0,1)\end{cases}, x_0=1$; **9)** $f(x)=\begin{cases}x+|x-1|, x<1\\ \cos(x-1), x\ge 1\end{cases}, x_0=1$;

10) $f(x)=\begin{cases}\ln(1+3x), x\ge 0\\ 3x, x<0\end{cases}, x_0=0$; **11)** $f(x)=x|x-a|+|x-b|, x_0\in\{a,b\}$.

2. Studiați derivabilitatea funcției $<>:[0,\infty)\to\mathbb{R}, <x>=\min(x-[x],\lceil x\rceil-x)$, unde $\lceil x\rceil=\min\{n\in\mathbb{Z}|n\ge x\}$ ($<x>$ reprezintă diferența dintre x și cel mai apropriat întreg; $<>$ este funcția „dinți de fierăstrău") în punctele $x_k=\dfrac{k}{2}, k\in\mathbb{N}$.

3. (Regula „cleștelui") Fie $f,g,h:E\to\mathbb{R}, x_0\in E\cap E'$ astfel încât $g(x)\le f(x)\le h(x)$, $\forall x\in V\in\mathfrak{V}(x_0)$ și $g(x_0)=f(x_0)=h(x_0)$. Dacă g și h sunt derivabile în x_0, atunci și f este derivabilă în x_0 și $f'(x_0)=g'(x_0)=h'(x_0)$.

4. Să se determine coeficienții a,b,c astfel încât curba $f(x)=ax^2+bx+c$ să treacă prin punctul $(1,3)$ și să fie tangentă dreptei $y=-4x+8$ în punctul $(2,0)$. Pentru a,b,c astfel determinați găsiți punctul de pe grafic în care tangenta este paralelă cu axa Ox.

5. 1) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\ln^3 x, x\geq e\\ ax+b, x<e\end{cases}$ este continuă în $x=e$ și există $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{f(x)-f(e)}{x-e}$.

2) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}mx^2+n, x\leq -1\\ 2\ln(x+2), x>-1\end{cases}$. Să se determine parametrii reali m,n pentru care f este derivabilă în $x_0=-1$.

4. Interpretarea geometrică a derivatei. Puncte remarcabile pentru graficul unei funcții

Să considerăm $f:(a,b)\to\mathbb{R}, x_0\in(a,b)$, f **continuă** în x_0.
În acest paragraf suntem interesați de forma graficului funcției f în jurul punctului $A(x_0,f(x_0))$ în următoarele situații:

- are **derivate laterale infinite egale** în x_0;
- f are **derivate laterale infinite diferite** în x_0;
- f are **are derivate laterale diferite în x_0 și cel puțin una din ele este finită.**

vom analiza pe rând.

1) Puncte de inflexiune

Fie $f'(x_0)=\infty$ și în jurul punctului A forma graficului este în general cea din Fig.7.a (în jurul lui x_0, la stânga, graficul se spune că este **convex**, iar la dreapta **concav**). Fie $f'(x_0)=-\infty$ și graficul lui f are, în jurul lui A în general, forma din Fig.7.b.
În ambele cazuri tangenta **traversează** graficul.
Fie $f_s'(x_0)=f_d'(x_0)\in\mathbb{R}$ și forma graficului în jurul lui x_0 poate fi convex (concav) și respectiv concav (convex), Fig.7.c).

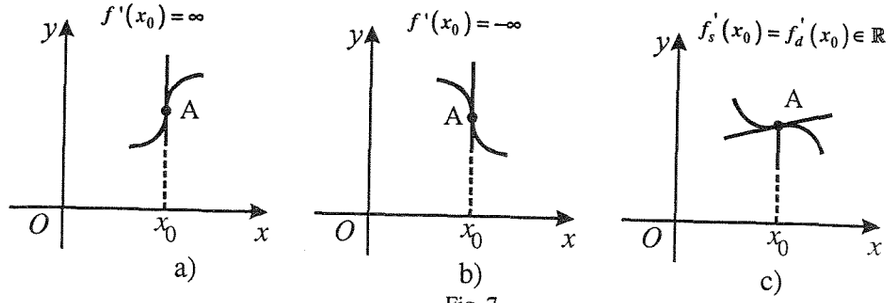


Fig. 7

Punctul A definit în cele trei cazuri se numește **punct de inflexiune** pentru graficul funcției.
Mai precis are loc următoarea

Definiție. Se spune că x_0 este **punct de inflexiune al funcției** f dacă funcția este **continuă** în x_0, **are derivată** în x_0 (finită sau infinită) și dacă graficul este convex (concav) de o parte a lui x_0 și concav (convex) de cealaltă parte.

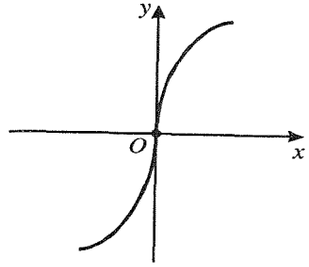


Fig. 8

Punctele de inflexiune vor fi caracterizate echivalent utilizând semnul derivatei a doua !

Exemplu. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x}$. Se găsește ușor că pentru $x_0=0$ avem: $f'(0)=\infty$, ceea ce arată că punctul $(0,f(0))$ este punct de inflexiune pentru grafic, iar forma graficului este (se știe) cea din Fig.8.

Exerciții propuse

1. Să se arate că punctele indicate pentru fiecare din funcțiile de mai jos $(f:\mathbb{R}\to\mathbb{R})$, sunt puncte de inflexiune pentru grafic:

1) $f(x)=-\sqrt[3]{x-1}, A(1,0)$; 2) $f(x)=\sqrt[3]{x+2}, A(-2,0)$; 3) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, x>0\\ \sqrt[3]{x}, x\leq 0\end{cases}, A(0,0)$.

2. Să se studieze pentru care din funcțiile de mai jos $x=0$ este punct de inflexiune (schițând graficul în jurul lui $x=0$):

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}1+\sqrt{x}, x\geq 0\\ -\sqrt{-x}, x<0\end{cases}$; 2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x}$; 3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}e^x, x\geq 0\\ -\dfrac{e^x}{2}+\dfrac{1}{2}, x<0\end{cases}$.

2) Puncte de întoarcere

Dacă $f_s'(x_0)=-\infty\left(\Rightarrow \alpha\to-\frac{\pi}{2}\right)$ și $f_d'(x_0)=\infty\left(\Rightarrow \alpha\to\frac{\pi}{2}\right)$, atunci forma graficului lui f în jurul lui $A(x_0,f(x_0))$ este cea indicată în Fig.9.a (unde am notat prin α unghiul format de semitangentă cu axa Ox, $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Dacă $f_s'(x_0)=\infty$ și $f_d'(x_0)=-\infty$, atunci aliura graficului lui f în jurul punctului $A(x_0,f(x_0))$ este ca în Fig.9.b.

> Punctul $A(x_0,f(x_0))$ se numește **punct de întoarcere** pentru graficul funcției f, dacă funcția f este continuă în x_0 și dacă derivatele laterale ale funcției f în x_0 sunt **infinite** și **diferite**.

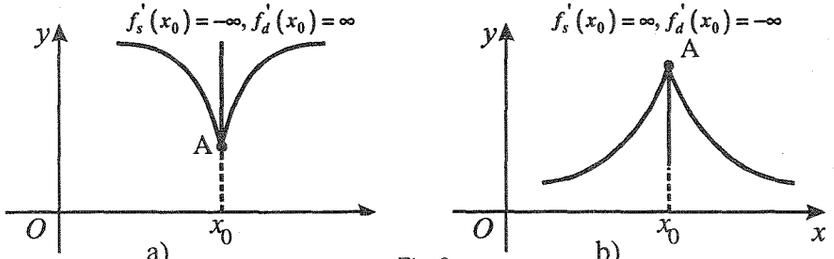


Fig. 9

Exemplu. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, x\geq 0\\ \sqrt{-x}, x<0\end{cases}$.

Să arătăm că punctul $(0,0)$ este punct de întoarcere pentru graficul funcției.

Pentru aceasta calculăm derivatele laterale în $x=0$. Avem:

$f_s'(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\frac{\sqrt{-x}}{x}=\lim\limits_{x\nearrow 0}\frac{\sqrt{-x}}{-\sqrt{-x}\sqrt{-x}}=\frac{1}{0_-}=-\infty$, $f_d'(0)=\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}}=\frac{1}{0_+}=\infty$.

Cum derivatele laterale în $x=0$ sunt infinite și diferite, se deduce că punctul $A(0,0)$ este punct de întoarcere pentru graficul funcției f.

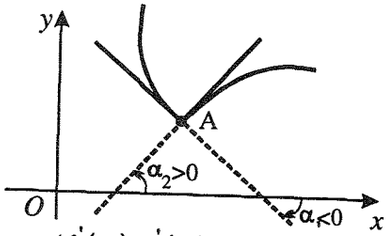
Exerciții propuse

Să se arate că punctele indicate pentru fiecare din funcțiile $(f:\mathbb{R}\to\mathbb{R})$ de mai jos, sunt puncte de întoarcere pentru grafic:

1) $f(x)=\sqrt{|x-1|}, A(1,0)$; **2)** $f(x)=\sqrt{|x+1|}, A(-1,0)$; **3)** $f(x)=\sqrt{|x^2-1|}, A(1,0), B(-1,0)$.

3) Puncte unghiulare

Situația în care derivatele laterale ale funcției f în punctul x_0 sunt diferite și cel puțin una dintre ele este finită, are ca interpretare geometrică existența semitangentelor de pante diferite $f_s'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha_1$, $f_d'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha_2$, fapt ilustrat în Fig.10.



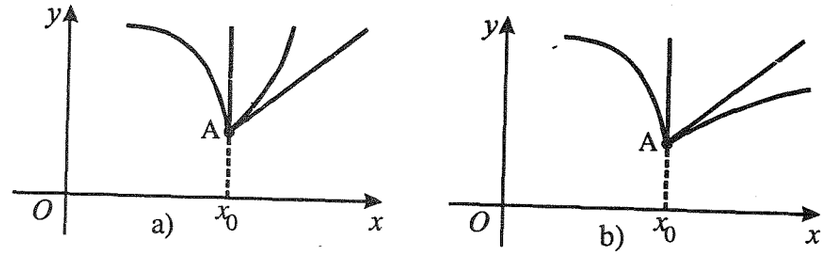
$(f_s'(x_0), f_d'(x_0)\in\mathbb{R}$, diferite)

Fig. 10

Sunt de analizat următoarele cazuri:

Cazul 1. $f_s'(x_0)=-\infty$, $f_d'(x_0)\in\mathbb{R}$. În punctul $A(x_0,f(x_0))$ graficul are două semitangente distincte, de ecuații: $x=x_0, y-f(x_0)=f_d'(x_0)(x-x_0)$.

Forma graficului în jurul punctului A este indicată în Fig. 11 (a, b).

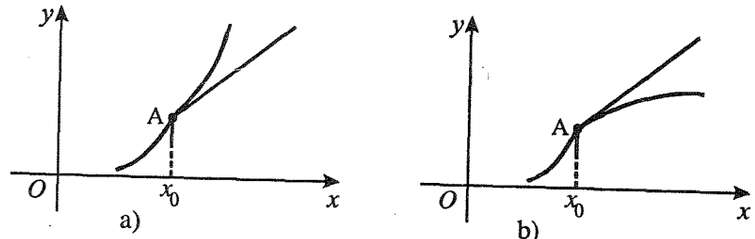


$(f_s'(x_0)=-\infty, f_d'(x_0)\in\mathbb{R})$

Fig. 11

Cazul 2. $f_s'(x_0)=\infty$, $f_d'(x_0)\in\mathbb{R}$. În punctul A graficul are două semitangente diferite de ecuații: $x=x_0$, $y-f(x_0)=f_d'(x_0)(x-x_0)$.

Aliura graficului în jurul punctului A este prezentată în Fig. 12(a, b).

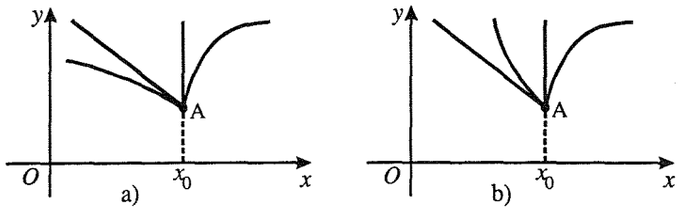


$(f_s'(x_0)=\infty, f_d'(x_0)\in\mathbb{R})$

Fig. 12

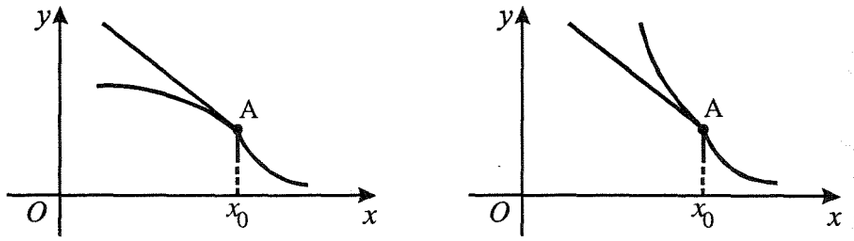
Cazul 3. $f_s'(x_0)\in\mathbb{R}$, $f_d'(x_0)=\infty$. Dreptele de ecuații $y-f(x_0)=f_s'(x_0)(x-x_0)$, $x=x_0$ sunt cele două semitangente la grafic în

punctul A.
În jurul punctului A forma graficului este cea indicată în Fig.13 (a, b).



$\left(f_s'(x_0)\in\mathbb{R}, f_d'(x_0)=\infty\right)$
Fig. 13

Cazul 4. $f_s'(x_0)\in\mathbb{R}$, $f_d'(x_0)=-\infty$. În acest caz ecuațiile
$y-f(x_0)=f_s'(x_0)(x-x_0)$, $x=x_0$ reprezintă ecuațiile semitangentelor în A la grafic. În jurul punctului A graficul arată ca în Fig.14 (a, b).



$\left(f_s'(x_0)\in\mathbb{R}, f_d'(x_0)=-\infty\right)$
Fig. 14

Cazul 5. $f_s'(x_0), f_d'(x_0)\in\mathbb{R}, f_s'(x_0)\neq f_d'(x_0)$. În acest caz graficul are în punctul A două semitangente distincte, de ecuații
$y-f(x_0)=f_s'(x_0)(x-x_0)$, $y-f(x_0)=f_d'(x_0)(x-x_0)$.
Forma graficului în acest caz este indicată în Fig. 10.

Să observăm că în cele cinci cazuri analizate, cele două semitangente în punctul A la grafic formează un unghi între ele. Din acest motiv punctul A se numește punct unghiular al graficului.

> Punctul $A(x_0, f(x_0))$ se numește **punct unghiular** pentru graficul funcției f, dacă funcția f este continuă în x_0 și dacă derivatele laterale ale funcției f în x_0 sunt **diferite și cel puțin una este finită**.

Exercițiu rezolvat

Să se arate că punctele indicate sunt puncte unghiulare pentru graficul funcției:
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x^2-9|, A(3,0), B(-3,0)$. **Scrieți ecuațiile semitangentelor la grafic în aceste puncte.**

R. Funcția este $f(x)=\begin{cases}x^2-9, x\in(-\infty,-3]\cup[3,\infty)\\ 9-x^2, x\in(-3,3)\end{cases}$ pentru care avem:

$$f_s'(3)=\lim_{x\nearrow 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\nearrow 3}\frac{9-x^2}{x-3}=\lim_{x\nearrow 3}-(x+3)=-6,$$

$$f_d'(3)=\lim_{x\searrow 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\searrow 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\searrow 3}(x+3)=6.$$

Cum $f_s'(3)\neq f_d'(3)$ și $f_s'(3), f_d'(3)\in\mathbb{R}$, deducem că $A(3,0)$ este punct unghiular pentru graficul funcției.
Ecuațiile semitangentelor sunt: $y=-6(x-3), y=6(x-3)$.
Pentru $x=-3$ avem, asemănător:

$$f_s'(-3)=\lim_{x\nearrow -3}\frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)}=\lim_{x\nearrow -3}\frac{x^2-9}{x+3}=\lim_{x\nearrow -3}(x-3)=-6,$$

$$f_d'(-3)=\lim_{x\searrow -3}\frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)}=\lim_{x\searrow -3}\frac{9-x^2}{x+3}=\lim_{x\searrow -3}-(x-3)=6.$$

Din $f_s'(-3)=-6\neq 6=f_d'(-3)$ rezultă că $B(-3,0)$ este punct unghiular pentru graficul funcției.
Ecuațiile semitangentelor sunt: $y=-6(x+3)$, $y=6(x+3)$.

Exerciții propuse

Să se arate că punctele indicate pentru fiecare din funcțiile $(f:\mathbb{R}\to\mathbb{R})$ de mai jos sunt puncte unghiulare (scriind și ecuațiile semitangentelor):

1) $f(x)=|x^2-4|, A(-2,0), B(2,0)$; 2) $f(x)=|x|e^{|x-1|}, A(0,0), B(1,1)$;

3) $f(x)=\max(x,x^3), A(0,0), B(-1,-1), C(1,1)$; 4) $f(x)=x|x+1|-|x-1|, A(-1,2), B(1,2)$;

5) $f(x)=\begin{cases}x^3, x\le 0\\ \sqrt{x}, x>0\end{cases}, A(0,0)$.

5.4. CONTINUITATEA UNEI FUNCȚII DERIVABILE

Următorul rezultat stabilește că numai funcțiile continue pot fi derivabile. Mai precis are loc următoarea:

> **Teoremă. 1)** Orice funcție **derivabilă** într-un punct **este continuă** în acel punct.
>
> **2)** Orice funcție **derivabilă** pe o mulțime **este continuă** pe acea mulțime.

Demonstrație. 1) Fie $f:E\to\mathbb{R}$ și $x_0\in E$ un punct de acumulare pentru E în care f este derivabilă. Să probăm că f este continuă în x_0.

Pentru orice $x\in E, x\neq x_0$ are loc egalitatea

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0).$$

Trecând aici la limită după $x\to x_0$ și ținând seama că

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ se obține $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, ceea ce arată că f este continuă în x_0.

2) O funcție este derivabilă pe o mulțime dacă este derivabilă în fiecare punct din mulțime. Se aplică apoi **1)**. ■

Observații. 1) O funcție poate fi continuă în x_0, fără a fi derivabilă în x_0. Așa este funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x|$, care este continuă în $x_0=0$, dar nu este derivabilă în acest punct $\left(f_s'(0)=-1\neq 1=f_d'(0)\right)$.

Deci **condiția de continuitate într-un punct** este **condiție necesară** pentru derivabilitatea funcției în acel punct. **Nu are sens să punem problema derivabilității într-un punct în care funcția nu este continuă sau în puncte izolate.**

2) Ideea intuitivă că o funcție este continuă dacă graficul nu are „rupturi" și că o funcție este derivabilă dacă nu are „colțuri" este bună la acest nivel.

Funcția $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0, f(0)=0$, este continuă în $x=0$, dar nu-i derivabilă în $x=0$. Graficul lui f este cuprins între dreptele $y=-x, y=x\left(\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\le 1\right)$ și

n-are colțuri.

Există funcție continuă în orice punct dintr-un interval, dar care nu este derivabilă în nici un punct din acest interval (exemplul lui Weierstrass

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cos\left(3^n x\right)$$ sau exemplul lui Van der Waerden,

$$f_n(x)=\sum_{1\le k\le n}\left(\frac{<10^k x>}{10^k}\right), x\in[0,1],$$ unde $<\cdot>$ este funcția „dinți de fierăstrău").

Exerciții rezolvate

1. Să se determine parametrii reali m,n astfel încât funcția următoare să fie derivabilă în punctul indicat:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2-1, x\le 2\\ mx+n, x>2\end{cases}, x_0=2.$$

R. 1) Este necesar ca f să fie continuă în $x_0=2$, ceea ce înseamnă

$$\lim_{x\nearrow 2}f(x)=\lim_{x\searrow 2}f(x)=f(2)\Leftrightarrow\lim_{x\nearrow 2}\left(x^2-1\right)=\lim_{x\searrow 2}(mx+n)=2^2-1\Leftrightarrow 3=2m+n,(1).$$

Funcția f este derivabilă în $x_0=2\Leftrightarrow f_s'(2)=f_d'(2)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\nearrow 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=$

$$\lim_{x\searrow 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\Leftrightarrow\lim_{x\nearrow 2}\frac{x^2-1-3}{x-2}=\lim_{x\searrow 2}\frac{mx+n-3}{x-2}\Leftrightarrow\lim_{x\nearrow 2}(x+2)=\lim_{x\searrow 2}\frac{mx+3-2m-3}{x-2}\Leftrightarrow 4=m.$$

Din (1) rezultă $n=-5$.

2. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$ este continuă în $x=0$, dar nu este derivabilă în $x=0$.

R. Din $0\le\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\le|x|$ se deduce (criteriul „cleștelui") $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$, ceea ce arată că f este continuă în $x=0$.

Să observăm că raportul $R(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\sin\dfrac{1}{x}$, pentru $x\neq 0$ nu are limită pentru $x\to 0$, adică f nu este derivabilă în $x=0$.

3. Să se determine punctele de derivabilitate ale funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^3-x^2, x\in\mathbb{Q}\\ 0, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$.

R. În primul rând trebuie să găsim, pentru acest gen de funcții, punctele în care funcția este continuă. Să determinăm punctele x_0 în care f este continuă. Trebuie să fie verificată condiția:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\mathbb{Q}}}f(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}}}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow x_0^3-x_0^2=0,$$ iar de aici $x_0\in\{0,1\}\subset\mathbb{Q}$.

Prin urmare problema derivabilității poate fi pusă doar în $x_0=0$ și $x_0=1$. Funcția f este derivabilă în $x_0=0$ dacă

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\mathbb{Q}}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}}}\frac{f(x)-f(0)}{x}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\mathbb{Q}}}\frac{x^3-x^2}{x}=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}}}\frac{0}{x}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 0=0,$$ ceea ce arată că f este derivabilă în $x_0=0$.

Analog, f este derivabilă în $x_0=1\Leftrightarrow\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\in\mathbb{Q}}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\in\mathbb{Q}}}\dfrac{x^2(x-1)}{x-1}=$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}}\dfrac{0}{x-1}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 1=0$, fals. Deci f nu este derivabilă în $x_0=1$.

Exerciții propuse

1. Să se determine parametrii reali m,n astfel încât funcțiile următoare să fie derivabile în punctele indicate:

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2+mx+n, x\le 2\\ nx+m, x>2\end{cases}, x_0=2$; 2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{mx+n}, x<0\\ \dfrac{1}{x^2-9x+21}, x\ge 0\end{cases}, x_0=0$;

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}mx+n, x>1\\ x^2+1, x\le 1\end{cases}, x_0=1$; 4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2+mx+n, x>0\\ \sin x, x\le 0\end{cases}, x_0=0$;

5) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}me^{2x}, x\le 0\\ \sin 2x+n\cos 3x, x>0\end{cases}, x_0=0$;

6) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^4+mx+2, x<0\\ n+\ln\left(1+x^4\right), x\ge 0\end{cases}, x_0=0$.

2. Fie funcțiile $g,h:(a,b)\to\mathbb{R}$, derivabile, $x_0\in(a,b)$ și $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\begin{cases}g(x), x\in(a,x_0]\\ h(x), x\in(x_0,b)\end{cases}$. Atunci f este derivabilă pe (a,b) dacă și numai dacă $g(x_0)=h(x_0)$ și $g'(x_0)=h'(x_0)$.

3. 1) Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x\cos\dfrac{1}{x}, x\ne 0\\ 0, x=0\end{cases}$ este continuă în $x=0$, dar nu este derivabilă în $x=0$.

2) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x^2}, x\ne 0\\ 0, x=0\end{cases}$. Arătați că f este continuă și derivabilă în $x=0$.

4. Să se determine punctele de derivabilitate ale funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^4, x\in\mathbb{Q}\\ 2x^2, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$.

Generalizați.

5.5. DERIVABILITATEA PE UN INTERVAL. FUNCȚIA DERIVATĂ

Fie $f:E\to\mathbb{R}$ și I un interval din E.

Definiție. Se spune că funcția f este **derivabilă pe intervalul** I dacă este derivabilă în fiecare punct al intervalului I.

Observații. 1) Dacă f **este derivabilă pe tot domeniul său de definiție,** vom spune mai simplu, că f este **derivabilă**, fără altă specificație legată de mulțime.

2) Dacă notăm cu $D_{f'}$ submulțimea lui E formată din toate punctele $x\in E$ cu proprietatea că f este derivabilă în punctul x, adică $D_{f'}=\{x\in E\mid\exists f'(x)\text{ și }f'(x)\in\mathbb{R}\}$ (numit **domeniul de derivabilitate al funcției** f), atunci se poate defini o funcție pe $D_{f'}$ cu valori reale, care asociază fiecărui punct $x\in D_{f'}$ numărul real $f'(x)$, $D_{f'}\ni x\to f'(x)\in\mathbb{R}$.

Această funcție se notează cu f' și se numește **funcția derivată a lui** f sau simplu **derivata lui** f. Procedeul prin care se obține f' din f se numește **derivare**.

3) Este clar că $D_{f'}\subseteq E$. Nu are sens să se vorbească de derivabilitatea unei funcții în puncte care nu se află în domeniul de definiție al funcției.

Exemplu. Să se calculeze f', dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+3x$.

R. Fie $x_0\in\mathbb{R}$, arbitrar. Atunci $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+3x-x_0^2-3x_0}{x-x_0}=$

$=\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{x^2-x_0^2}{x-x_0}+\dfrac{3(x-x_0)}{x-x_0}\right]=\lim\limits_{x\to x_0}(x+x_0+3)=2x_0+3$.

Deci $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f'(x)=2x+3, \forall x\in\mathbb{R}$.

Probleme propuse

1. Determinați domeniile de derivabilitate și calculați f' pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, în cazurile:

1) $f(x)=x^2-x$; 2) $f(x)=x^3$; 3) $f(x)=x|x|$; 4) $f(x)=3x+|x|$; 5) $f(x)=|x|+|x-1|$.

2. Să se determine a,b astfel încât $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, să aibă derivata continuă în cazurile:

1) $f(x)=\begin{cases}ax^3+bx+2, x\le 2\\ bx^2-a, x>2\end{cases}$; 2) $f(x)=\begin{cases}x^2-1, x\le 2\\ ax+b, x>2\end{cases}$; 3) $f(x)=\begin{cases}ax^2+b, x<-1\\ bx^5+ax+4, x\ge -1\end{cases}$;

4) $f(x)=\begin{cases}4x, x\le 0\\ ax^2+bx, x\in(0,1)\\ 3-2x, x\ge 1\end{cases}$.

3. Arătați că următoarele perechi de funcții au graficele tangente în punctul indicat

1) $f(x)=x^2, g(x)=-x^2+4x-2, x_0=1$; 2) $f(x)=e^x, g(x)=ex, x_0=1$.

4. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât următoarele funcții să fie derivabile pe domeniul maxim de definiție:

1) $f(x)=\begin{cases} ax+b, x \le 0 \\ \dfrac{x-1}{x^2+1}, x>0 \end{cases}$; **2)** $f(x)=\begin{cases} e^{ax}, x \le 0 \\ (ax)^x, x>0 \end{cases}, a>0$.

5. Să se studieze derivabilitatea funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

1) $f(x)=\left|\left[x+\frac{1}{2}\right]-x\right|$; **2)** $f(x)=\min\limits_{k\in\mathbb{Z}}|x-k|$; **3)** $f(x)=\left|x^3-3x^2\right|$; **4)** $f(x)=x|x-1|+(x-1)|x|$;

5) $f(x)=\inf\limits_{0\le t\le 1}\left(t^2-2xt+x^2\right)$.

6. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care graficul funcției $f(x)=\sqrt[3]{x^2+ax+1}$ are tangentă în orice punct $x_0\in\mathbb{R}$.

5.6. REGULI DE DERIVARE. DERIVATELE FUNCȚIILOR ELEMENTARE

Derivata unei funcții este definită printr-o limită ceea ce face calculul direct destul de delicat. Este, prin urmare, foarte avantajos de a stabili reguli generale pentru aceste calcule. Vom distinge, în principal, reguli asociate operațiilor elementare efectuate între două funcții și cele relative la compunerea a două funcții.

1. Derivatele unor funcții elementare

1. Funcția constantă. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=c, \forall x\in\mathbb{R}$, unde c este un număr real dat.

Teoremă. Funcția constantă $f(x)=c$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și derivata sa este egală cu zero, adică $f'(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Notație. Se scrie $c'=0$.

Demonstrație. Fie $x_0\in\mathbb{R}$, un punct arbitrar. Raportul $R(x)$ devine

$$R(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{c-c}{x-x_0}=0, x\ne x_0.$$

De aici $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$, adică $f'(x_0)=0$. Cum x_0 a fost ales arbitrar se deduce că

$f'(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$. ■

Exemple. Dacă $f(x)=1, \forall x\in\mathbb{R}$, atunci $1'=0$. Dacă $f(x)=-5, \forall x\in\mathbb{R}$, atunci $(-5)'=0$.

2. Funcția identică. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x, \forall x\in\mathbb{R}$.

Teoremă. Funcția identică este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și derivata sa este egală cu unu, adică $f'(x)=1, \forall x\in\mathbb{R}$.

Notație. Se scrie $(x)'=1$.

Demonstrație. Fie $x_0\in\mathbb{R}$, un punct arbitrar. Pentru $x\ne x_0$, raportul $R(x)$ devine: $R(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{x-x_0}{x-x_0}=1$.

Deci $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=1$. Deoarece x_0 a fost ales arbitrar din $\mathbb{R}$ rezultă

$f'(x)=1, \forall x\in\mathbb{R}$. ■

3. Funcția putere cu exponent natural. Se consideră funcția

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^n, n\in\mathbb{N}^*$.

Teoremă. Funcția putere $f(x)=x^n, n\in\mathbb{N}^*$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și derivata sa este egală cu $f'(x)=nx^{n-1}, \forall x\in\mathbb{R}$.

Notație. Se scrie $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$.

Demonstrație. Fie $x_0\in\mathbb{R}$, un punct oarecare. Pentru $x\ne x_0$, raportul $R(x)$ se scrie succesiv:

$$R(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)\left(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+x^{n-3}x_0^2+\ldots+x_0^{n-1}\right)}{x-x_0}=$$

$$=x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\ldots+x_0^{n-1}.$$

De aici $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=\underbrace{x_0^{n-1}+x_0^{n-1}+\ldots+x_0^{n-1}}_{n\text{ ori}}=nx_0^{n-1}$.

Cum x_0 a fost ales arbitrar din $\mathbb{R}$, deducem că $f'(x)=nx^{n-1},\forall x\in\mathbb{R}$. ■

Exemple. Pentru $f(x)=x^3$, avem $\left(x^3\right)'=3x^2,\forall x\in\mathbb{R}$. De exemplu, pentru $x=3, f'(3)=3\cdot3^2=27$, iar pentru $x=-2, f'(-2)=3(-2)^2=12$. Dacă $f(x)=x^5$, atunci $f'(x)=5x^4,\forall x\in\mathbb{R}$.

4. Funcția radical de ordin n. Fie funcția $f:E\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[n]{x},\forall x\in E,$ $n\in\mathbb{N}, n\geq2$ unde $E=[0,\infty)$ dacă n este par și $E=\mathbb{R}$, dacă n este impar.

Teoremă. Funcția radical **este derivabilă în orice punct** $x\neq0, x\in E$ și derivata sa este egală cu $f'(x)=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}},\forall x\neq0$.

În punctul $x=0$ funcția radical **nu este derivabilă**, dar are derivata $f'(0)=+\infty$.

Notație. Se scrie $\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

Observații. **1)** Dacă $n=2$, atunci $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\forall x>0$.

Dacă $n=3$, atunci $\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},\forall x\neq0$.

2) Dacă $\alpha\in\mathbb{R}$ și $x>0$, atunci vom arăta că $\left(x^\alpha\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$.

Dacă $\alpha=-1$, atunci $\left(x^{-1}\right)'=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$.

Dacă $\alpha=\frac{1}{n}$, atunci $x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$ și $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)'=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ pentru $x>0$ dacă n este par sau $x\in\mathbb{R}^*$ dacă n este impar.

Exemple. **1)** Dacă $f(x)=x^{\frac{2}{3}}, x>0$, atunci $f'(x)=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

Dacă se cere $f'(1)$, atunci acest număr este egal cu $\frac{2}{3}$.

Pentru $f'(2)$ avem valoarea $\frac{2}{3\sqrt[3]{2}}$.

2) Dacă $f(x)=x^{\frac{3}{5}}, x>0$, atunci $f'(x)=\frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1}=\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}=\frac{3}{5x^{\frac{2}{5}}}=\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$.

5. Funcția trigonometrică sinus. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x,\forall x\in\mathbb{R}$.

Teoremă. Funcția trigonometrică sinus **este derivabilă pe** $\mathbb{R}$ și derivata sa este egală cu $f'(x)=(\sin)'(x)=\cos x,\forall x\in\mathbb{R}$.

Notație. Ar trebui să scriem $f'(x)=(\sin)'(x)=\cos x, x\in\mathbb{R}$. Vom conveni să notăm $(\sin)'(x)=(\sin x)'$, atunci când este vorba de **derivata funcției sinus** într-un punct arbitrar. Dacă însă este vorba de funcția constantă $f(x)=\sin c$, cu c număr real dat, atunci $(\sin c)'=0$. Este cu totul altceva $(\sin)'(c)=\cos c$, aici fiind vorba de derivata funcției sinus într-un punct $c\in\mathbb{R}$.

Exemple. $f'(0)=(\sin)'(0)=\cos0=1$; $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=(\sin)'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Problemă propusă. **Să se determine** $a,b\in\mathbb{R}$ **astfel încât** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\sin x, x\leq\frac{2\pi}{3}\\ ax+b, x>\frac{2\pi}{3}\end{cases}$ **să fie derivabilă în** $x=\frac{2\pi}{3}$.

6. Funcția trigonometrică cosinus. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\cos x,\forall x\in\mathbb{R}$.

Teoremă. Funcția trigonometrică cosinus **este derivabilă pe** $\mathbb{R}$ și derivata sa este egală cu $f'(x)=(\cos)'(x)=-\sin x,\forall x\in\mathbb{R}$.

Notație. Asemănător comentariului de la **5.** vom conveni să notăm **derivata funcției cosinus** prin $f'(x)=(\cos x)'=-\sin x, \forall x\in\mathbb{R}$.

Probleme propuse

1. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}1+a\cos x, x\le\frac{\pi}{3}\\ b+\sin\frac{x}{2}, x>\frac{\pi}{3}\end{cases}$, să fie derivabilă în $x=\frac{\pi}{3}$.

2. Să se determine numerele a_1,b_1,a_2,b_2 pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}a_1x+b_1, x>\frac{\pi}{2}\\ \cos x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\\ a_2x+b_2, x<-\frac{\pi}{2}\end{cases}$ este derivabilă.

7. Funcția logaritm natural. Se consideră $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x, \forall x>0$.

Teoremă. **Funcția logaritmică este derivabilă pe** $(0,\infty)$ și derivata sa este egală cu $f'(x)=(\ln)'(x)=\frac{1}{x}, \forall x>0$.

Notație. Derivata funcției $f(x)=\ln x$ este $f'(x)=(\ln)'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}, \forall x>0$.

Exemple. $f'(1)=1$; $f'(e)=\frac{1}{e}, f'(3)=\frac{1}{3}$.

Observație. Dacă se consideră $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\log_a x, a>0, a\neq 1$, funcția logaritmică de bază a, atunci $\boxed{(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}, \forall x>0}$.

Demonstrație. Este imediat dacă se ține seama că $\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$. ■

Operații cu funcții derivabile

Rezultatele care urmează se referă la operații cu funcții derivabile **într-un punct** și **pe o mulțime.** Se va vedea în continuare că operațiile algebrice cu funcții derivabile conduc la funcții derivabile.

Suma

Fie $f,g:E\to\mathbb{R}$ două funcții și $x_0\in E\cap E'$.

Teoremă. 1) Dacă funcțiile f și g sunt derivabile în x_0, atunci $f+g$ este derivabilă în x_0 și avem egalitatea: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

2) Dacă f,g sunt funcții derivabile (pe E), atunci și suma lor $f+g$ este o funcție derivabilă (pe E) și $(f+g)'=f'+g'$.

(Derivata sumei este egală cu suma derivatelor)

Demonstrație. 1) Se scrie raportul $R(x)$ pentru $f+g$:

$$R(x)=\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{(f(x)-f(x_0))+(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}=$$

$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}, \text{ dacă } x\neq x_0.$$

Trecând la limită aici după $x\to x_0$ și ținând seama de faptul că f și g sunt derivabile în x_0 obținem: $(f+g)'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+$

$$+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0).$$

2) Se utilizează definiția funcției derivabile pe o mulțime și **1)**. ■

Observații. 1) Dacă $f_1,f_2,...,f_n:E\to\mathbb{R}$ sunt funcții derivabile (pe E), atunci $f_1+f_2+...+f_n$ este derivabilă (pe E) și $(f_1+f_2+...+f_n)'=f_1'+f_2'+...+f_n'$.

2) Dacă $f+g$ este derivabilă, atunci nu rezultă f,g derivabile.

Exerciții rezolvate

Să se calculeze derivata funcției f și apoi $f'(x_0)$, unde x_0 este punctul indicat în dreptul fiecărei funcții:

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x+x^3+x, x_0=0$; **2)** $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^4+\ln x, x_0=1$;

3) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+3, x_0=2$.

R. 1) $f'(x)=(\sin x)'+\left(x^3\right)'+x'=\cos x+3x^2+1, \forall x\in\mathbb{R}$. **În particular** $f'(0)=\cos 0+3\cdot 0^2+1=1+1=2$.

2) $f'(x)=\left(x^4\right)'+(\ln x)'=4x^3+\frac{1}{x}, \forall x>0$, **iar pentru** $x=1$ **avem** $f'(1)=4+1=5$.

3) $f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'+\left(x^{-2}\right)'+3'=-\frac{1}{x^2}+\left(-2x^{-3}\right)+0=-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}$, iar pentru $x=2$ avem

$f'(2)=-\frac{1}{4}-\frac{2}{8}=-\frac{1}{2}$.

Exerciții propuse

1. Să se calculeze derivata funcției f și apoi $f'(x_0)$, unde x_0 este punctul indicat în dreptul fiecărei funcții:

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=1+x+x^2+x^3, x_0=1$; 2) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}, x_0=-1$;

3) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=-3+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}, x_0=1$; 4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x+\cos x+100$, $x_0=\frac{\pi}{2}$;

5) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\log_3 x+\lg x+\sqrt{x}-5, x_0=3$.

2. 1) Dați exemplu de două funcții nederivabile în x_0, pentru care suma este derivabilă în x_0.

2) Construiți două funcții $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, nederivabile pentru care $f+g$ este derivabilă.

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x|x-a|+|x-b|$. Să se arate că f este derivabilă $\Leftrightarrow a=b=-1$. Generalizare.

Produsul

Se consideră $f,g:E\to\mathbb{R}$ două funcții și $x_0\in E\cap E'$.

Teoremă. 1) Dacă funcțiile f și g sunt derivabile în x_0, atunci produsul lor $f\cdot g$ este o funcție derivabilă în x_0 și avem egalitatea: $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$.

---

2) Dacă f,g sunt funcții derivabile (pe E), atunci și produsul lor $f\cdot g$ este o funcție derivabilă (pe E) și $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$.

(Derivata produsului este egală cu prima funcție derivată înmulțită cu a doua nederivată, plus prima funcție nederivată înmulțită cu a doua derivată)

Demonstrație. 1) Fie $x\neq x_0, x\in E$ și raportul $R(x)$ pentru $f\cdot g$ se scrie succesiv astfel: $R(x)=\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=$

$=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=$

$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$.

(Am adunat și scăzut la numărător $f(x_0)g(x)$).

Deoarece funcția g este derivabilă în x_0, ea este continuă în acest punct și deci $\lim_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$. Funcțiile f,g fiind derivabile în x_0 rezultă

$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$, $\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=g'(x_0)$.

Acum trecând la limită în $R(x)$ după $x\to x_0$ se obține: $(f\cdot g)'(x_0)=$

$=\lim_{x\to x_0}R(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}g(x)+f(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=$

$=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$.

2)Se utilizează definiția funcției derivabile pe o mulțime și 1). ■

Observații. 1) Dacă $f,g,h:E\to\mathbb{R}$ sunt trei funcții derivabile (pe E), atunci $f\cdot g\cdot h$ este o funcție derivabilă (pe E) și avem:

$(f\cdot g\cdot h)'=f'\cdot g\cdot h+f\cdot g'\cdot h+f\cdot g\cdot h'$.

Într-adevăr $(f\cdot g\cdot h)'=(f\cdot g)'\cdot h+(f\cdot g)\cdot h'=(f'\cdot g+f\cdot g')h+(f\cdot g)\cdot h'=$

$=f'\cdot g\cdot h+f\cdot g'\cdot h+f\cdot g\cdot h'$.

În general dacă $f_i:E\to\mathbb{R}, i=\overline{1,n}$, sunt funcții derivabile (pe E), atunci $f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n$ este derivabilă (pe E) și

$(f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n)'=f_1'\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n+f_1\cdot f_2'\cdot f_3\cdot\ldots\cdot f_n+\ldots+f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_{n-1}\cdot f_n'$,

demonstrația făcându-se prin inducție.

2) Dacă $f(x)=k, \forall x\in E$, adică f este funcția constantă și g este o funcție derivabilă (pe E), atunci $k\cdot g$ este o funcție derivabilă (pe E) și

$(kg)'=k\cdot g'$

(Constanta iese în afara derivării).

În particular pentru $k=-1$, se obține $(-g)'=-g'$.

Acum ținând seama de rezultatul pentru sumă și acest ultim rezultat avem pentru două funcții f,g derivabile (pe E) că $f-g$ este o funcție derivabilă (pe E) și

$(f-g)'=f'-g'$

(Derivata diferenței a două funcții este egală cu diferența derivatelor)

3) Derivata unui determinant. Fie $f_{ij}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$ funcții derivabile. Atunci are loc formula de derivare a unui determinat.

$$d'=\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x)\\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \dots & f_{2n}(x)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x)\end{vmatrix}'=\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ f_{j1}'(x) & f_{j2}'(x) & \dots & f_{jn}'(x)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x)\end{vmatrix}.$$

Într-adevăr din $d=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)f_{1\sigma(1)}(x)f_{2\sigma(2)}(x)\dots f_{n\sigma(n)}(x)$ prin derivare rezultă

$$d'=\sum_{j=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)f_{1\sigma(1)}(x)\dots f_{j\sigma(j)}'(x)\dots f_{n\sigma(n)}(x).$$

4) Dacă $f\cdot g$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$, atunci f, g pot (sau nu) să fie derivabile.

Exerciții rezolvate

Să se calculeze derivata funcției f și apoi $f'(x_0)$, acolo unde x_0 este indicat în dreptul funcției:

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x^5-2x^3+4x+6, x_0=0$;

2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=1+2x+3x^2+\dots+nx^{n-1}, n\in\mathbb{N}^*, x_0=1$; **3)** $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\ln x, x_0=e$;

4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x\sin x$; **5)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x\cos x$;

6) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x\sin x\cos x, x_0=\pi$; **7)** $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x}\sin x+5\cos x-\frac{3}{x}+9$;

8) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\sin x$; **9)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left(2x^3-3x^2+5x-3\right)(1+\sin x)$;

10) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\left(1+2x+3x^2\right)$.

R. **1)** $f'(x)=15x^4-6x^2+4,4$; **2)** $f'(x)=2+3\cdot 2x+\dots+n(n-1)x^{n-2}$,

$\sum_{k=2}^{n}(k-1)k=\sum_{k=2}^{n}k^2-\sum_{k=2}^{n}k=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$; **3)** $f'(x)=\ln x+1$;**2;**

4) $f'(x)=\sin x+x\cos x$; **5)** $f'(x)=\cos x-x\sin x$; **6)** $f'(x)=\sin x\cos x+x\cos^2 x-x\sin^2 x=$

$=\frac{1}{2}\sin 2x+x\cos 2x;\pi$; **7)** $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x+\sqrt{x}\cos x-5\sin x+\frac{3}{x^2}$;

8) $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cdot\frac{1}{x}\cdot\sin x+\sqrt[3]{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\sin x+\sqrt[3]{x}\cdot\frac{1}{x}\cos x$;

9) $f'(x)=\left(6x^2-6x+5\right)(1+\sin x)+\left(2x^3-3x^2+5x-3\right)\cos x$;

10) $f'(x)=\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)\left(1+2x+3x^2\right)+\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)(2+6x)$.

Exerciții propuse

1. Să se calculeze derivata funcției f și apoi $f'(x_0)$, acolo unde x_0 este indicat în dreptul funcției:

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x^4-2x^3+5x+10, x_0=-1$; **2)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(1-3x)(1+6x), x_0=0$;

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin 2x, x_0=\frac{\pi}{2}$; **4)** $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=(1+x)\ln x$;

5) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)\ln x$; **6)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(2\sin x+3)(1-5\cos x)$;

7) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left(1-3x^2\right)(1-2\sin x)$; **8)** $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\left(-\frac{3}{x}+4\right)(2\ln x-3)$;

9) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=(1+x)(2\ln x)(3\sin x-5)$; **10)** $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=3x^2\cdot\ln x\cdot\sin x$;

11) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\cos x-5x\ln x+3\sin x-x^2+2x$;

12) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\left(3\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}\right)\sin x+5(\sin x)\ln x-x^3+4x+5$.

2. În exercițiile următoare să se determine $f'(0)$ dacă $g(0)=3$ și $g'(0)=2$.

1) $f(x)=x\,g(x)$; **2)** $f(x)=3x^2g(x)-5x$.

3. 1) Dați exemple de două funcții nederivabile în x_0, având produsul o funcție derivabilă în x_0.

2) Construiți două funcții $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nederivabile cu $f\cdot g$ derivabilă.

4. Fie f derivabilă în x_0, $f(x_0)\neq 0$, g nederivabilă în x_0, dar continuă în x_0. Arătați că $f\cdot g$ nu este derivabilă în x_0.

Câtul

Fie $f, g:E\to\mathbb{R}$ și $x_0\in E\cap E'$.

Teoremă. 1) Dacă funcțiile f, g sunt derivabile în x_0, $g(x_0)\neq 0$, atunci și funcția – cât $\frac{f}{g}$ este derivabilă în x_0 și are loc egalitatea

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

2) Dacă funcțiile f, g sunt derivabile (pe E), $g(x)\neq 0, x\in E$, atunci funcția – cât $\frac{f}{g}$ este derivabilă (pe E) și

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}.$$

(derivata câtului este egală cu derivata numărătorului înmulțită cu numitorul nederivat minus numărătorul nederivat înmulțit cu derivata numitorului, totul supra numitorul la pătrat)

Demonstrație. 1) Pentru $x\neq x_0, x\in E$ considerăm raportul $R(x)$ relativ la funcția

$$\frac{f}{g};\ R(x)=\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x-x_0}=\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{(x-x_0)g(x)g(x_0)}=$$

$$=\frac{\left[f(x)-f(x_0)\right]g(x_0)-\left[g(x)-g(x_0)\right]f(x_0)}{(x-x_0)g(x)g(x_0)}=$$

$$=\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0)-\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}f(x_0)\right]\frac{1}{g(x)g(x_0)}.$$

Am adunat şi scăzut la numărător $f(x_0)g(x_0)$. Cum funcţiile f, g sunt derivabile în x_0, termenii din paranteză au limitele:

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=g'(x_0)$, iar din continuitatea lui g (g fiind derivabilă în x_0) în x_0, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$. Deci $R(x)$ are limită

în x_0 şi $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=\left[\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x_0)-\right.$

$$\left.-\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\cdot f(x_0)\right]\frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)g(x_0)}=$$

$$=\left[f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)\right]\frac{1}{g^2(x_0)}.$$

2) Se foloseşte definiţia funcţiei derivabile pe o mulţime şi **1)**. ■

Exemple. 1) Fie $f(x)=\operatorname{tg}x, x\in\mathbb{R}-\{x\in\mathbb{R}\,|\cos x=0\}=E$. Atunci $(\operatorname{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}, \forall x\in E$.

Într-adevăr $(\operatorname{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$.

2) Considerăm $f(x)=\operatorname{ctg}x, x\in\mathbb{R}-\{x\,|\sin x=0\}=E$. **Atunci** $(\operatorname{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}, \forall x\in E$.

Avem: $(\operatorname{ctg}x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}$.

Exerciţii rezolvate

Să se calculeze derivata funcţiei f şi apoi $f'(x_0)$, acolo unde x_0 este indicat în dreptul funcţiei:

1) $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x-1}, x_0=2$; **2)** $f:\mathbb{R}-\{1,2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}, x_0=0$;

3) $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x\sqrt{x}}{x+1}$; **4)** $f:(0,\infty)-\{e\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\ln x}{\ln x-1}$;

5) $f:\mathbb{R}-\{x\,|\operatorname{tg}x=1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}, x_0=\frac{\pi}{2}$.

R. 1) $f'(x)=\frac{1'(x-1)-1(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}, x\neq 1$; $f'(2)=\frac{-1}{(2-1)^2}=-1$.

2) Se observă că $f(x)=\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x-2}$ şi deci $f'(x)=\left(-\frac{1}{x-1}\right)'+\left(\frac{1}{x-2}\right)'=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-2)^2}$.

3) $f'(x)=\frac{\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'(x+1)-x\sqrt{x}(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(x+1)-x\sqrt{x}}{(x+1)^2}=\frac{\sqrt{x}(x+3)^2}{2(x+1)^2}$.

4) $f'(x)=\frac{(\ln x)'(\ln x-1)-\ln x(\ln x-1)'}{(\ln x-1)^2}=\frac{\frac{1}{x}(\ln x-1)-(\ln x)\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x-1)^2}=-\frac{1}{x(\ln x-1)^2}$.

5) $f'(x)=\frac{(\sin x+\cos x)'(\sin x-\cos x)-(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)'}{(\sin x-\cos x)^2}=$

$$=\frac{(\cos x-\sin x)(\sin x-\cos x)-(\sin x+\cos x)(\cos x+\sin x)}{(\sin x-\cos x)^2}=\frac{-2}{(\sin x-\cos x)^2};\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2.$$

Exerciţii propuse

1. Să se calculeze derivata funcţiei f şi apoi $f'(x_0)$, acolo unde x_0 este indicat în dreptul funcţiei:

1) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}, x\neq 1, x_0=0$; **2)** $f(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}, x\neq -1,-2$; **3)** $f(x)=\frac{x+1}{x+2}, x\neq -2, x_0=1$;

4) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}, x_0=-1$; **5)** $f(x)=\frac{x^2+x-1}{x^3+1}$, $x\neq -1, x_0=0$; **6)** $f(x)=\frac{x^3-2x}{x^2+x+1}, x_0=1$;

7) $f(x)=\frac{1-x^3}{1+x^3}, x\neq -1$; **8)** $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}, x\geq 0$; **9)** $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}, x\geq 0, x\neq 1$;

10) $f(x)=\frac{x\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}+1}, x\geq 0$; **11)** $f(x)=\frac{\ln x+x}{\ln x-x}, x>0, x_0=1$; **12)** $f(x)=\frac{\ln x+x^2}{\ln x-x^2}, x>0$;

13) $f(x)=\frac{2\sin x}{3\cos x-5}, x_0=0$; **14)** $f(x)=\frac{-\sin x+3\cos x}{\sin x+4}$; **15)** $f(x)=\frac{2\sin x-5\cos x}{3\sin x+4}$.

2. În exerciţiile următoare să se determine $f'(0)$ dacă $g(0)=3$ şi $g'(0)=3$:

1) $f(x)=g(x)-\frac{1}{g(x)}$; **2)** $f(x)=g(x)+\frac{x}{g(x)}$.

3. Derivarea funcţiilor compuse

În paragraful **2** am constatat că efectuând operaţii algebrice cu funcţii derivabile se obţin, de asemenea, funcţii derivabile. Un alt mod de a genera funcţii derivabile îl constituie compunerea funcţiilor derivabile.

Mai precis are loc următoarea

Teoremă. 1) Fie I, J intervale şi $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ două funcţii. Dacă f este derivabilă în $x_0 \in I$, iar g este derivabilă în punctul $f(x_0) = y_0$, atunci funcţia compusă $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă în x_0 şi mai mult

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\left(f(x_0)\right) \cdot f'(x_0).$$

2) Fie I, J intervale şi $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ două funcţii. Dacă f este derivabilă pe I şi g este derivabilă pe J, atunci $g \circ f$ este derivabilă pe I şi

$$(g \circ f)' = g'(f) \cdot f'$$

Observaţii. 1) Dacă se consideră trei funcţii derivabile $f : I \to J, g : J \to K$, $h : K \to \mathbb{R}$ atunci funcţia $h \circ g \circ f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă şi $(h \circ g \circ f)' = h'(g \circ f) \cdot g'(f) \cdot f'$ rezultat ce se obţine imediat aplicând corolarul precedent $\left[h \circ (g \circ f)\right]' = h'(g \circ f) \cdot (g \circ f)' = h'(g \circ f) \cdot g'(f) \cdot f'$.

2) Deci

Derivata unei funcţii compuse se obţine înmulţind derivatele funcţiilor care se compun în ordinea compunerii lor.

Exerciţii rezolvate

1. Fie $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^2 + 3x + 2, h(x) = x^3$ **pentru care** $g'(x) = 2x + 3$ **şi** $h'(x) = 3x^2$. **Să considerăm funcţia** $f = h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (h \circ g)(x) = h\left(g(x)\right) = \left(x^2 + 3x + 2\right)^3$.

Atunci $f'(x) = (h \circ g)'(x) = h'\left(g(x)\right) \cdot g'(x) = 3g(x) \cdot (2x + 3) = 3\left(x^2 + 3x + 2\right)(2x + 3)$.

Observaţie. În acest exerciţiu am ales noi funcţiile g, h **şi cu ajutorul lor am constituit funcţia compusă** $f = h \circ g$. **De obicei în aplicaţii se dă funcţia** f **şi rămâne în seama cititorului evidenţierea funcţiilor care se compun. Se impune o atenţie deosebită la ordinea în care apar funcţiile în compunere.**

2. Să se calculeze derivatele funcţiilor compuse (punând de fiecare dată în evidenţă funcţiile care se compun):

a) $f(x) = \sin x^2, x \in \mathbb{R}$; **b)** $f(x) = \sin^2 x, x \in \mathbb{R}$; **c)** $f(x) = \sin^3\left(x^2 + 1\right), x \in \mathbb{R}$;

d) $f(x) = \ln\left(1 + x^2 + x^3\right), x > 0$; **e)** $f(x) = \ln^5 x, x > 0$; **f)** $f(x) = \ln^3\left(3x^2 + 5x\right), x > 0$.

R. a) Funcţia f **este compunerea funcţiilor** $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^2$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = \sin x$.

Atunci $f = h \circ g, f(x) = h\left(g(x)\right) = \sin x^2$. **Deci** $f'(x) = h'\left(g(x)\right) \cdot g'(x) = \left(\cos x^2\right) \cdot 2x = 2x \cos x^2$.

Este clar că h, g **sunt derivabile şi are loc teorema de la derivarea funcţiilor compuse. De acum înainte această observaţie o va face cititorul. Deci prima funcţie din compunere este sin şi apoi funcţia polinomială** $g(x) = x^2$. **Dacă gândim funcţia** $f(x) = \sin u(x)$, **unde** $u(x) = x^2$, **atunci conform formulei de la derivarea funcţiei compuse avem:**

$f'(x) = \left(\sin u(x)\right)' = \cos u(x) \cdot u'(x) = 2x \cos x^2$.

b) În acest caz trebuie să evidenţiem două funcţii: $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \sin x$ **şi** $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = x^2$ **(funcţia putere), pentru care** $g'(x) = \cos x, h'(x) = 2x$. **Deci** $f(x) = (h \circ g)(x)$ **şi** $f'(x) = h'\left(g(x)\right) \cdot g'(x) = h'(\sin x) \cdot (\sin x)' = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$.

Analog am putea considera $f(x) = u^2(x)$, **unde** $u(x) = \sin x$ **şi deci** $f'(x) = 2 \cdot u(x) \cdot u'(x) = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$.

c) În acest caz avem în compunere funcţiile $g, h, i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, **unde** $g(x) = x^2 + 1, h(x) = \sin x, i(x) = x^3$ **pentru care** $g'(x) = 2x$, $h'(x) = \cos x, i'(x) = 3x^2$ **când** $f(x) = (i \circ h \circ g)(x) = i\left(h\left(g(x)\right)\right) = i\left(h\left(x^2 + 1\right)\right) = i\left(\sin\left(x^2 + 1\right)\right) = \left(\sin\left(x^2 + 1\right)\right)^3$, **adică ordinea în compunere este funcţia putere, funcţia sin şi apoi funcţia polinomială.**

De aici $f'(x) = i'\left(h\left(g(x)\right)\right) \cdot h'\left(g(x)\right) \cdot g'(x) = 3h\left(g(x)\right)^2 \cdot \cos\left(g(x)\right) \cdot 2x =$

$= 3 \sin^2\left(x^2 + 1\right) \cdot \cos\left(x^2 + 1\right) \cdot 2x$.

d) Aici se compune în ordine funcţia logaritmică $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}, h(x) = \ln x$ **cu funcţia polinomială** $g : (0, \infty) \to (1, \infty), g(x) = x^3 + x^2 + 1$ **cu** $h'(x) = \frac{1}{x}$ **şi** $g'(x) = 3x^2 + 2x$ **când avem:** $f(x) = (h \circ g)(x)$. **Deci** $f'(x) = h'\left(g(x)\right) \cdot g'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot \left(3x^2 + 2x\right) = \frac{3x^2 + 2x}{x^3 + x^2 + 1}$.

Dacă gândeam funcţia f **ca fiind** $f(x) = \ln u(x)$ **unde** $u(x) = g(x)$, **atunci**

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{3x^2 + 2x}{x^3 + x^2 + 1}.$$

e) Scriind $f(x) = (\ln x)^5$ **se constată uşor că prima funcţie din compunere este funcţia putere** $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = x^5$, **iar a doua funcţie este** $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}, g(x) = \ln x$ **pentru care** $h'(x) = 5x^4, g'(x) = \frac{1}{x}$. **Aşadar** $f'(x) = \left[(\ln x)^5\right]' = 5(\ln x)^4 \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{x} \ln^4 x$.

f) Se remarcă uşor că în structura funcţiei sunt trei funcţii ce se compun $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 3x^2 + 5x$ **(funcţie polinomială),** $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}, h(x) = \ln x$ **(funcţia logaritmică) şi în fine** $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, i(x) = x^3$ **(funcţia putere). Deci** $f(x) = (i \circ h \circ g)(x)$. **Avem** $g'(x) = 6x + 5, h'(x) = \frac{1}{x}, i'(x) = 3x^2$. **Acum este uşor de văzut că** $f'(x) = i'\left(h\left(g(x)\right)\right) \cdot h'\left(g(x)\right) \cdot g'(x) = 3 \ln^2\left(3x^2 + 5x\right) \cdot \frac{1}{3x^2 + 5x} \cdot (6x + 5)$.

Observaţii. 1) Dacă funcţia se exprimă prin radical dintr-o funcţie derivabilă, atunci studiul derivabilităţii se face în punctele în care se anulează radicalul.

2) Este util pentru profesor în predarea derivatei funcţiei compuse de a utiliza, pentru funcţiile care se compun, cretă de culori diferite, pentru fiecare funcţie o altă culoare, păstrând aceeaşi culoare pentru funcţia respectivă pe tot parcursul derivării.

Pentru primul exemplu analizat mai sus avem:

$(\sin x^2)' = (\cos x^2)\cdot 2x$, **unde funcția** $h = \sin$ **este scrisă cu roșu, iar** $g(x) = x^2$ **apare scrisă cu negru.**

Exerciții propuse

1.Să se calculeze derivatele următoarelor funcții f **indicând domeniul de definiție** (D_f) **și de derivabilitate** $(D_{f'})$:

1) $f(x) = (x^2 - 3x)^5$; 2) $f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^3$; 3) $f(x) = (1+\sqrt{x})^3$; 4) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$;

5) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$; 6) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$; 7) $f(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$; 8) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x}$;

9) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$; 10) $f(x) = \sin(3x+1)$; 11) $f(x) = \frac{1}{2}\cos x^2$; 12) $f(x) = \operatorname{tg}(x^2+1)$;

13) $f(x) = \operatorname{ctg}(x^4 + x^2 + 1)$; 14) $f(x) = (1+\sin^2 x)^5$; 15) $f(x) = \sin^3(x^2+3x)$; 16) $f(x) = \cos^2 x^3$;

17) $f(x) = (1+\operatorname{tg}^2 x)^3$; 18) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$; 19) $f(x) = \sin\sqrt{1+x}$; 20) $f(x) = \sin(\sin x)$;

21) $f(x) = \ln(1-x)$; 22) $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$; 23) $f(x) = \ln\sqrt{x}$; 24) $f(x) = \ln\sin x$; 25) $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

2.Se dau $f(0)=1, f'(0)=2, f(1)=0, f'(1)=1,\ f(2)=2, f'(2)=2, g(0)=2, g'(0)=1, g(1)=1,$ $g'(1)=1, g(2)=2, g'(2)=1,\ h(0)=1, h'(0)=2, h(1)=1, h'(1)=1, h(2)=0, h'(2)=2.$

Să se calculeze: 1) $(f\circ g)'(0)$; 2) $(f\circ g)'(1)$; 3) $(g\circ f)'(2)$; 4) $(f\circ h\circ g)'(0)$; 5) $(g\circ f\circ h)'(1)$.

3.Fie $f, g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **funcții derivabile astfel încât** $f'(x) = g(x)$ **și** $g'(x) = f(x)$. **Dacă** $h: \mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x) = f^2(x) - g^2(x)$, **atunci calculați** $h'(x)$.

4.a) Fie $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **o funcție derivabilă. Arătați că dacă 1)** f **este pară, atunci** f' **este impară; 2)** f **este impară, atunci** f' **este pară; 3)** f **periodică, atunci** f' **este periodică.**

b) Dacă $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **este derivabilă și funcție pară, atunci** $f'(0) = 0$.

c) Fie $f, g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f **funcție pară și derivabilă cu** $g(x) = \left(\frac{x^3}{3}+1\right)f(x)$. **Arătați că** $g'(0) = 1$.

5.Un obiect se mișcă de-a lungul curbei $y = x^3 - 3x + 5$ **astfel încât abscisa** x **la momentul** t **este dată de** $x = 2t^2 - t + 2, t \geq 0$. **Care este viteza de schimbare a lui** y **când** $t = 2$?

6.Fie $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **derivabilă în** x_0 **și** $f(x_0) = 0$. **Arătați că** $g(x) = |f(x)|$ **este derivabilă în** $x_0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$.

7.Dați exemplu de două funcții nederivabile în x_0, **cu câtul lor derivabil în** x_0.

8.Dați exemple de funcții $f, g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}, g$ **neconstantă,** f **nederivabilă în** $x_0 \in \mathbb{R}, g$ **derivabilă în** $f(x_0)$ **cu** $g\circ f$ **derivabilă în** x_0.

4. Derivarea funcției inverse

Prezentăm în acest paragraf o ultimă modalitate de a obține funcții derivabile, oferind în același timp un procedeu important de derivare. Am văzut în ce condiții

o funcție continuă are o inversă continuă. Rezultatul următor vine să puncteze condițiile în care o funcție derivabilă are inversă derivabilă. Mai precis are loc următorul rezultat:

Teoremă de derivare a funcției inverse. 1) Fie $f: I\to J, I, J$ intervale, f **continuă și bijectivă**. Dacă f **este derivabilă** în punctul $x = x_0$ și $f'(x_0)\neq 0$, atunci **funcția inversă** $f^{-1}: J\to I$ **este derivabilă în punctul** $f(x_0) = y_0$ și mai mult:

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Dacă $f'(x_0) = 0$, atunci $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \begin{cases} \infty, \text{dacă } f \text{ este crescătoare} \\ -\infty, \text{dacă } f \text{ este descrescătoare.} \end{cases}$

2) Dacă $f: I\to J, I, J$ intervale, f **continuă și bijectivă** este o funcție **derivabilă pe** I **și** $f'(x)\neq 0, \forall x\in I$, atunci $f^{-1}: J\to I$ **este derivabilă pe** J **și mai mult** $\left(f^{-1}\right)'(f) = \frac{1}{f'}$.

Demonstrație. 1) Din faptul că f este bijectivă are sens să vorbim de inversa ei f^{-1}. Cum $f'(x_0)\neq 0$, atunci $\frac{1}{f'(x_0)}\in\mathbb{R}$ (deci este un număr finit). Pentru a proba relația din concluzia teoremei va trebui examinată limita raportului $\frac{\left(f^{-1}\right)(y) - \left(f^{-1}\right)(y_0)}{y - y_0}$, (1) când $y\to y_0$ și $y\neq y_0$. Din $y\to y_0$ și continuitatea lui f^{-1} în y_0, se deduce $f^{-1}(y) = x\to x_0 = f^{-1}(y_0)$.

Scriem raportul (1) sub forma:

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}},$$

unde am folosit că $f^{-1}(f(x)) = x$, și apoi trecem la limită după $y\to y_0$, când se obține: $\lim\limits_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$, ceea ce arată că

$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = 1/f'(x_0)$.

2) Afirmația rezultă din definiția funcției derivabile pe o mulțime (J) și din **1)**. ■

Observații. **1)** Formula din teoremă admite o interpretare geometrică simplă. Coeficientul unghiular al tangentei la curba $y=f(x)$ în (x_0, y_0) este $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$ (Fig. 15); cât privește coeficientul unghiular al tangentei la curba $x=f^{-1}(y)$ în (y_0, x_0), el este egal cu $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\operatorname{tg}\beta$. Este evident că $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

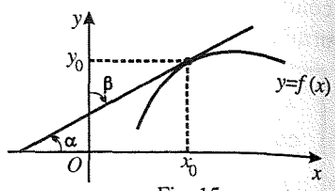


Fig. 15

Deci $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$, adică $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=1$ sau $f'(x_0)\left(f^{-1}\right)'(y_0)=1$.

2) Dacă în enunț în loc de $f'(x_0)\neq 0$ se ia $f'(x_0)=0$, atunci $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\infty$, dacă f este o funcție strict crescătoare (deoarece $x-x_0$ și $f(x)-f(x_0)$ au același semn și prin urmare $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$) și $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=-\infty$, dacă f este o funcție strict descrescătoare ($x-x_0$ și $f(x)-f(x_0)$ au semne contrare).

Așadar pentru $f'(x_0)=0$ funcția f^{-1} nu este derivabilă în y_0, dar **are derivată infinită** în y_0.

Exercițiu rezolvat

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+2x^2+4x+4$. Să se arate că:

a) f este bijectivă; b) $\left(f^{-1}\right)'(4)=\frac{1}{4}$ și că $\left(f^{-1}\right)'(y)>0, \forall y\in\mathbb{R}$.

R. **a) Pentru a arăta că f este injectivă probăm că f este strict monotonă. Fie deci $x_1<x_2$ și calculăm diferența $f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-x_1^3+2\left(x_2^2-x_1^2\right)+4(x_2-x_1)=(x_2-x_1)\left[x_2^2+x_2(x_1+2)+\right.$ $\left.+x_1^2+2x_1+4\right]>0$, deoarece $x_2-x_1>0$ și paranteza dreaptă conține o expresie pozitivă pentru că $\Delta_{x_2}=(x_1+2)^2-4\left(x_1^2+2x_1+4\right)=-3x_1^2-4x_1-12=-\left(3x_1^2+4x_1+12\right)<0, \forall x_1\in\mathbb{R}$. Deci din $x_1<x_2$ se obține $f(x_1)<f(x_2)$, ceea arată că f este strict crescătoare.**

Din $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ și f continuă se deduce că $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, adică este dovedită surjectivitatea lui f. Deci în final f este bijectivă.

b) Din $f(x_0)=y_0=4$ rezultă $x_0^3+2x_0^2+4x_0+4=4$ cu singura soluție reală $x_0=0$.

Acum conform teoremei de derivare a funcției inverse avem $\left(f'(x)=3x^2+4x+4\right)$: $\left(f^{-1}\right)'(4)=$ $=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{4}$ și în general $\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{3x^2+4x+4}>0$, deoarece $3x^2+4x+4>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Probleme propuse

1.Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+\ln x$. Să se arate că:

a) f este bijectivă; b) $\left(f^{-1}\right)'(1)=\frac{1}{2}$.

2.Fie $f:(0,\infty)\to(1,\infty), f(x)=x^4+x^2+x+1$.

Să se arate că funcția f este bijectivă și să se calculeze $\left(f^{-1}\right)'(4)$.

3.Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x+ex$. Să se arate că f este bijectivă și apoi să se calculeze $\left(f^{-1}\right)'(2e)$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f^{-1}(x)-\sqrt{x}}{x-f^{-1}(x)}$.

4.1) Fie $f:\mathbb{R}\to(1,\infty), f(x)=3^{-2x}+3^{-x}+1$. Să se arate că f este bijectivă și să se calculeze $\left(f^{-1}\right)'(3)$.

2) Fie $f:\mathbb{R}\to(1,\infty), f(x)=4^x+2^x+1$. Arătați că f este bijectivă și $\left(f^{-1}\right)'(x)>0, \forall x>1$. Calculați $f'(0)$ și $\left(f^{-1}\right)'(3)$.

5.Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2-2x, x\leq 0\\ -x^2-2x, x>0\end{cases}$.

Demonstrați că f este bijectivă și apoi calculați $\left(f^{-1}\right)'(3)$.

6.Fie $f:(0,\infty)\to(1,\infty), f(x)=e^x+x^2+x$. Arătați că f este bijectivă și apoi calculați $\left(f^{-1}\right)'(e+2)$.

7.Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}3-x, x\in\mathbb{Q}\\ \frac{2}{x}, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$. a) Arătați că f este inversabilă și calculați f^{-1}.

b) Studiați continuitatea și derivabilitatea funcțiilor f și f^{-1}.

Consecințe. Derivatele unor funcții elementare

1) Funcția exponențială. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\log_a x, a>0, a\neq 1$. Deci $y=\log_a x$, iar $x=a^y$.

Se știe că această funcție este continuă, bijectivă, derivabilă și $f'(x)=\frac{1}{x\ln a}\neq 0$, iar inversa este funcția $f^{-1}:\mathbb{R}\to(0,\infty), f^{-1}(y)=a^y$, adică funcția exponențială de bază a. Suntem în condițiile teoremei de mai sus și deci

$$\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'(x)}=x\ln a=a^y\ln a, \forall y\in\mathbb{R}.$$

Aşadar avem următoarea:

Teoremă. Funcția exponențială de bază a, $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, $f(x)=a^x$, $a>0, a\neq 1$ **este derivabilă pe** $\mathbb{R}$ şi $\left(a^x\right)'=a^x\ln a, \forall x\in\mathbb{R}$.

Dacă $a=e$ atunci $\left(e^x\right)'=e^x, \forall x\in\mathbb{R}$.

Dacă u este o funcție derivabilă, atunci $\left(a^u\right)'=a^u\cdot u'\cdot\ln a$ şi $\left(e^u\right)'=e^u\cdot u'$.

Exemple. 1) $f(x)=e^{x^2}$. Atunci $f'(x)=e^{x^2}\cdot\left(x^2\right)'=2xe^{x^2}$.

2) $f(x)=2^{\sin x}$. Atunci $f'(x)=2^{\sin x}\cdot(\sin x)'\cdot\ln 2=(\cos x)\cdot 2^{\sin x}\ln 2$.

3) $f(x)=5^{\ln x}, x>0$. Avem $f'(x)=5^{\ln x}\cdot(\ln x)'\cdot\ln 5=\frac{1}{x}\cdot 5^{\ln x}\cdot\ln 5$.

4) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}, x\neq 0$. Atunci $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.

5) $f(x)=3^{\frac{x}{x+1}}, x\neq -1$.

Avem $f'(x)=3^{\frac{x}{x+1}}\cdot\left(\frac{x}{x+1}\right)'\ln 3=\frac{1}{(x+1)^2}\cdot 3^{\frac{x}{x+1}}\ln 3$.

2) Funcția arcsinus. Fie $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1], f(x)=\sin x$, care se ştie că este continuă, bijectivă şi $f'(x)=\cos x\neq 0$ pentru $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Prin urmare se poate aplica teorema de derivare a funcției inverse $f^{-1}:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], f^{-1}(y)=\arcsin y$. Fie $y_0\in(-1,1)$, arbitrar.

Avem $(\arcsin)'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{\cos x_0}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x_0}}=\frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}$.

Dacă $y_0=-1$, atunci $x_0=-\frac{\pi}{2}$ şi $f'(x_0)=0$. Cum f este strict crescătoare se deduce $(\arcsin)'(-1)=\infty$.

Analog dacă $y_0=1$, atunci $x_0=\frac{\pi}{2}$ şi $f'(x_0)=0$ când $(\arcsin)'(1)=\infty$.

Aşadar avem următoarea:

Teoremă. Funcția arcsinus, $f(x)=\arcsin x$ **este derivabilă pe** $(-1,1)$ şi $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x\in(-1,1)$.

În plus, $(\arcsin)'(-1)=(\arcsin)'(1)=\infty$.

Dacă u este o funcție derivabilă cu $|u(x)|<1$, atunci $(\arcsin u)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

Exemple. 1) $f(x)=\arcsin\left(x^2-x\right)$ **pentru care se impune** $-1<x^2-x<1$, **când** $f'(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{1-\left(x^2-x\right)^2}}$. **Pentru** $x=0$ **se obține** $f'(0)=-1$, **iar dacă** $x=\frac{1}{2}$, **atunci** $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

2) $f(x)=\arcsin e^x$, **pentru care impunem** $e^x<1$, **adică** $x<0$.

Avem $f'(x)=\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. **Dacă** $x=-1$, **atunci** $f'(-1)=\frac{1}{\sqrt{e^2-1}}$.

Ce se întâmplă dacă $x=0$? **Atunci** $f_s'(0)=\frac{1}{0_+}=\infty$ **ceea ce arată că** f **are derivată la stânga în** $x=0$, **dar este infinită. Prin urmare** f **nu este derivabilă la stânga în** $x=0$.

3) $f(x)=\arcsin\frac{1}{x}$. **Se cere pentru derivabilitate** $\left|\frac{1}{x}\right|<1$, **adică** $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. **Avem:**

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}=-\frac{1}{x^2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}}=\begin{cases}-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, x>1\\ \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, x<-1\end{cases}$$

. **Am utilizat** $\sqrt{x^2}=|x|$.

Pentru $x=2, f'(2)=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$ **(după prima formă din** $f', 2>1$**), iar dacă** $x=-2$, **atunci** $f'(-2)=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$ **(după a doua formă din** $f', -2<-1$**).**

3) Funcția arccosinus. Se consideră $f:[0,\pi]\to[-1,1], f(x)=\cos x$.

Se ştie că f este bijectivă, continuă şi $f'(x)=-\sin x\neq 0$ dacă $x\in(0,\pi)$.

Funcției inverse $f^{-1}:[-1,1]\to[0,\pi], f^{-1}(y)=\arccos y$ i se poate aplica teorema de derivare a funcției inverse. Lăsăm în seama cititorului acest exercițiu. Se cunoaşte de la trigonometrie formula $\arcsin y+\arccos y=\frac{\pi}{2}, \forall y\in[-1,1]$.

Dacă $y\in(-1,1)$, atunci din această formulă prin derivare se obține:

$(\arccos y)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin y\right)' = -(\arcsin y)' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Dacă $y=-1$, atunci $(\arccos)'(-1) = -\infty$, iar pentru $y=1$, avem $(\arccos)'(1) = -\infty$, deoarece funcția arccos este strict descrescătoare. Deci avem următoarea:

Teoremă. Funcția arccosinus, $f(x) = \arccos x$ **este derivabilă pe** $(-1,1)$ și $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\forall x \in (-1,1)$.

În plus, $(\arccos)'(-1) = (\arccos)'(1) = -\infty$.

Dacă u este o funcție derivabilă cu $|u|<1$, atunci $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

Exemple. 1) $f(x) = \arccos(x^2+2x)$. **Pentru derivabilitatea funcției se pune condiția** $|x^2+2x|<1$.

Atunci $f'(x) = -\frac{2(x+1)}{\sqrt{1-(x^2+2x)^2}} = -\frac{2(x+1)}{\sqrt{(1-x^2-2x)(1+x^2+2x)}} = -\frac{2(x+1)}{|x+1|\sqrt{1-x^2-2x}}$.

Pentru $x=0$ **avem** $f'(0) = -2$, **iar dacă** $x=\frac{1}{3}$, **atunci** $f'\left(\frac{1}{3}\right) = -3\sqrt{2}$.

2) $f(x) = \arccos(\sin x)$, $x \in \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = \pm 1\}$. **Atunci**

$f'(x) = -\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = -\frac{\cos x}{|\cos x|} = \begin{cases} -1, \cos x > 0 \\ 1, \cos x < 0 \end{cases}$.

Pentru $x = \frac{\pi}{6}$, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -1$, **deoarece** $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$, **iar dacă** $x = \frac{2\pi}{3}$, **atunci** $f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1$, **deoarece** $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} < 0$.

4) Funcția arctangentă. Fie $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, care este continuă, bijectivă și $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Funcției inverse $f^{-1}: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$ i se poate aplica teorema de derivare a funcției inverse. Fie $y_0 \in \mathbb{R}$, arbitrar. Atunci

$(\operatorname{arctg})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \cos^2 x_0 = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x_0} = \frac{1}{1+y_0^2}$ $(x_0 = \operatorname{arctg} y_0)$. Deci

avem următoarea:

Teoremă. Funcția arctangentă, $f(x) = \operatorname{arctg} x$ **este derivabilă pe** $\mathbb{R}$ și $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Dacă u este o funcție derivabilă, atunci $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$.

Exemple. 1) $f(x) = \operatorname{arctg} x^2$. **Avem:** $f'(x) = \frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2} = \frac{2x}{1+x^4}$.

Dacă $x=0$. **atunci** $f'(0) = 0$, **iar pentru** $x=-1$, $f'(-1) = -1$.

2) $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}$, $x \neq -1$. **Avem:** $f'(x) = \frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)'}{1+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2} = \frac{1}{2x^2+2x+1}$.

Pentru $x=0$, $f'(0)=1$, **iar pentru** $x=1$, $f'(1) = \frac{1}{5}$.

Problemă propusă. **Să se determine** $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ **astfel încât funcția**

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} a_1(x-2)^2 + b_1, x > 1 \\ x^2 \operatorname{arctg} x, |x| \leq 1 \\ a_2(x+2)^2 + b_2, x < -1 \end{cases}$ **să fie derivabilă.**

5) Funcția arccotangentă. Fie $f: (0,\pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$, o funcție continuă, bijectivă și $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} \neq 0, \forall x \in (0,\pi)$. Funcția inversă este $f^{-1}: \mathbb{R} \to (0,\pi)$, $f^{-1}(y) = \operatorname{arcctg} y$ și i se poate aplica teorema de derivare a funcției inverse. Vom utiliza însă relația $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$, care prin derivare dă $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$. Așadar avem următoarea:

Teoremă. Funcția arccotangentă, $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ **este derivabilă pe** $\mathbb{R}$ și în plus, $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Dacă u este o funcție derivabilă, atunci $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$.

Exemple. 1) $f(x)=\operatorname{arcctg}(x^2-3x)$. Avem: $f'(x)=-\dfrac{(x^2-3x)'}{1+(x^2-3x)^2}=-\dfrac{2x-3}{1+(x^2-3x)^2}$.

Pentru $x=0$ se obține $f'(0)=3$, iar dacă $x=1$, avem $f'(1)=\dfrac{1}{5}$.

2) $f(x)=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}, x\neq 0$. Atunci $f'(x)=-\dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\dfrac{1}{1+x^2}$.

Pentru $x=1, f'(1)=\dfrac{1}{2}$, iar dacă $x=-1$, atunci $f'(-1)=\dfrac{1}{2}$.

5. Derivata logaritmică

Pentru determinarea derivatei unei funcții este mai ușor să luăm, la început, logaritmul (natural) al acelei funcții și apoi să calculăm derivata.

Derivata logaritmică a funcției $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ **este derivata logaritmului acestei funcții**, adică $\left(\ln f(x)\right)'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Exemplu. **Ne propunem în continuare să găsim o formulă care să dea derivata funcției** $f:I\to\mathbb{R}$, I **interval,** $f(x)=(u(x))^{v(x)}, u,v:I\to\mathbb{R}$ **cu** $u(x)>0, \forall x\in I, u, v$ **derivabile.**

Vom considera derivata logaritmică a funcției f. **Prin logaritmare (în bază e) avem:**

$\ln f(x)=v(x)\cdot\ln u(x)$. De aici prin derivare se deduce: $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=v'(x)\ln u(x)+v(x)\cdot\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sau

$$f'(x)=f(x)\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right]=(u(x))^{v(x)}\cdot v'(x)\cdot\ln u(x)+v(x)\cdot(u(x))^{v(x)-1}\cdot u'(x).$$

Renunțând la argumentul x, **are loc formula**

$$\left(u^v\right)'=u^v\cdot v'\cdot\ln u+v\cdot u^{v-1}u'.$$

Funcția u^v **se derivează** considerând întâi u constant și derivând ca o funcție exponențială, apoi considerând v constant și derivând ca o putere, și se adună cele două derivate.

Observație. Formula de mai sus se poate deduce observând că $u^v=e^{v\ln u}$ și apoi se derivează obținând:

$$\left(u^v\right)'=e^{v\ln u}\cdot(v\ln u)'=u^v\cdot\left(v'\cdot\ln u+v\cdot\frac{u'}{u}\right)=u^v\cdot v'\cdot\ln u+v\cdot u^{v-1}\cdot u'.$$

Exemplu. $f(x)=x^{x+1}, x>0$. Avem: $f'(x)=\left(x^{x+1}\right)'=x^{x+1}(x+1)'\ln x+(x+1)x^x\cdot x'=$

$=x^{x+1}\cdot\ln x+(x+1)x^x=x^x(x\ln x+x+1)$.

Dacă $x=1$, atunci $f'(1)=2$, iar dacă $x=e$, avem $f'(e)=e^e(2e+1)$.

Exerciții propuse

Să se calculeze derivatele următoarelor funcții, precizând D_f și $D_{f'}$:

I. 1) $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$; 2) $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$; 3) $f(x)=\arcsin\dfrac{x^2-1}{x^2}$;

4) $f(x)=\arcsin\sqrt{1-4x}$; 5) $f(x)=\arcsin 2x\sqrt{1-x^2}$; 6) $f(x)=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

II. 1) $f(x)=\arccos\sqrt{x}$; 2) $f(x)=\arccos e^x$; 3) $f(x)=\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$; 4) $f(x)=\arccos\dfrac{1}{x-1}$;

5) $f(x)=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$; 6) $f(x)=\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$.

III. 1) $f(x)=\operatorname{arctg}(\ln x)$; 2) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$; 3) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$; 4) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

IV. 1) $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$; 2) $f(x)=x^{\sqrt{x}}$; 3) $f(x)=(\sin x)^x$; 4) $f(x)=x^{\sin x}$; 5) $f(x)=(\cos x)^{\sin x}$;

6) $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

După parcurgerea derivatelor funcțiilor elementare și a unor funcții compuse se impune sistematizarea lor sub forma tabelului următor.

Tabel cu derivatele funcțiilor elementare

Funcția	Derivata	Domeniul de derivabilitate	Funcția compusă	Derivata
c (constantă)	0	$\mathbb{R}$		
x	1	$\mathbb{R}$	u	u'
$x^n\,(n\in\mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	$u^n\,(n\in\mathbb{N}^*)$	$n\cdot u^{n-1}\cdot u'$
$x^\alpha\,(\alpha\in\mathbb{R})$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$D_{f'}\supseteq(0,\infty)$	$u^\alpha\,(\alpha\in\mathbb{R},\ u>0)$	$\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{u}\,(u\neq 0)$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0,\infty)$	$\sqrt{u}\,(u>0)$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	e^u	$e^u\cdot u'$
$a^x, 0<a\neq 1$	$a^x\ln a$	$\mathbb{R}$	$a^u\,(0<a\neq 1)$	$a^u\ln a\cdot u'$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(0,\infty)$	$\ln u\,(u>0)$	$\frac{u'}{u}$
$\log_a x, 0<a\neq 1$	$\frac{1}{x\ln a}$	$(0,\infty)$	$\log_a u\,(u>0)$	$\frac{u'}{u\ln a}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin u$	$\cos u\cdot u'$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos u$	$-\sin u\cdot u'$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\cos x\neq 0$	$\operatorname{tg} u\,(\cos u\neq 0)$	$\frac{u'}{\cos^2 u}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\sin x\neq 0$	$\operatorname{ctg} u\,(\sin u\neq 0)$	$-\frac{u'}{\sin^2 u}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$	$\arcsin u\,(\lvert u\rvert\le 1)$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$	$\arccos u\,(\lvert u\rvert\le 1)$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{arctg} u$	$\frac{u'}{1+u^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{arcctg} u$	$-\frac{u'}{1+u^2}$
$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ (sinus hiperbolic)	$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{sh} u$	$\operatorname{ch} u\cdot u'$
$\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ (cosinus hiperbolic)	$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{ch} u$	$\operatorname{sh} u\cdot u'$

5.7. DERIVATE DE ORDIN SUPERIOR

Fie $E\subseteq\mathbb{R}$, interval sau reuniune de intervale din $\mathbb{R}$ şi fie $f:E\to\mathbb{R}$ o funcţie.

Definiţie. Funcţia f se numeşte **derivabilă de ordinul 1** dacă este derivabilă.

Funcţia $f':E\to\mathbb{R}$ se numeşte **derivata de ordinul 1** a lui f.

Dacă f este derivabilă, atunci $\forall x\in E, f'(x)\in\mathbb{R}$ şi deci se poate defini o funcţie $g:E\to\mathbb{R}, g(x)=f'(x)$ pe care am denumit-o derivata lui f.

Definiţie. Funcţia f **este de două ori derivabilă în** $x_0\in E$, daca:

- f este derivabilă într-o vecinătate a lui x_0;
- f' este derivabilă în x_0.

În acest caz derivata lui f' în x_0 se numeşte **derivata a doua** (sau de **ordinul doi**) a lui f în punctul x_0 şi se notează $f''(x_0)$. Aşadar

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}.$$

Definiţie. Funcţia f este de două ori derivabilă dacă f' este derivabilă.
Funcţia $(f')':E\to\mathbb{R}$ se numeşte **derivata de ordinul doi a lui** f.

În loc de $(f')'$ se scrie f'' sau $f^{(2)}$.

Presupunem că printr-un proçedeu oarecare am definit ce înseamnă „f este derivabilă de ordinul n" şi „$f^{(n)}$ este derivata de ordinul n a lui f", unde $n\in\mathbb{N}$.

Prin convenţie derivata de ordinul zero $f^{(0)}=f$.

Definiţie. Fie $n\in\mathbb{N}$. Funcţia f se numeşte **derivabilă de ordinul** $n+1$ dacă este derivabilă de ordinul n şi dacă derivata sa de ordinul n, $f^{(n)}$ este derivabilă.

În acest caz $\left(f^{(n)}\right)'$ se notează $f^{(n+1)}$ şi se numeşte derivata de ordin $n+1$ a lui f.

Conform principiului inducţiei complete sunt definite conceptele: „f este derivabilă de ordinul n" şi „$f^{(n)}$ este derivata de ordin n a lui f",pentru orice n.

Definiție. Funcția f se numește **derivabilă de ordinul** ∞ sau încă funcție **infinit derivabilă** dacă este derivabilă de orice ordin $n, n\in\mathbb{N}$.

Teoremă. Orice funcție elementară este infinit derivabilă.

Exerciții rezolvate

1. Să se arate că funcțiile $f(x)=e^{2x}, g(x)=e^{3x}, x\in\mathbb{R}$ verifică egalitatea:

$f''(x)-5f'(x)+6f(x)=0, x\in\mathbb{R}$.

R. Pentru funcția f avem $f'(x)=2e^{2x}, f''(x)=4e^{2x}, x\in\mathbb{R}$. Relația de demonstrat devine:

$4e^{2x}-10e^{2x}+6e^{2x}=0$, adevărată $\forall x\in\mathbb{R}$. Deci pentru f se verifică relația. Analog se procedează cu g.

Observație. O astfel de ecuație ca aceea din enunț se numește ecuație diferențială de ordinul doi omogenă. Faptul că funcțiile f, g verifică ecuația, înseamnă că aceste două funcții sunt soluții ale ecuației. Ca și în cazul șirurilor recurente de ordinul doi și aici se caută soluții de forma $f(x)=e^{rx}$, obținându-se ecuația în r: $r^2-5r+6=0$, numită ecuația caracteristică a ecuației diferențiale de ordinul doi omogenă. Dacă r_1, r_2 sunt rădăcinile acestei ecuații atunci soluția generală a ecuației diferențiale se poate pune sub una din formele:

1) $f(x)=\alpha e^{r_1x}+\beta e^{r_2x}$, dacă $r_1\neq r_2$;

2) $f(x)=e^{r_1x}(\alpha+\beta x)$, dacă $r_1=r_2$;

3) $f(x)=e^{ax}(\alpha\cos bx+\beta\sin bx)$, dacă $r_1=a+ib, r_2=a-ib, b\neq 0$.

2. Să se rezolve ecuația $f''(x)=0$, unde $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}, x\in\mathbb{R}$.

R. Avem $f'(x)=\dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}, f''(x)=\dfrac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$. Deci $f''(x)=0$ implică $x_1=-\sqrt{3}, x_2=0, x_3=\sqrt{3}$.

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=\begin{cases}\sin^2 x, x\le 0\\ x^2, x>0\end{cases}$. Să se arate că f este de două ori derivabilă în $x_0=0$ și să se calculeze $f''(0)$.

R. Să observăm că f este continuă în $x_0=0$. Studiem dacă f este derivabilă în $x_0=0$. Avem:

$$f_s'(0)=\lim_{x\nearrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\nearrow 0}\frac{\sin^2 x}{x}=\lim_{x\nearrow 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x=1\cdot 0=0,$$

$$f_d'(0)=\lim_{x\searrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\searrow 0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\searrow 0}x=0.$$

Cum $f_s'(0)=f_d'(0)=0\in\mathbb{R}$ rezultă că f este derivabilă în $x_0=0$ și $f'(0)=0$.

Studiem dacă f este de două ori derivabilă în $x_0=0$. Pentru aceasta calculăm f', care este egală cu $f'(x)=\begin{cases}2\sin x\cos x, x<0\\ 0, x=0\\ 2x, x>0\end{cases}$.

Avem: $f_s''(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{2\sin x\cos x}{x}=2$, $f_d''(0)=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{2x}{x}=2$.

Din $f_s''(0)=f_d''(0)=2\in\mathbb{R}$ rezultă că f este de două ori derivabilă în $x_0=0$ și $f''(0)=2$.

4. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2+3x+m, x\le 2\\ -2x^2+nx+p, x>2\end{cases}$.

Să se determine m, n, p numere reale astfel încât f să fie de două ori derivabilă în $x=2$.

R. În general pentru a determina cei trei parametri avem nevoie de trei ecuații.

Iată cele trei condiții care conduc la obținerea ecuațiilor.

1) Funcția f este continuă în $x=2$ (fiind derivabilă în acest punct).

Condiția se scrie

$$\lim_{x\nearrow 2}f(x)=\lim_{x\searrow 2}f(x)=f(2)\Leftrightarrow\lim_{x\nearrow 2}\left(x^2+3x+m\right)=\lim_{x\searrow 2}\left(-2x^2+nx+p\right)=10+m\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10+m=-8+2n+p,\ (1).$$

2) Funcția f este derivabilă în $x=2\Leftrightarrow f_s'(2)=f_d'(2)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\nearrow 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=$

$$=\lim_{x\searrow 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\lim_{x\nearrow 2}\frac{x^2+3x+m-(10+m)}{x-2}=\lim_{x\searrow 2}\frac{-2x^2+nx+p-(10+m)}{x-2}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$$

$\lim\limits_{x\nearrow 2}(x+5)=\lim\limits_{x\searrow 2}(-2x-4+n)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 7=n-8$. De aici $n=15$.

3) Funcția f este de două ori derivabilă în $x=2\Leftrightarrow f_s''(2)=f_d''(2)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\nearrow 2}\dfrac{f'(x)-f'(2)}{x-2}=$

$$=\lim_{x\searrow 2}\frac{f'(x)-f'(2)}{x-2}\in\mathbb{R}\ \text{unde}\ f'(x)=\begin{cases}2x+3, x<2\\ 7, x=2\\ -4x+n, x>2\end{cases}.$$

Deci $\lim\limits_{x\nearrow 2}\dfrac{2x+3-7}{x-2}=\lim\limits_{x\searrow 2}\dfrac{-4x+n-7}{x-2}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 2=\lim\limits_{x\searrow 2}\dfrac{-4x+n-7}{x-2}$, egalitate imposibilă, deoarece limita din dreapta este: $+\infty$ dacă $n>15$, $-\infty$ dacă $n<15$ și -4 dacă $n=15$.

Prin urmare nu există $m, n, p\in\mathbb{R}$, pentru care f să fie de două ori derivabilă în $x=2$.

5. Să se arate că pentru $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ au loc egalitățile:

1) $(fg)''=f''g+2f'g'+fg''$ dacă f și g sunt de două ori derivabile;

2) $(fg)'''=f'''g+3f''g'+3f'g''+fg'''$ dacă f, g sunt de trei ori derivabile și în general:

3) $(fg)^{(n)}=f^{(n)}g+C_n^1f^{(n-1)}g'+C_n^2f^{(n-2)}g''+\ldots+C_n^{n-1}f'g^{(n-1)}+f\cdot g^{(n)}$, cunoscută sub denumirea de formula lui Leibniz.

Aplicații. Să se calculeze: a) $\left(x^2\sin x\right)^{(20)}$; b) $\left(x^2e^{3x}\right)^{(10)}$.

R. 1) Avem succesiv:

$(fg)'=f'\cdot g+f\cdot g'$ și

$$(f\cdot g)''=(f'\cdot g+f\cdot g')'=(f'\cdot g)'+(f\cdot g')'=f''\cdot g+f'\cdot g'+f'\cdot g'+f\cdot g''=$$

$$=f''\cdot g+2f'\cdot g'+f\cdot g''=C_2^0f''\cdot g+C_2^1f'\cdot g'+C_2^2f\cdot g''.$$

Analog

$$(f\cdot g)'''=(f''\cdot g)'+(2f'\cdot g')'+(f\cdot g'')'=f'''\cdot g+f''\cdot g'+2f''\cdot g'+2f'\cdot g''+f'\cdot g''+$$

$$+f\cdot g'''=f'''\cdot g+3f''\cdot g'+3f'\cdot g''+f\cdot g'''=C_3^0f'''\cdot g+C_3^1f''\cdot g'+C_3^2f'\cdot g''+C_3^3f\cdot g'''.$$

3) Se demonstrează prin inducție matematică.

a) Conform formulei lui Leibniz avem:

$\left(x^2\sin x\right)^{(20)}=C_{20}^0\left(\sin x\right)^{(20)}\cdot\left(x^2\right)+C_{20}^1\left(\sin x\right)^{(19)}\left(x^2\right)'+C_{20}^2\left(\sin x\right)^{(18)}\left(x^2\right)''+$

$+C_{20}^3\left(\sin x\right)^{(17)}\left(x^2\right)'''+...$

Dar $\left(x^2\right)'=2x,\left(x^2\right)''=2,\left(x^2\right)^{(n)}=0,\forall n\geq 3$.

Aşadar $\left(x^2\sin x\right)^{(20)}=x^2\sin x-20\left(2x\right)\cos x-380\sin x$.

b) Asemănător se găseşte $\left(x^2e^{3x}\right)^{(10)}=3^9e^{3x}\left(3x^2+20x+30\right)$.

6. Să se determine funcţiile polinomiale $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care $P\left(2x\right)=P'\left(x\right)P''\left(x\right),\forall x\in\mathbb{R}$.

R. Să observăm că $P\left(x\right)=0,\forall x\in\mathbb{R}$ (funcţia polinomială identic nulă) este o soluţie a problemei.

Căutăm soluţii nebanale. Presupunem că P este funcţia polinomială de gradul n.

Trecând la funcţia grad în relaţia din problemă rezultă $n=\left(n-1\right)+\left(n-2\right)$, deoarece $\text{grad}\left(P'\right)=n-1$, $\text{grad}\left(P''\right)=n-2$ şi $\text{grad}\left(P'\cdot P''\right)=\text{grad}\left(P'\right)+\text{grad}\left(P''\right)$.

De aici $n=3$. Fie deci $P\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d,a\neq 0,a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

Se transcrie egalitatea din enunţ sub forma

$8ax^3+4bx^2+2cx+d=18a^2x^3+18abx^2+\left(6ac+4b^2\right)x+2bc$, iar de aici prin identificare rezultă

sistemul: $\begin{cases}8a=18a^2\\4b=18ab\\2c=6ac+4b^2\\d=2bc\end{cases}$ cu soluţia $a=\frac{4}{9},b=c=d=0$. Aşadar $P\left(x\right)=\frac{4}{9}x^3$.

7. Să se calculeze derivata de ordinul n pentru funcţiile:

a) $f\left(x\right)=\frac{1}{x-1},x\neq 1$; b) $f\left(x\right)=\frac{1}{x^2-3x+2},x\neq 1,x\neq 2$.

R. a) Să observăm că f este indefinit derivabilă pe mulţimea $\mathbb{R}-\{1\}$.

Să calculăm derivatele succesive ale lui f şi să observăm de fiecare dată care sunt modificările pe care le suferă acestea. Avem:

$f'\left(x\right)=-\frac{1}{\left(x-1\right)^2}$ (la derivata întâi (impar) avem semnul $(-)$ în faţa liniei de fracţie, la numărător 1, iar numitorul este la pătrat);

$f''\left(x\right)=\frac{2}{\left(x-1\right)^3}$ (la derivata a doua (par) avem semnul $(+)$ în faţa expresiei, la numărător 2 (cât este ordinul derivatei), iar numitorul apare la puterea $2+1$, cu 1 mai mult decât ordinul derivatei);

$f'''\left(x\right)=-\frac{2\cdot 3}{\left(x-1\right)^4}$ (la derivata a treia (impar) avem semnul $(-)$ în faţa expresiei, la numărător figurează produsul $1\cdot 2\cdot 3=3!$ iar numitorul este la puterea $3+1$);

$f^{(4)}\left(x\right)=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{\left(x-1\right)^5}$, cu aceleaşi observaţii ca mai sus.

Acum putem formula că $f^{(n)}\left(x\right)=\left(-1\right)^n\frac{n!}{\left(x-1\right)^{n+1}},\forall n\geq 1$.

Pentru demonstraţie utilizăm metoda inducţiei matematice.

Verificarea. Pentru $n=1$, $f'\left(x\right)=-\frac{1}{\left(x-1\right)^2}$, este adevărată.

Demonstraţia. Presupunem formula adevărată pentru n şi să o demonstrăm pentru $\left(n+1\right)$, adică să arătăm că avem:

$f^{(n+1)}\left(x\right)=\left(-1\right)^{n+1}\frac{\left(n+1\right)!}{\left(x-1\right)^{n+2}}$. Ori $f^{(n+1)}\left(x\right)=\left(f^{(n)}\right)'\left(x\right)=-\left(-1\right)^n\frac{n!\left(n+1\right)\left(x-1\right)^n}{\left(x-1\right)^{2n+2}}=$

$=\left(-1\right)^{n+1}\frac{\left(n+1\right)!}{\left(x-1\right)^{n+2}}$.

Deci formula care dă $f^{(n)}$ este adevărată $\forall n\geq 1$.

Evident formula este adevărată şi pentru $n=0$ când $f^{(0)}\left(x\right)=f\left(x\right)$.

b) Orice tentativă de a proceda ca la a) nu duce la nici un rezultat deoarece expresiile derivatelor succesive nu sugerează o anume expresie pentru $f^{(n)}$. Într-adevăr:

$f'\left(x\right)=-\frac{2x-3}{\left(x^2-3x+2\right)^2}$, $f''\left(x\right)=\frac{2\left(3x^2-9x+7\right)}{\left(x^2-3x+2\right)^3}$, $f'''\left(x\right)=-\frac{2\left(2x-3\right)\left(7x^2-21x+17\right)}{\left(x^2-3x+2\right)^4}$, expresii care spun că: numitorul figurează în fiecare derivată calculată la puterea cu 1 mai mult decât ordinul derivatei, numărătorul este polinom de acelaşi grad cu ordinul derivatei, dar ai cărui coeficienţi nu sunt uşor de găsit.

Dacă însă descompunem numitorul sub forma $x^2-3x+2=\left(x-1\right)\left(x-2\right)$, iar funcţia o scriem ca sumă de două fracţii de numitori $x-1$ şi $x-2$ $f\left(x\right)=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2},(*)$ unde A,B sunt constante, atunci lucrurile devin foarte simple căci $f^{(n)}\left(x\right)=\left(\frac{A}{x-1}\right)^{(n)}+\left(\frac{B}{x-2}\right)^{(n)}$.

Pentru determinarea constantelor A,B se aduce la acelaşi numitor în membrul drept al egalităţii $(*)$ şi avem: $\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{x\left(A+B\right)-2A-B}{x^2-3x+2},\forall x\neq 2,x\neq 3$.

De aici $1=x\left(A+B\right)-2A-B$, $\forall x\neq 2,x\neq 3$. Se obţine sistemul $\begin{cases}A+B=0\\2A+B=-1\end{cases}$ cu soluţia $A=-1,B=1$.

Metoda de determinare a coeficienţilor A,B se numeşte **metoda coeficienţilor nedeterminaţi**.

Deci $f\left(x\right)=-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}$ şi ţinând seama de a), $f^{(n)}\left(x\right)=\left(-1\right)^n n!\left[-\frac{1}{\left(x-1\right)^{n+1}}+\frac{1}{\left(x-2\right)^{n+1}}\right]$.

Observaţie. Dacă în $(*)$ înmulţim cu $x-1$ şi se trece apoi la limită pentru $x\to 1$ rezultă A; înmulţim $(*)$ cu $x-2$ şi trecem la limită pentru $x\to 2$ şi rezultă B.

8. Fie $f:\mathbb{R}-\{-1,-2\}\to\mathbb{R},f\left(x\right)=\frac{1}{x^2+3x+2}$. Să se calculeze limita şirului $\left(a_n\right)$ cu termenul general $a_n=\sum_{i=1}^{n}f^{(k)}\left(i\right)$.

R. Mai întâi să observăm că $f\left(x\right)=\frac{1}{\left(x+1\right)\left(x+2\right)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$ şi deci

$f^{(k)}(x)=(-1)^k k!\left[\frac{1}{(x+1)^{k+1}}-\frac{1}{(x+2)^{k+1}}\right]$, iar $a_n=(-1)^k k!\left[\left(\frac{1}{2^{k+1}}-\frac{1}{3^{k+1}}\right)+\left(\frac{1}{3^{k+1}}-\frac{1}{4^{k+1}}\right)+...+\right.$

$\left.+\left(\frac{1}{(n+1)^{k+1}}-\frac{1}{(n+2)^{k+1}}\right)\right]=(-1)^k k!\left(\frac{1}{2^{k+1}}-\frac{1}{(n+2)^{k+1}}\right)$.

Aşadar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=(-1)^k\frac{k!}{2^{k+1}}$.

9 .Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left(2x^2-3x\right)e^x$. Să se arate că:

1) $f^{(n)}(x)=\left(2x^2+a_nx+b_n\right)e^x, \forall n\geq 1, a_{n+1}=a_n+4, b_{n+1}=b_n+a_n, \forall n\geq 1$;

2) $a_n=4n-3, b_n=2n^2-5n, \forall n\geq 1$.

R . 1) Vom arăta că $f^{(n)}(x)$ are forma indicată procedând prin inducţie matematică.

Verificarea . Pentru $n=1$, avem $f'(x)=\left(2x^2+x-3\right)e^x$ cu $a_1=1, b_1=-3$.

Demonstraţia . Presupunem că $f^{(n)}(x)=\left(2x^2+a_nx+b_n\right)e^x$ şi să arătăm că

$f^{(n+1)}(x)=\left(2x^2+a_{n+1}x+b_{n+1}\right)e^x$. Într-adevăr

$f^{(n+1)}(x)=\left(f^{(n)}\right)'(x)=\left[2x^2+\left(a_n+4\right)x+a_n+b_n\right]e^x$.

Identificând găsim $a_{n+1}=a_n+4, b_{n+1}=a_n+b_n, \forall n\geq 1$. Conform inducţiei matematice rezultă că $f^{(n)}$ are forma respectivă $\forall n\geq 1$

Observaţie . Mai simplu prin aplicarea formulei lui Leibniz.

2) Din $a_{n+1}=a_n+4$ se deduce că şirul (a_n) este o progresie aritmetică cu primul termen $a_1=1$ şi raţie $r=4$. Deci $a_n=a_1+(n-1)r=1+(n-1)4=4n-3$.

Din $b_{n+1}-b_n=4n-3$ scrisă pentru $n, n-1, ..., 1$ avem:

$b_n-b_{n-1}=4(n-1)-3$

$b_{n-1}-b_{n-2}=4(n-2)-3$

.....

$b_2-b_1=4\cdot 1-3$.

Adunând aceste relaţii, membru cu membru, rezultă:

$b_n=b_1+4(1+2+...+n-1)-3(n-1)=-3+4\cdot\frac{n(n-1)}{2}-3n+3=2n^2-5n$.

10 .a) Cu ajutorul egalităţii $1+x+x^2+...+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}, x\neq 1$ şi derivării să se calculeze suma

$1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}$.

b) Să se stabilească egalitatea $\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k=n2^{n-1}$.

R . a) Membrul stâng al egalităţii date reprezintă suma unor termeni în progresie geometrică de raţie $x\neq 1$. Derivând acea egalitate, rezultă

$1+2x+...+nx^{n-1}=\left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)'$ sau $1+2x+...+nx^{n-1}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}, x\neq 1$.

b) Se consideră dezvoltarea $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^kx^k+...+C_n^nx^n, n\in\mathbb{N}^*$ care derivată în raport cu variabila x dă $n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2x+...+kC_n^kx^{k-1}+...+nC_n^nx^{n-1}$.

În această ultimă egalitate se face $x=1$ şi rezultă egalitatea propusă.

Observaţie. Dacă ultima egalitate s-ar fi derivat în raport cu x şi apoi se particulariza $x=1$, se obţinea o nouă egalitate.

Dacă dezvoltarea binomială $(1+x)^n$ s-ar fi înmulţit cu x şi apoi se deriva s-ar fi obţinut altă egalitate în care se particulariza x. Am oferit cititorului câteva sugestii pentru a genera egalităţi interesante utilizând derivarea.

11. Să se determine ordinul de multiplicitate al rădăcinii $x=2$ pentru ecuaţia $f(x)=0$ unde $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$.

R. Se calculează derivatele: $f'(x)=5x^4-20x^3+21x^2-4x+4, f''(x)=20x^3-60x^2+42x-4$, $f'''(x)=60x^2-120x+42, f^{(IV)}(x)=120x-120$ şi se constată că $f(2)=f'(2)=f''(2)=0$ şi $f'''(2)\neq 0$.

12. Să se determine parametrii reali a, b pentru ca ecuaţia $f(x)=x^3+ax^2+bx+18=0$, să aibă ca rădăcină dublă $x=3$.

R. Din $f(3)=f'(3)=0$ rezultă sistemul $3a+b=-15, 6a+b=-27$ cu soluţia $a=-4, b=-3$.

13 .Fie funcţia polinomială $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+5x^2-3x+1$. Să se determine $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ astfel încât: $f(x)=a+b(x-1)+c(x-1)^2+d(x-1)^3, x\in\mathbb{R}$.

R .În egalitate se face $x=1$ şi rezultă $a=4$. Se derivează egalitatea şi se obţine $f'(x)=3x^2+10x-3=b+2c(x-1)+3d(x-1)^2, x\in\mathbb{R}$, (1).

În (1) se face $x=1$ şi avem $b=10$. Se derivează (1) şi găsim:

$6x+10=2c+6d(x-1), x\in\mathbb{R}$, (2).

În (2) punem $x=1$ când $c=8$. În fine derivând (2) avem:

$6=6d$, iar de aici $d=1$.

Probleme propuse

1. Să se arate că funcţia:

1) $f(x)=\alpha e^{2x}+\beta e^{3x}, \alpha,\beta\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}$ verifică egalitatea $f''(x)-5f'(x)+6f(x)=0, x\in\mathbb{R}$;

2) $f(x)=xe^{2x}$ verifică egalitatea $f''(x)-4f'(x)+4f(x)=0, x\in\mathbb{R}$;

3) $f(x)=\alpha e^{2x}\cos 3x+\beta e^{2x}\sin 3x$ verifică egalitatea $f''(x)-4f'(x)+13f(x)=0, x\in\mathbb{R}$.

2. Să se rezolve ecuaţia $f''(x)=0$, în cazurile:

1) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}, x\geq 0$; 2) $f(x)=x\ln x, x>0$; 3) $f(x)=\left(x^2-3x\right)e^{2x}, x\in\mathbb{R}$;

4) $f(x)=\ln\left(x^2+x\right), x\in(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$; 5) $f(x)=\operatorname{arctg} x, x\in\mathbb{R}$.

3. Să se arate că următoarele funcţii sunt de două ori derivabile în punctul x_0 indicat în dreptul fiecărei funcţii:

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x-1|^3, x_0=1$; 2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg} x, x\geq 0\\ x^3+x, x<0\end{cases}, x_0=0$.

4.Să se determine parametrii a,b,c astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, să fie de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$.

1) $f(x)=\begin{cases}2\sin x+\cos x, x\geq 0\\ ax^2+bx+c, x<0\end{cases}$; 2) $f(x)=\begin{cases}x^2+ax-2, x<2\\ 4, x=2\\ bx^2-2x+c, x>2\end{cases}$; 3) $f(x)=\begin{cases}x^2+3x+a, x\leq 2\\ -2x^2+bx+c, x>2\end{cases}$.

5.Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2x^3+mx^2+8x+n, x<0\\ 3, x=0\\ x^2+px+q, x>0\end{cases}$.

Să se determine m,n,p,q numere reale astfel încât f să fie de două ori derivabilă în $x_0=0$.

6.Să se determine funcția polinomială de grad minim $P(x)$ pentru care funcția

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}P(x), |x|<1\\ \ln|x|, |x|\geq 1\end{cases}$ este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$;

2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}P(x), x<0\\ e^{-x}, x\geq 0\end{cases}$ este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$;

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{5x}{4+x^2}, |x|\geq 1\\ P(x), |x|<1\end{cases}$ este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$.

7.Să se arate că funcțiile următoare verifică (pe domeniile definiție respective) identitățile scrise în dreptul fiecăreia:

1) $f(x)=x^2+x(1-\ln x), x>0$; $x^2f'''(x)=1, x\in\mathbb{R}$;

2) $f(x)=e^{2x}(1+x)+x^2+2x, x\in\mathbb{R}$; $f''(x)-4f'(x)+4f(x)=4x^2-6, x\in\mathbb{R}$;

3) $f(x)=e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}, x>0$; $4xf''(x)+2f'(x)-f(x)=0, x>0$.

8.a) Să se calculeze derivatele de ordinul doi pentru funcțiile:

1) $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{1+x}$; 2) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\ln x$;

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=xe^{x^2}$; 4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=xe^{2x}$;

5) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x^2+1)\operatorname{arctg} x$; 6) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin^2 x$; 7) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x\sin x$;

b) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă pentru care

$x^3-2x^2f^2(x)+5x-f(x)-5=0, x\geq 1$. Să se determine $f''(1)$ dacă $f(1)<0$.

9. Să se calculeze derivatele de ordinul trei pentru funcțiile:

1) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\ln x$; 2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=xe^{-x}$; 3) $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$.

10.Să se calculeze derivatele de ordin superior (cu ajutorul formulei lui Leibniz):

a) $\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^{(6)}$; b) $\left(x^3\cos x\right)^{(15)}$; c) $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{(8)}$; d) $\left(\frac{x}{x^2-1}\right)^{(30)}$; e) $\left(xe^{5x}\right)^{(5)}$.

11.1) Să se determine funcția polinomială $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, P(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$ pentru care $P''(x)=3, P'(0)=P(0)$ și $P(2)=1$.

2) Să se determine funcția polinomială $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, P(x)=ax^3$ cu proprietatea $P(2x)=P'(x)P''(x)$.

3) Să se determine funcția polinomială $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea: $P(x^2)=P'(x^2)P''(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

12.Dacă $x_1,x_2,...,x_{n-1}$ sunt rădăcinile diferite de 1 ale ecuației $x^n-1=0$,

să se arate că $\frac{1}{1-x_1}+\frac{1}{1-x_2}+...+\frac{1}{1-x_{n-1}}=\frac{n-1}{2}$.

13.Să se calculeze derivata de ordinul n pentru funcțiile:

1) $f(x)=\frac{1}{x}, x\neq 0$; 2) $f(x)=\frac{1}{2x+1}, x\neq -\frac{1}{2}$; 3) $f(x)=\frac{x}{x-1}, x\neq 1$; 4) $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}, x\neq\pm 1$;

5) $f(x)=\frac{x+2}{x^2-4x+3}e^x, x\in(1,3)$.

14.Să se arate că pentru orice $n\in\mathbb{N}$ au loc egalitățile:

1) $\left(a^x\right)^{(n)}=a^x(\ln a)^n, 0<a\neq 1, x\in\mathbb{R}\left(\left(e^x\right)^{(n)}=e^x\right)$; 2) $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right), x\in\mathbb{R}$;

3) $\left(\sin^3 x\right)^{(n)}=\frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{3^n}{4}\sin\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right), x\in\mathbb{R}$;

4) $\left(e^x\sin x\right)^{(n)}=\left(\sqrt{2}\right)^n e^x\sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right), x\in\mathbb{R}$; 5) $\left(x^n\ln x\right)^{(n)}=n!\left(\ln x+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right), x>0$.

15.Să se calculeze $f^{(n)}(0)$ pentru: 1) $f(x)=xe^{\frac{x}{a}}$; 2) $f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{1+x}}$; 3) $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$.

16.Utilizând regula lui Leibniz să se găsească o relație de recurență între oricare trei derivate consecutive ale funcției: 1) $f(x)=\operatorname{arctg} x, x\in\mathbb{R}$; 2) $f(x)=\arcsin^2 x, \forall x\in(-1,1)$ și să se calculeze $f^{(n)}(0)$.

17.Fie $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{-4x-5}{x-1}$ și șirul (a_n) cu termenul general $a_n=\frac{1}{f^{(n)}(-1)}$. Să se arate că șirul (a_n) este convergent și să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

18.Fie $f:\mathbb{R}-\{1,2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$ și $a_n=n^2\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(n+3)$. Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

19.1)Se consideră $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(1+2x)$. Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(1)}{(k-1)!}$.

2) Să se determine o relație de recurență pentru șirul $a_n=f^{(n)}(0), n\in\mathbb{N}$, unde

$f(x)=\frac{3x+2}{x^2-2x+5}, x\in\mathbb{R}$.

20.Fie $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x+1}$. Se consideră șirul (a_n) cu termenul general $a_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k f^{(k)}(1)}{k!}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

21.Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left(3x^2-4\right)e^x$. Să se arate că $f^{(n)}(x)=\left(3x^2+a_nx+b_n\right)e^x, \forall n\geq 1$ găsind pe a_n și b_n în funcție de n.

22.Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{x^2}$. Să se arate că $\forall n\geq 1, \forall x\in\mathbb{R}, f^{(n)}(x)=P_n(x)e^{x^2}$, unde P_n este polinom de gradul n și să se deducă o relație de recurență pentru P_n.

23 .Fie $f:E\subseteq\mathbb{R}\to F\subseteq\mathbb{R}^*$ o funcție bijectivă, derivabilă de ordinul trei. Să se exprime derivatele lui f^{-1} până la ordinul trei în funcție de derivatele lui f.

Aplicații . 1) Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=(1+x)\ln x$. Să se arate că f este bijectivă și să se calculeze $\left(f^{-1}\right)'(0),\left(f^{-1}\right)''(0),\left(f^{-1}\right)'''(0)$.

2) Fie $f:(0,\infty)\to(1,\infty), f(x)=x^4+x^2+x+1$. Să se arate că f este bijectivă și să se calculeze $\left(f^{-1}\right)'(4),\left(f^{-1}\right)''(4),\left(f^{-1}\right)'''(4)$.

24* .1) Fie $a_0,a_1,...,a_n\in\mathbb{R}, x_0\in\mathbb{R}, a_n\neq 0$ fixate. Să se arate că există și este unică funcția polinomială f de grad n pentru care $f(x_0)=a_0$, $f'(x_0)=a_1,...,f^{(n)}(x_0)=a_n$.

2) Demonstrați formula lui Newton $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k, x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$.

25 .Utilizând derivarea să se calculeze:

1) $x+2^2x^2+...+n^2x^n, x\neq 1$; 2) $x+3x^3+5x^5+...+(2n+1)x^{2n+1}, x\neq 1$; 3) $\sum_{k=1}^{n}k^2C_n^k$.

26 .Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{-x^2}$. Să se arate că $f^{(n)}(x)=P_n(x)e^{-x^2}, \forall n\geq 0$, unde P_n este o funcție polinomială de grad n.

27 .Să se arate că nu există nici o funcție polinomială P a cărei restricție la $(0,1)$ să fie egală cu $f:(0,1)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x$.

28 .Fie n numere reale $a_i, i=\overline{1,n}, a_i\neq a_j$, dacă $i\neq j$ și funcția polinomială $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)$. Considerăm funcția rațională $g:\mathbb{R}-\{a_i\,|\,i=\overline{1,n}\}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-a_i}$.

a) Să se arate că g este indefinit derivabilă și $g'(x)<0, \forall x\neq a_i, i=\overline{1,n}$;

b) Să se arate că: $g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$ și $f(x)f''(x)<(f'(x))^2, \forall x\neq a_i, i=\overline{1,n}$.

29 .Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}}, x>0\\ 0, x\leq 0\end{cases}$.

Să se arate că:

a) f este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$;

b) oricare ar fi $a>0$, există $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$, neidentic nulă și care se anulează în afara intervalului $[-a,a]$.

30 .Să se determine ordinul de multiplicitate pentru fiecare din rădăcinile scrise în dreptul ecuațiilor:

a) $x^6-7x^5+15x^4-40x^2+48x-16=0, x=2$;

b) $x^4+4x^3-2x^2-12x+9=0, x=1$;

c) $2x^5-x^4-7x^3+7x^2+x-2=0, x=1$;

d) $x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3=0, x=-1$;

e) $6x^5-35x^4+60x^3-80x+48=0, x=2$.

31 .Fie ecuația $x^4-10x^3+36x^2+4mx-3n=0, m,n\in\mathbb{R}$. Să se determine parametrii reali m,n astfel încât ecuația dată să aibă o rădăcină triplă.

32 .Fie funcția polinomială $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+5x^2-3x+1$. Să se determine $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=a+b(x-1)+c(x-1)^2+d(x-1)^3, \forall x\in\mathbb{R}$.

33 .Fie $f(x)=x^n, x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}^*$. Să se arate că $f(1)+\frac{f'(1)}{1}+\frac{f''(1)}{2!}+...+\frac{f^{(n)}(1)}{n!}=2^n$.

5.8. DIFERENȚIALA UNEI FUNCȚII DERIVABILE

Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă în $x_0\in(a,b)$. Atunci $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, relație care spune că pentru valori ale lui x suficient de aproape de $x_0\,(x\neq x_0)$, raportul $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ devine aproximativ egal cu $f'(x_0)$: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\approx f'(x_0)$ sau $f(x)\approx f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)$.

Dacă se notează $x-x_0=h$, atunci $x=x_0+h$ și relația precedentă se scrie $f(x_0+h)-f(x_0)\approx f'(x_0)h$, care se poate traduce astfel: la creșteri h suficient de mici ale argumentului, de la x_0 la x_0+h, creșterea corespunzătoare $f(x_0+h)-f(x_0)$ a funcției poate fi aproximată prin produsul $f'(x_0)h$. Atât creșterea funcției $f(x_0+h)-f(x_0)$ cât și produsul $f'(x_0)h$ sunt funcții de h. Cu cât creșterea h este mai mică (cu cât x este mai apropiat de x_0) cu atât produsul $f'(x_0)h$ este mai apropiat de $f(x_0+h)-f(x_0)$ și implicit eroarea comisă în aproximație este cu atât mai mică.

Definiție. Funcția dată de corespondența $h\to f'(x_0)\cdot h$ se numește **diferențiala funcției** f **în punctul** x_0 și se notează cu $df(x_0)$,
$$df(x_0)(h)=f'(x_0)\cdot h, h\in\mathbb{R}.$$

Să reținem deci că diferențiala $df(x_0)(h)$ aproximează creșterea funcției $f(x_0+h)-f(x_0)$: $f(x_0+h)-f(x_0)\approx df(x_0)(h)$.

Diferențiala funcției într-un punct $x\in(a,b)$ se scrie $df(x)(h)=f'(x)\cdot h$.

Pentru funcția $g(x)=x$ (funcția identică) avem: $dg(x)=dx=x'\cdot h=h$, ceea ce arată că diferențiala funcției identice este egală cu creșterea h a argumentului.

De obicei pentru dx se utilizează denumirea de **diferențiala argumentului**.

Din raportul $\frac{df(x)}{dx}=\frac{f'(x)\cdot h}{h}=f'(x)$ deducem că derivata lui $f(x)$ este egală cu raportul a două diferențiale. De aici

$$df(x)=f'(x)\cdot dx,$$

adică **diferențiala lui f este egală cu produsul dintre derivata lui f și diferențiala argumentului.**

Interpretarea geometrică (Fig.16). Lungimea segmentului $MN=dx$ (reprezintă creșterea argumentului $h=dx$), iar $f'(x)=\operatorname{tg}\alpha$. În triunghiul dreptunghic MNT avem: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{NT}{MN}$. De aici $NT=f'(x)dx$, adică lungimea segmentului NT este diferențiala $df(x)$. Creșterea $f(x+dx)-f(x)$ este lungimea segmentului NM'. Pentru creșteri dx suficient de mici ale argumentului, segmentele NT și NM' sunt aproximativ egale. Deci

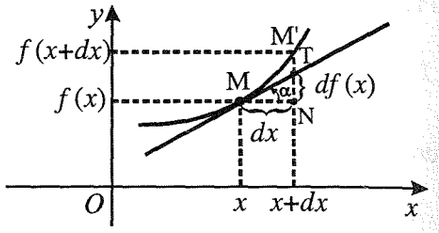


Fig.16

În jurul punctului M, pe o porțiune suficient de mică, graficul poate fi înlocuit cu un segment al tangentei.

Exemple 1) $f(x)=3x^3+x^2+5$. Avem: $df(x)=f'(x)dx=(9x^2+2x)dx$.

Pentru $x=1$, avem $df(1)=11dx$, iar pentru $x=\frac{1}{3}$, $df\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3}dx$.

2) $f(t)=e^{t^2}$. **Atunci $df(t)=f'(t)dt=2te^{t^2}dt$.**

Pentru $t=0$ se obține $df(0)=0dt=0$, iar pentru $t=1$, $df(1)=2edt$.

3) $f(x)=3x^2+\sin 5x$. **Avem $df(x)=f'(x)dx=(6x+5\cos 5x)dx$.**

Exerciții propuse

1. Să se calculeze diferențialele următoarelor funcții (stabilind domeniul de definiție și de diferențiabilitate):

1) $f(x)=(3x+1)^2$; 2) $f(x)=\sqrt{x^2+x}$; 3) $f(x)=\sqrt{\cos x}$; 4) $f(x)=e^{\sin x}$; 5) $f(x)=\ln(x^3-x)$;

6) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$; 7) $f(x)=\arcsin(e^x)$; 8) $f(x)=\operatorname{tg}(1+x^2)$; 9) $f(x)=\sqrt{x^2+1}+\ln\sqrt{x^2+1}$.

2. Calculați cu aproximație: 1) $\sqrt{17}$; 2) $\sin 31^\circ$; 3) $\ln 31,3$.

3. Dacă f,g sunt derivabile pe un interval deschis, atunci arătați că:

1) $d(f\pm g)=df\pm dg$ (diferențiala sumei este suma diferențialelor);

2) $d(c)=0, c\in\mathbb{R}$; 3) $d(f\cdot g)=(df)\cdot g+f\cdot dg$; 4) $d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{(df)g-f(dg)}{g^2}, g\neq 0$.

Teste de evaluare

Testul 1 (1 punct din oficiu)

1. a) Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2+5}, \forall x\in\mathbb{R}$. Să se arate că f are derivată în $x_0=2$ și să se calculeze $f'(2)$. (1 punct)

b) Să se arate că punctul $(1,0)$ este punct unghiular al funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x|x-1|, \forall x\in\mathbb{R}$. (1 punct)

2. a) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-x, \forall x\in\mathbb{R}$, în punctul $(2,f(2))$. (1 punct)

b) Construiți o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care să fie continuă pe $\mathbb{R}$, derivabilă pe $\mathbb{R}-\{0;1\}$ și nederivabilă pe $\{0;1\}$. (1 punct)

3. Să se determine parametrii reali m,n,p astfel încât funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2+mx+p, x\in[-1,0)\\ nx^2+4x+1, x\in[0,1]\end{cases}$ să fie continuă pe $[-1,1]$, derivabilă pe $(-1,1)$ și $f(-1)=f(1)$. (2 puncte)

4. Să se studeze derivabilitatea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\max\{1,x^2,x^3\}, x\in\mathbb{R}$. (1 punct)

5. a) Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietatea $|f(x)-x|\le x\operatorname{arctg} x, \forall x\in\mathbb{R}$. Să se arate că f este derivabilă în $x_0=0$ și $f'(0)=1$. (1 punct)

b) Să se determine numerele reale a,b,c astfel încât funcția $F:\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{3-2x}, \forall x<\frac{3}{2}$ să aibă proprietatea $F'(x)=f(x), \forall x<\frac{3}{2}$, unde $f:\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)\to\mathbb{R}, f(x)=x\sqrt{3-2x}$. (1 punct)

Testul 2 (1 punct din oficiu)

1. a) Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-x^2+x+5$. Să se arate că f este derivabilă în $x_0=-1$ și să se scrie ecuația tangentei în punctul $(-1,2)$. (1 punct)

b) Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+ax+b$, știind că graficul său trece prin punctul $(1,3)$, iar tangenta la graficul funcției în acest punct este paralelă cu prima bisectoare. (1 punct)

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dată prin relația $f(x)=\begin{cases}x^3+ax^2+bx+c, x<1\\ \operatorname{arctg}(x-1), x\ge 1\end{cases}$. Știind că f este de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$, să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$. (1 punct)

3 . Fie $f:(1,\infty)\to(-2,\infty), f(x)=x^3-3x$. Să se arate că f este inversabilă şi să se calculeze $\left(f^{-1}\right)'(2)$ şi $\left(f^{-1}\right)''(2)$. (2 puncte)

4 . Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2-3x+2, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$. Să se studieze derivabilitatea lui f şi să se determine punctele unde tangenta la grafic trece prin origine. (1 punct)

5 . a) Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}$. Să se arate că: $xf''(x)+\frac{1}{2}f'(x)-\frac{1}{4}f(x)=0$. (1 punct)

b) Să se calculeze derivata de ordinul n a funcției $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln\left(1-x^2\right)$. (2 puncte)

Testul 3 (tip grilă) (1 punct din oficiu)

1 . Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$. Atunci $f'(1)$ este egal cu:

a) $\frac{3}{4\sqrt{2}}$; b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; c) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; d) 0 ; e) $\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$. (1 punct)

2 . Să se determine parametrii reali m şi n astfel încât graficele funcțiilor $f(x)=mx^2+nx+2$, $g(x)=1-\frac{1}{x}$ să aibă tangentă comună în punctul de abscisă $x=1$. a) $m=1, n=-1$; b) $m=3, n=-5$; c) $m=-3, n=5$; d) $m=0, n=4$; e) $m=n=1$. (1 punct)

3 . Dacă f este o funcție polinomială cu proprietatea $\left(f'(x)\right)^5=\left(f(x)\right)^4, \forall x\in\mathbb{R}$, atunci gradul lui f este egal cu:
a) unu; b) doi; c) trei; d) patru; e) cinci. (1 punct)

4 . Fie funcția $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{1-x}$. Atunci $f^{(n)}(0)$ este egal cu:

a) $\frac{n!}{2}$; b) $n!$; c) $2n!$; d) $(-1)^n n!$; e) $(-1)^{n+1} n!$. (1 punct)

5 . Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2e^{ax}$. Atunci limita $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(0)}{f^{(n)}(0)}$ este egală cu:

a) $\frac{a}{2}$; b) $2a$; c) a ; d) $\frac{a}{3}$; e) 0. (2 puncte)

6 . Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x}, x<0\\ x^2+ax+b, x\ge 0\end{cases}$. Atunci f este derivabilă dacă:

a) $a=b=1$; b) $a=\frac{1}{2}, b=-2$; c) $a=-\frac{1}{2}, b=2$; d) $a=\frac{1}{3}, b=0$; e) $a=\frac{1}{2}, b=1$. (1 punct)

7 . Fie $f:(-\infty,0)\to\mathbb{R}, f(x)=e^{\frac{1}{x}}$. Atunci $\lim\limits_{x\nearrow 0} f^{(50)}(x)$ este:
a) 1; b) –1 ; c) 0; d) ∞ ; e) $-\infty$. (2 puncte)

5.9 TEOREME FUNDAMENTALE ALE CALCULULUI DIFERENȚIAL. FUNCȚII DERIVABILE PE UN ITERVAL

În paragrafele precedente am prezentat regulile de calcul privind derivatele, iar în paragrafele următoare vom studia proprietățile remarcabile pe care le au funcțiile derivabile definite pe un interval.
În particular vom demonstra teoremele lui Fermat, Rolle, Lagrange, care sunt, fără îndoială, teoremele cele mai utile şi cele mai întrebuințate ale calculului diferențial aşa cum veți avea ocazia să constatați.

1. Puncte de extrem ale unei funcții

Fie funcția $f:E\to\mathbb{R}, E$ interval sau reuniune de intervale.

Definiție. Un punct $a\in E$ se numeşte **punct de maxim local** al funcției f dacă există o vecinătate V a lui a , în care funcția are valori mai mici decât în a , adică

$$f(x)\le f(a), \forall x\in V\cap E .$$

Dacă a este un punct de maxim local al lui f , atunci numărul $f(a)$ se numeşte **maxim** al lui f , iar punctul $(a, f(a))$ de pe grafic se numeşte **punct de maxim local al graficului.**
În Fig. 17 a), b) este ilustrat faptul că $x=a$ este punct de maxim local al funcției f .

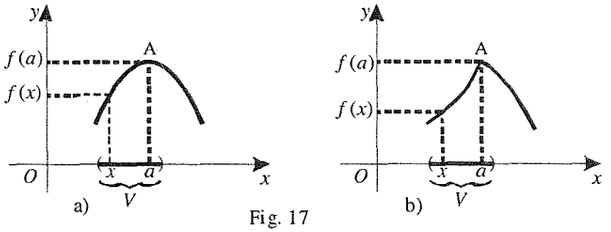


Fig. 17

Observație . Utilizarea adjectivului „local" pentru un punct de maxim este motivată de faptul că inegalitatea $f(x)\le f(a)$ **are loc pe o anume vecinătate** V **a punctului** a .

Definiție. Un punct $b\in E$ se numeşte **punct de minim local** pentru funcția f dacă există o vecinătate V a lui b , în care funcția are valori mai mari decât în b , adică $f(b)\le f(x), \forall x\in V\cap E$.

Dacă b este un punct de minim local al lui f, atunci numărul $f(b)$ se numeşte **minim** al lui f, iar punctul $(b, f(b))$ de pe grafic se numeşte **punct de minim local al graficului.**

În Fig. 18 a), b) este ilustrat faptul că $x = b$ este punct de minim local al lui f.

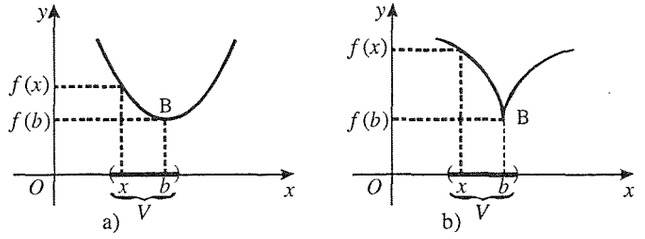


Fig. 18

Definiție. Un **punct de minim local** sau **maxim local** pentru o funcție f se numește **punct de extrem local** al funcției. Valorile funcției în punctele sale de extrem, maximele și minimele funcției, se numesc **extremele locale ale funcției**. Punctele de maxim și de minim local ale graficului se numesc **puncte de extrem local ale graficului**.

Definiție. Un punct $x_0 \in E$ se numeşte **punct de maxim absolut** al funcției f dacă $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in E$.

Observații. 1) Să remarcăm că $x_0 \in E$ este punct de maxim absolut pentru f dacă valorile funcției **pe domeniul de definiție** sunt cel mult egale cu valoarea funcției în x_0.

2) Evident, orice punct de maxim absolut este şi punct de maxim local dar, în general, nu şi reciproc.

3) O funcție poate avea mai multe puncte de maxim absolut (x_0, x_1 în Fig.19).

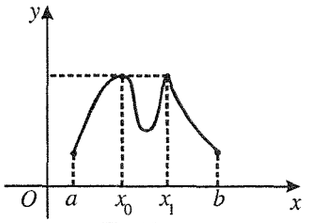


Fig. 19

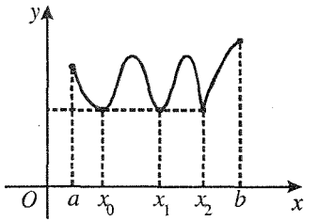


Fig. 20

Definiție. Un punct $x_0 \in E$ se numeşte **punct de minim absolut** al funcției f dacă $f(x) \geq f(x_0), \forall x \in E$.

Observații. 1) Un punct este minim absolut pentru f dacă valorile funcției pe **domeniul de definiție** sunt cel puțin egale cu valoarea funcției în x_0.

2) Orice punct de minim absolut este şi punct de minim local, dar, în general, nu şi reciproc.

3) O funcție poate avea mai multe puncte de minim absolut (x_0, x_1, x_2 în Fig.20).

Definiție. Un **punct de maxim absolut** sau **de minim absolut** se numeşte **punct de extrem absolut.**

Observație. Dacă o funcție f este continuă pe un interval închis $[a, b]$ şi îşi atinge valoarea maximă (minimă) într-un punct $c \in (a, b)$, atunci c este în acelaşi timp un punct de maxim (minim) local al lui f.

Figura 21 ilustrează graficul unei funcții continue pe intervalul $[a, b]$. Punctele x_2, x_4 sunt puncte de minim local ale lui f, iar x_1, x_3 sunt puncte de maxim local ale lui f.

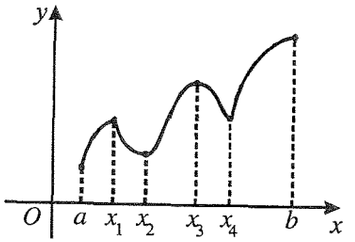


Fig. 21

Se observă că o valoare maximă locală $f(x_1)$ poate fi mai mică decât o valoare minimă locală $f(x_4)$.

2. Teorema lui Fermat

Un rezultat remarcabil pentru o funcție derivabilă într-un punct de extrem este formulat în:

Teorema (Fermat *). Fie $f : E \to \mathbb{R}, E$ **interval** iar x_0 un **punct de extrem din interiorul intervalului.** Dacă funcția f este derivabilă în x_0, atunci $f'(x_0) = 0$.

Demonstrație. Putem presupune că x_0 este un punct de maxim local (În caz contrar înlocuim f cu $-f$). Prin urmare există o vecinătate $V \in V(x_0)$ şi deci un număr $\varepsilon > 0$ astfel încât $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset V \cap E$ pentru care $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Fie $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$.

Atunci $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ (deoarece $f(x) \leq f(x_0), x < x_0$).

* Fermat, Pierre de (1601-1665) – matematician francez.

Cum f este derivabilă în x_0, există: $\lim\limits_{x \nearrow x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ şi în plus, de mai sus, $f'(x_0) \geq 0$. (1)

Acum luăm $x \in (x_0, x_0+\varepsilon)$ pentru care $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$.

Raţionând ca mai sus deducem $\lim\limits_{x \searrow x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \leq 0$ (2).

Din (1) şi (2) rezultă $f'(x_0)=0$, ceea ce trebuia demonstrat. ■

Interpretare geometrică. Din $f'(x_0)=0$, rezultă că tangenta la grafic în punctul $(x_0, f(x_0))$ este paralelă cu axa Ox (Fig.22).

Teorema lui Fermat spune că: graficul unei funcţii derivabile are tangentă paralelă cu axa Ox în **punctele sale de extrem** (de maxim sau de minim) care **nu coincid cu extremităţile graficului.**

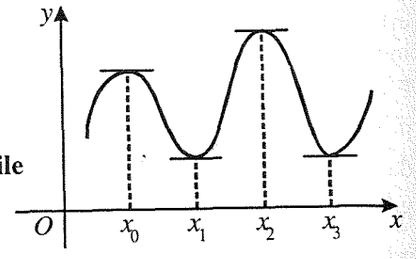


Fig. 22

Observaţii . 1) Teorema lui Fermat are un caracter local, vizând comportarea funcţiei în vecinătatea unui punct fixat. Să observăm că $f'(x_0)$ poate fi zero şi pentru x_0 punct de inflexiune !

2) Dacă punctul $x_0 \in E$ n-ar fi din **interiorul intervalului**, atunci concluzia teoremei lui Fermat nu mai este adevărată. Este suficient să considerăm funcţia $f:[0,1] \to \mathbb{R}, f(x)=x$ pentru care $f'(x)=1, \forall x \in [0,1]$.

3) Reciproca teoremei lui Fermat, în general, nu este adevărată, adică derivata unei funcţii se poate anula într-un punct, fără ca acesta să fie punct de extrem.

De exemplu funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x)=x^3$ pentru care $f'(x)=3x^2$ şi deci $f'(0)=0$, dar $x_0=0$ nu este punct de extrem pentru f (este punct de inflexiune).

4) Un punct $x_0 \in E$ poate fi punct de extrem pentru f fără să existe $f'(x_0)$.

Aşa este funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x)=|x|$, pentru care $x_0=0$ este punct de minim, dar ştim că f nu este derivabilă în $x_0=0$ (deci condiţia ca f să fie derivabilă în x_0 nu este condiţie necesară ca x_0 să fie punct de extrem).

Aşadar dacă $f:E \to \mathbb{R}$ continuă pe intervalul E, f are extrem în punctul interior x_0, atunci fie derivata lui f în x_0 nu există, fie $f'(x_0)=0$.

5) Dacă $f:E \to \mathbb{R}$ este o **funcţie derivabilă** pe un interval deschis E, atunci zerourile derivatei f' sunt numite **puncte critice** ale lui f pe E.

Valoarea funcţiei într-un punct critic se numeşte **valoare staţionară**, deoarece viteza de schimbare a lui f relativ la x este zero, $f'(x_0)=0$, iar $(x_0, f(x_0))$ este **punct staţionar.**

Natura punctelor staţionare poate fi determinată prin precizarea semnului derivatei la stânga şi la dreapta punctului (Fig. 23)

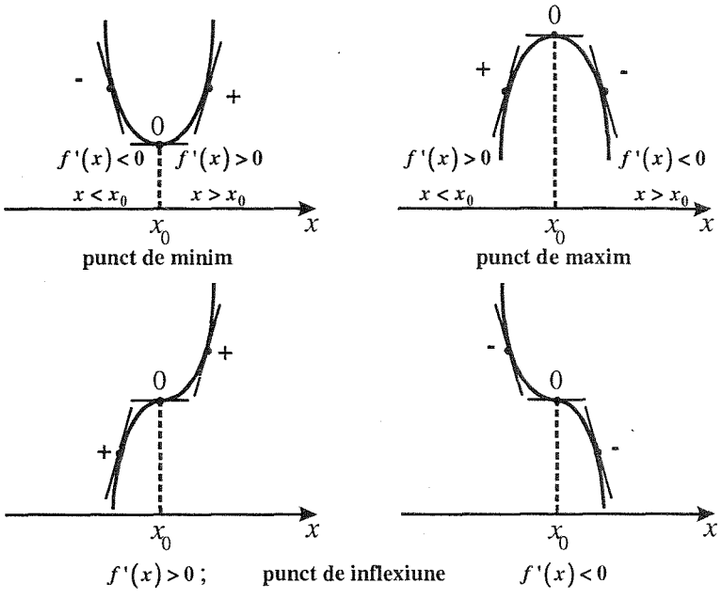


Fig. 23

Să reţinem că: **1) valorile extreme ale unei funcţii $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, f derivabilă, se pot obţine la capetele intervalului sau în puncte critice din interiorul intervalului.**

2) dacă f are punct de întoarcere sau unghiular, acesta este punct de extrem (într-un astfel de punct f nu este derivabilă).

> Teorema lui Fermat afirmă că punctele de extrem local ale **unei funcţii derivabile** f sunt printre punctele critice, adică punctele de extrem local ale lui f sunt printre soluţiile ecuaţiei $f'(x)=0$.

Exerciții rezolvate

1. Dacă $a,b>0, a^x+b^x\geq 2, \forall x\in\mathbb{R}$, atunci $ab=1$.

R. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=a^x+b^x$, pentru care $f(0)=2$.

Cum din ipoteză $f(x)\geq f(0), \forall x\in\mathbb{R}$ se deduce că $x_0=0$ este un punct de minim pentru f și $0\in\mathbb{R}$. Conform teoremei lui Fermat rezultă $f'(0)=0$. Dar $f'(x)=a^x\ln a+b^x\ln b$. Așadar $\ln a+\ln b=0$ sau $\ln(ab)=0$, adică $ab=1$.

Observație. Ce se întâmplă dacă inegalitatea are loc $\forall x\in\mathbb{Q}$?

2. Să se arate că există cel puțin un număr real $a>0$ cu proprietatea că:

1) $a^x\geq x+1, \forall x\in\mathbb{R}$; 2) $\ln x\geq a\cdot\frac{x-1}{x}, \forall x>0$.

R. 1) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=a^x-x-1$. Din ipoteză $f(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$. Cum $f(0)=0$ se deduce că $x_0=0$ este punct de minim pentru f. Aplicând teorema lui Fermat rezultă $f'(0)=0$. Dar $f'(x)=a^x\ln a-1$ și deci $\ln a-1=0$ adică $a=e$. Așadar $a=e$ este numărul căutat.

Observație. Se arată că $a=e$ este singurul număr real ce verifică inegalitatea.

2) $x=1$ punct de minim; $a=1$.

3. Să se determine valoarea parametrului $a>0$, astfel încât să fie valabilă inegalitatea $2^x+a^x\geq 3^x+4^x, \forall x\in\mathbb{R}$.

R. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2^x+a^x-3^x-4^x$. Inegalitatea din enunț se scrie $f(x)\geq 0=f(0), \forall x\in\mathbb{R}$, ceea ce arată că $x=0$ este un punct de minim al funcției f. Conform teoremei lui Fermat se deduce că $f'(0)=0$, unde $f'(x)=2^x\ln 2+a^x\ln a-3^x\ln 3-4^x\ln 4$, cu $a>0, a\neq 1$. Din $f'(0)=0$ rezultă $\ln 2+\ln a-\ln 3-\ln 4=0$ sau $\ln 2a=\ln 12$, iar de aici $a=6$. Dacă $a=6$, inegalitatea se scrie $2^x+6^x-3^x-4^x=(1-2^x)(2^x-3^x)\geq 0$ și este adevărată deoarece dacă $x\geq 0$, atunci $1-2^x\leq 0, 2^x-3^x\leq 0$, iar pentru $x<0$ avem $1-2^x>0, 2^x-3^x>0$.

Dacă $a=1$, atunci inegalitatea nu se verifică pentru $x=2$.

Exerciții propuse

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x_0\in\mathbb{R}$ un punct fixat. Arătați că x_0 este punct de extrem pentru f în cazurile:

1) $f(x)=x^2-2x, x_0=1$, punct de minim; 2) $f(x)=-x^2+4x, x_0=2$ punct de maxim;

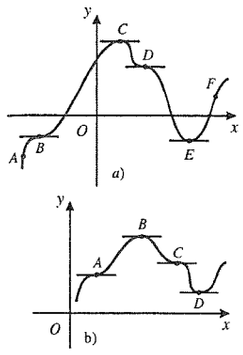
3) $f(x)=x^3+3x^2, x_0=-2$, punct de maxim, $x_0=0$, punct de minim; 4) $f(x)=x^4-4x^3+4x^2$, $x_0=0, x_0=1$, puncte de minim, $x_0=1$ punct de maxim; 5) $f(x)=\sin x-\sin^2 x, x_0=\frac{\pi}{6}$, punct de maxim, $x_0=\frac{\pi}{2}$ este punct de minim.

2. Determinați punctele critice ale funcției $f:E\to\mathbb{R}$, în cazurile:

1) $f(x)=x^2-3x+2$; 2) $f(x)=-x^2+6x$; 3) $f(x)=x^3+3x$; 4) $f(x)=\frac{1}{x(x-1)}$;

5) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$; 6) $f(x)=x^2e^x$; 7) $f(x)=x-\ln x$; 8) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$; 9) $f(x)=\frac{\cos x}{\cos 2x}$;

10) $f(x)=\frac{x}{2}-\operatorname{arctg} x$.



3. Pentru „trenulețul groazei" curba pe care o descrie este cea din fig. a). Precizați punctele de extrem și punctele de inflexiune. După senzațiile trăite puteți preciza când vă aflați în fiecare din aceste puncte ? Aceeași întrebare pentru un automobilist care se află pe traseul din fig. b).

4. Dacă $a,b,c>0, a^x+b^x+c^x\geq 3, \forall x\in\mathbb{R}$, atunci $abc=1$. Generalizare.

5. Dacă $a_i>0, i=\overline{1,n}, \sum_{i=1}^{n}a_i^x\geq\sum_{i=1}^{n}a_i, \forall x\in\mathbb{R}$, atunci $\prod_{i=1}^{n}a_i^{a_i}=1$.

6. Fie $a,b>0, a^x-b^x\geq x, \forall x\in\mathbb{R}$. Să se arate că $a=be$ și $b\geq 1$.

7. Să se arate că există cel puțin un număr real $a>0$ cu proprietatea $a^x\geq x^a, \forall x>0$.

8. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât: $(1+x)^n\geq 1+ax, \forall x>-1$ ($n\in\mathbb{N}$ - fixat).

3. Teorema lui Rolle

Teorema (lui Rolle*). Fie o funcție $f:[a,b]\to\mathbb{R}, a,b\in\mathbb{R}, a<b$.
Dacă:
1) f **este continuă pe intervalul închis** $[a,b]$;
2) f **este derivabilă pe intervalul deschis** (a,b);
3) f **are valori egale la capetele intervalului,** $f(a)=f(b)$,
atunci există cel puțin un punct c din intervalul deschis (a,b), $c\in(a,b)$, în care derivata se anulează, $f'(c)=0$.

Demonstrație. Se analizează cazurile:

1) Funcția f **este constantă** pe $[a,b]$. În acest caz $f'(x)=0, \forall x\in(a,b)$ și deci orice punct $c\in(a,b)$ răspunde concluziei teoremei.

2) Funcția f **nu este constantă**. Cum f este continuă pe un compact $[a,b]$, atunci (Weierstrass) f este mărginită și își atinge marginile pe compact, adică $(\exists)x_m, x_M\in[a,b]$ astfel încât $f(x_m)=m, f(x_M)=M$, unde $M=\sup f(x)$, $m=\inf f(x)$ sunt marginea superioară și respectiv inferioară a lui f. Deoarece f nu este constantă rezultă $m<M$. Dacă punctul de minim x_m, se află în interiorul intervalului $[a,b]$, atunci conform teoremei lui Fermat, $f'(x_m)=0$. Deci luând $c=x_m$ teorema este demonstrată.

Dacă $x_m\in\{a,b\}$, deci x_m coincide cu unul din capetele intervalului $[a,b]$, atunci $f(a)=f(b)=f(x_m)=m<M=f(x_M)$. În acest caz este clar că x_M, punctul

*Rolle, Michael(1652-1719) – matematician francez, care a demonstrat pentru prima dată teorema pentru funcții polinomiale

de maxim al lui f, se află în interiorul intervalului $[a,b]$. Din nou aplicând teorema lui Fermat se deduce $f'(x_M)=0$.

Deci $c=x_M$ şi teorema este complet demonstrată.

Corolar. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b) şi $f(a)=f(b)=0$ (a,b sunt rădăcini pentru f).
Atunci există cel puţin un punct $c\in(a,b)$ astfel încât $f'(c)=0$.

Deci între două rădăcini ale funcţiei f se află cel puţin o rădăcină a derivatei f'.

Interpretarea geometrică. Teorema lui Rolle are o interpretare geometrică simplă. Din $f'(c)=0$ rezultă că tangenta la graficul funcţiei f în punctul $(c,f(c))$ este paralelă cu axa Ox (Fig.24). Deci dacă cerinţele teoremei lui Rolle sunt îndeplinite, atunci pe graficul funcţiei f există (cel puţin) un punct $(c,f(c))$ în care tangenta este paralelă cu axa Ox.

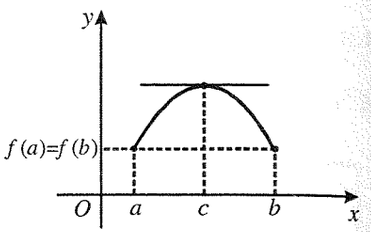


Fig. 24

Interpretarea fizică. Presupunem că x este timpul şi $f(x)$ este coordonata unui punct, care se mişcă pe o dreaptă, la momentul x. La momentul $x=a$ punctul are coordonata $f(a)$, apoi se mişcă într-un anumit mod cu viteza $f'(x)$ şi se întoarce la punctul de plecare cu coordonata $f(a)$, la momentul $x=b\big(f(a)=f(b)\big)$.

Este clar că pentru a se întoarce la punctul $f(a)$, el trebuie să se oprească la un anumit moment, adică la un anumit moment $x=c$ viteza este zero $f'(c)=0$.

Observaţii. 1) Teorema lui Rolle este o **proprietate de existenţă.**

2) Deoarece orice funcţie derivabilă este continuă, condiţia a) din teoremă se poate reduce la f continuă pe $\{a,b\}$, deoarece din b) rezultă f continuă pe (a,b).

O funcţie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ cu proprietăţile 1) f continuă pe $[a,b]$ şi 2) f derivabilă pe (a,b) se numeşte **funcţie Rolle.**

3) Toate cele trei cerinţe din teorema lui Rolle sunt esenţiale pentru ca teorema să fie adevărată. Dacă una din cele trei ipoteze nu se verifică, atunci concluzia teoremei nu mai are loc. Vom ilustra prin exemplele de mai jos acest lucru.

Exemplul 1. Fie funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\begin{cases}1, x=0\\ x, x\in(0,1]\end{cases}$.

Această funcţie verifică cerinţele 2), 3) din proprietate, dar nu verifică 1), adică f nu este continuă

la dreapta în $x=0$. Deci f nu este continuă pe $[0,1]$. Avem $f'(x)=1,\forall x\in(0,1)$ şi prin urmare $f'(x)\neq 0,\forall x\in(0,1)$.

Exemplul 2. Să considerăm $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=|x|$ pentru care se verifică 1) (continuitatea pe $[-1,1]$), 3) $(f(-1)=f(1)=1)$, dar care nu se verifică 2) întrucât f nu este derivabilă în $x=0$. Prin urmare nu există punct intermediar $c\in(-1,1)$ în care $f'(c)=0$, căci $f'(x)=\begin{cases}-1, -1<x<0\\ 1, 0<x<1\end{cases}$.

Exemplul 3. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f=x^2$. Această funcţie verifică 1), 2) din teoremă dar nu verifică 3) $(f(0)=0\neq f(1)=1)$. Aşadar nu există $c\in(0,1)$ astfel încât $f'(c)=0$ deoarece $f'(x)=2x\neq 0$, $\forall x\in(0,1)$.

Exemplul următor vine să atragă atenţia că necesitatea ca domeniul de definiţie al funcţiei să fie interval este esenţială.

Fie $f:[0,3]-\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}-x+3, x\in[0,1)\\ x, x\in(1,3]\end{cases}$.

Evident f este derivabilă pe $[0,3]-\{1\}$ şi $f(0)=f(3)=3$ şi totuşi f nu se anulează pe $[0,3]-\{1\}$. Mulţimea de definiţie nu este interval.

4) Nu trebuie să se tragă concluzia că derivata unei funcţii nu se anulează în nici-un punct dacă acea funcţie nu satisface una din condiţiile teoremei lui Rolle. Nu avem decât să luăm $f:[-2,2]\to\mathbb{R}, f(x)=|x^2-1|$.

Exerciţii rezolvate

1. Să se arate că funcţia $f:[1,2]\to\mathbb{R}, f(x)=(x-1)(x-2)$ verifică condiţiile teoremei lui Rolle şi să se aplice efectiv.

R. Verificăm cele trei condiţii din teorema lui Rolle. Cum f este o funcţie polinomială ea este derivabilă şi (evident) continuă pe $\mathbb{R}$, deci şi pe submulţimea $[1,2]$ a lui $\mathbb{R}$.

Ultima cerinţă $f(1)=f(2)(=0)$ este imediată. Deci, conform teoremei lui Rolle, există $c\in(1,2)$ astfel încât $f'(c)=0$, unde $f'(x)=2x-3$. Aşadar $2c-3=0$ ne dă $c=\frac{3}{2}\in(1,2)$.

2. Să se arate că derivata funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x-1)(x+1)(x-2)$ are numai rădăcini reale.

R. Să observăm că $f(-1)=f(1)=f(2)=0$. Pe fiecare interval $[-1,1],[1,2]$ se poate aplica teorema lui Rolle (!) şi deci există $c_1\in(-1,1), c_2\in(1,2)$ pentru care $f'(c_1)=f'(c_2)=0$. Cum $f'(x)=3x^2-4x-1$, ecuaţia $f'(x)=0$ are soluţiile $x_1=\frac{2-\sqrt{7}}{3}, x_2=\frac{2+\sqrt{7}}{3}$. Se ia $c_1=x_1, c_2=x_2$. Aşadar rădăcinile ecuaţiei $f'(x)=0$ sunt reale.

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie polinomială. Să se arate că:

a) dacă toate rădăcinile lui f sunt reale şi distincte, atunci f' are aceeaşi proprietate.

b) între două rădăcini reale consecutive ale lui f' există cel mult o rădăcină reală a lui f.

R. a) Presupunem că f este o funcţie polinomială de grad n având zerourile $x_1<x_2<\ldots<x_n$. Atunci funcţiei f i se poate aplica teorema lui Rolle pe intervalele $[x_1,x_2],[x_2,x_3],\ldots,[x_{n-1},x_n]$.

Deci există $c_1 \in (x_1, x_2), c_2 \in (x_2, x_3), \ldots, c_{n-1} \in (x_{n-1}, x_n)$ pentru care $f'(c_i) = 0, i = \overline{1, n-1}$. Cum f' este o funcție polinomială de grad $n-1$, care are $(n-1)$ rădăcini reale c_i rezultă că toate rădăcinile (zerourile) lui f' sunt reale.

b) Fie $x_1 < x_2$ două rădăcini consecutive pentru f'. Vom soluționa acest punct prin reducere la absurd. Presupunem că ar exista $a, b \in (x_1, x_2), a < b$ două rădăcini ale lui f. Pe intervalul $[a, b]$ funcției f i se poate aplica teoremei lui Rolle (!), ceea ce înseamnă că există cel puțin un număr real $c \in (a, b)$ pentru care $f'(c) = 0$. Dar acest lucru este fals deoarece din $c \in (a, b) \subseteq (x_1, x_2)$ rezultă $x_1 < c < x_2$, ceea ce arată că punctele x_1, x_2 nu sunt consecutive pentru care f' se anulează. Contradicția a provenit din presupunerea că f ar avea mai mult de o rădăcină între două rădăcini consecutive ale derivatei.

Observație. Acest punct b) va fi utilizat la șirul lui Rolle cu ajutorul căruia se precizează numărul de rădăcini reale ale ecuației $f(x) = 0, f : I \to \mathbb{R}$, pe o mulțime $I \subseteq \mathbb{R}$.

4. Se consideră funcția $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + mx + n, x \in [-1, 0] \\ px^2 + 4x + 4, x \in (0, 1] \end{cases}, m, n, p \in \mathbb{R}$.

Să se determine parametrii reali m, n, p astfel încât f să satisfacă condițiile de aplicabilitate ale teoremei lui Rolle pe $[-1, 1]$. Pentru m, n, p astfel determinați să se aplice efectiv proprietatea.

R. Se verifică pe rând cele trei condiții.

1) Continuitatea funcției pe $[-1, 1]$. Funcția f este continuă pe $[-1, 0)$, $(0, 1]$, deoarece este definită cu ajutorul unor funcții elementare (polinomiale). Se impune condiția ca f să fie continuă și în punctul $x = 0$. Funcția f este continuă în $x = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow 4 = n$.

Deci pentru $n = 4$ funcția f este continuă pe $[-1, 1]$.

2) Derivabilitatea funcției pe $(-1, 1)$. Funcția f este derivabilă pe $(-1, 0) \cup (0, 1)$, pentru că este definită cu ajutorul unor funcții elementare (polinomiale). Trebuie ca f să fie derivabilă și în

$$x = 0 \Leftrightarrow f_s'(0) = f_d'(0) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{x \nearrow 0} \frac{x^2 + mx}{x} =$$

$$= \lim_{x \searrow 0} \frac{px^2 + 4x}{x} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m = 4.$$

Deci pentru $m = 4$ funcția f este derivabilă pe $(-1, 1)$.

3) Din $f(-1) = f(1)$ se obține $p = -7$.

Deci $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 4, x \in [-1, 0] \\ -7x^2 + 4x + 4, x \in (0, 1] \end{cases}$. Așadar cele trei condiții din teorema lui Rolle se verifică dacă $m = n = 4, p = -7$.

Atunci există cel puțin un punct $c \in (-1, 1)$ pentru care $f'(c) = 0$, unde $f'(x) = \begin{cases} 2x + 4, x \in [-1, 0) \\ -14x + 4, x \in [0, 1] \end{cases}$. Se egalează fiecare formă a lui f' cu zero și rezultă: din $2x + 4 = 0$, $x = -2$, care însă nu aparține intervalului $(-1, 0)$, iar din $-14x + 4 = 0$ deducem $x = \frac{2}{7}$ valoare care aparține intervalului $(0, 1)$. Deci punctul c căutat este $c = \frac{2}{7}$.

5. Aplicând teorema lui Rolle funcției $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right), x \in (0, 1] \\ 0, x = 0 \end{cases}$ pe fiecare interval $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], n \in \mathbb{N}^*$ să se arate că ecuația $\operatorname{tg} x = x$ are soluție pe fiecare interval $(n\pi, (n+1)\pi)$.

R. Funcția f este continuă pe $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ (operații cu funcții continue), derivabilă pe $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ (operații cu funcții derivabile) și $f\left(\frac{1}{n+1}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

Deci i se poate aplica teorema lui Rolle pe intervalul $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$. Prin urmare există $c_n \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ pentru care $f'(c_n) = 0$, unde $f'(x) = \sin\frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x}, x \in (0, 1)$. Deci $\sin\frac{\pi}{c_n} - \frac{\pi}{c_n}\cos\frac{\pi}{c_n} = 0$ sau $\operatorname{tg}\frac{\pi}{c_n} = \frac{\pi}{c_n}$, ceea ce arată că numărul $\frac{\pi}{c_n}$ este soluție a ecuației $\operatorname{tg} x = x$. Rămâne de verificat că $\frac{\pi}{c_n} \in (n\pi, (n+1)\pi)$ ceea ce-i echivalent cu $c_n \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$.

6. Se consideră funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) și cu proprietatea $f^2(b) - f^2(a) = b^2 - a^2$. Să se arate că ecuația $f'(x) f(x) = x$ are cel puțin o rădăcină în intervalul (a, b).

R. Se consideră funcția $h : [a, b] \to \mathbb{R}, h(x) = f^2(x) - x^2$ (sugerată de rescrierea relației din ipoteză sub forma $f^2(b) - b^2 = f^2(a) - a^2$) care este continuă pe $[a, b]$ (ca diferență de funcții continue), derivabilă pe (a, b) (ca diferență de funcții derivabile) și $h(a) = h(b)$. Deci funcția h verifică condițiile teoremei lui Rolle. Prin urmare există $c \in (a, b)$ pentru care $f'(c) = 0$, unde $h'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) - 2x$. Deci c verifică egalitatea $f(c) f'(c) - c = 0$, ceea ce arată că c este soluție a ecuației $f(x) f'(x) - x = 0$.

Exerciții propuse

1. Să se arate că funcția $f : [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = x(x-1)$ verifică condițiile teoremei lui Rolle și să se aplice efectiv această teoremă.

2. Să se arate că derivata funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x-3)(x-2)(x+2)(x+3)$ are numai rădăcini reale.

3. Să se aplice teorema lui Rolle funcției $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}, f(x) = \left|x^4 - 9x^2\right|$ pe intervalul $[-3, 3]$.

4. a) Să se stabilească dacă se poate aplica teorema lui Rolle pentru funcțiile următoare pe domeniile de definiție:

1) $f : [1, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = (x-1)(x-2)$; 2) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x - 1, x \in [-1, 0) \\ x - 3, x \in [0, 1] \end{cases}$;

3) $f : [-1, 1] - \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, x \in [-1, 0] \\ x + 1, x \in (0, 1] \end{cases}$;

b) Să se determine $m,n,p\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția f să satisfacă condițiile de aplicabilitate ale teoremei lui Rolle:

1) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} mx^2+nx+p, x\in[-1,0] \\ e^x, x\in(0,1) \end{cases}$;

2) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x^2+mx+n, x\in[-2,0] \\ x^2+px+1, x\in(0,1] \end{cases}$.

5.Să se arate că ecuația 1) $x^{13}+x^7+x-1=0$; 2) $6x^5+4x^3-2x-1=0$; 3) $x^{13}+7x^3-5=0$ are numai o rădăcină pozitivă subunitară.

6.Dacă ecuația $a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x=0$ are o rădăcină x_0 strict pozitivă, atunci ecuația $na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+...+a_{n-1}=0$ are de asemenea o rădăcină pozitivă stict mai mică decât x_0.

7.Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b) și $f'(x)\neq 0, \forall x\in(a,b)$. Să se arate că $f(a)\neq f(b)$.

8.Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}, a>0$ o funcție continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b) și $\frac{f(a)}{a}=\frac{f(b)}{b}$. Să se arate că există $c\in(a,b)$ astfel încât $cf'(c)=f(c)$.

9.Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}^*$, două funcții continue pe $[a,b]$, derivabile pe (a,b) și $f(a)g(b)=f(b)g(a)$. Să se arate că există $c\in(a,b)$ pentru care $\frac{f'(c)}{f(c)}=\frac{g'(c)}{g(c)}$.

Șirul lui Rolle(facultativ)

O aplicație importantă a teoremei lui Rolle o reprezintă șirul lui Rolle asociat unei ecuații de forma $f(x)=0$, unde f funcție derivabilă, cu ajutorul căruia se poate determina **numărul rădăcinilor reale ale ecuației** precum și **intervalele în care aceste rădăcini sunt situate.** Următorul rezultat este important în demersul nostru:

Lemă. Fie $f:E\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe un interval E.
Între două rădăcini (zerouri) consecutive ale derivatei f' se află cel mult o rădăcină a ecuației $f(x)=0$.
(Zerourile derivatei separă zerourile funcției)

Demonstrație. Fie $x_1', x_2', x_1'<x_2'$ rădăcini consecutive ale derivatei (deci în intervalul (x_1', x_2') derivata nu se mai anulează). Vom raționa prin reducere la absurd și presupunem că în intervalul (x_1', x_2') ar exista cel puțin două rădăcini (zerouri) c_1, c_2 ale lui $f, f(c_1)=f(c_2)=0$. Pe intervalul $[c_1,c_2]$ se poate aplica funcției f teorema lui Rolle. Deci există cel puțin un punct $c\in(c_1,c_2)$ pentru

care $f'(c)=0$, adică f' se mai anulează în cel puțin un punct $c\in(x_1', x_2')$, în contradicție cu alegerea punctelor x_1', x_2'.
Analog se arată că dacă x_m (respectiv x_M) este cea mai mică (respectiv cea mai mare) rădăcină a lui f' în intervalul E, atunci la stânga lui x_m (respectiv la dreapta lui x_M) există cel mult o rădăcină a lui f. ■

Etapele formării șirului lui Rolle

Etapa întâi. Se precizează intervalul de studiu E al ecuației $f(x)=0$, funcția $f:E\to\mathbb{R}$ fiind presupusă **derivabilă.**

Etapa a doua. Rezolvăm ecuația $f'(x)=0$ și aranjăm în ordine crescătoare rădăcinile reale (din E) ale acestei ecuații: $x_m'<...<x_1'<x_2'<...<x_M'$.

Etapa a treia. Calculăm valorile funcției f în aceste puncte, la care adăugăm limitele lui f, notate α și β, la capetele din stânga și respectiv din dreapta ale intervalului E. Obținem șirul de valori $\alpha, f(x_m'),...,f(x_1'),f(x_2'),...,f(x_m'),\beta$.

Etapa a patra. Șirul lui Rolle este **șirul semnelor acestor valori** (poate figura și valoarea zero).

Etapa a cincea. Se referă la concluziile privind numărul de rădăcini reale ale ecuației și intervalele în care acestea sunt plasate.
Distigem următoarele cazuri:

1) Dacă în șirul lui Rolle apar **două semne alăturate identice**, adică pentru $x_1'<x_2'$ să avem fie $f(x_1'), f(x_2')<0$, fie $f(x_1'), f(x_2')>0$, atunci în intervalul (x_1', x_2') **nu există rădăcini reale ale ecuației** $f(x)=0$. Demonstrația acestei afirmații este imediată. Dacă ar exista cel puțin **două rădăcini** $c_1, c_2\in(x_1', x_2')$ ale funcției, atunci conform teoremei lui Rolle ar exista $c\in(c_1,c_2)\subset(x_1'<x_2')$ astfel încât $f'(c)=0$, contradicție deoarece x_1', x_2' sunt rădăcini consecutive ale lui f'.
Dacă $c\in(x_1', x_2')$ ar fi **o singură** rădăcină a lui f, atunci din $f(x_1')f(x_2')>0$ rezultă că în mod necesar c este un punct de extrem pentru f, ceea ce dă $f'(c)=0$, absurd.

2)Dacă în șirul Rolle apar **două semne alăturate diferite,** de exemplu, $f(x_1')<0$, $f(x_2')>0$, atunci conform lemei și proprietății lui Darboux pe care o au funcțiile continue, există cel mult și respectiv cel puțin o rădăcină în intervalul (x_1', x_2'), adică ecuația $f(x)=0$ **are exact o rădăcină în intervalul** (x_1', x_2').

3) Dacă în şirul lui Rolle apare zero, de exemplu $f(x_k')=0$, atunci x_k' este rădăcină multiplă a ecuaţiei $f(x)=0$, iar în intervalele $(x_{k-1}', x_k'), (x_k', x_{k+1}')$ ecuaţia nu mai are rădăcini.

Concluzie. Numărând **schimbările de semn** şi **zerourile** se determină numărul de rădăcini reale (fără a determina ordinele de multiplicitate ale acestora) ale ecuaţiei considerate şi intervale în care sunt situate aceste rădăcini.

Exerciţii rezolvate

1 . Să se determine numărul de rădăcini reale ale ecuaţiei $3x^4-8x^3-6x^2+24x-10=0$.

R .Vom parcurge etapele prezentate mai sus.

Etapa întâi . Fie $f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x-10$ cu $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (f fiind funcţie polinomială).

Etapa a doua . Ecuaţia $f'(x)=0\Leftrightarrow 12x^3-24x^2-12x+24=0$ are soluţiile $x_1'=-1, x_2'=1, x_3'=2$.

Etapa a treia . Avem $\alpha=\lim\limits_{x\to-\infty}=\infty, f(-1)=-29, f(1)=3, f(2)=-2, \beta=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

Etapa a patra . Şirul lui Rolle este şirul semnelor valorilor de la etapa precedentă: $+,-,+,-,+$.

Etapa a cincea . Pentru a trage concluziile privind numărul de rădăcini reale şi intervalele cărora le aparţin se obişnuieşte să se alcătuiască următorul tabel

x	$-\infty$		-1		1		2		∞
$f(x)$	+		-		+		-		+

În şirul lui Rolle avem patru schimbări de semn, ceea ce înseamnă că ecuaţia are patru rădăcini reale: $x_1<-1, x_2\in(-1,1), x_3\in(1,2), x_4>2$.

Observaţie. Dacă se doreşte restrângerea intervalului $(-\infty,-1)$, atunci se calculează valoarea funcţiei f în puncte x_0 mai mici decât -1. Cum $f(-1)<0$, pentru a avea rădăcină în intervalul $(x_0,-1)$ va trebui să avem $f(x_0)>0$. Dacă luăm, de exmplu, $x_0=-2$, atunci $f(-2)=3>0$ ceea ce înseamnă că rădăcina $x_1\in(-2,-1)$. Dacă dorim să restrângem şi mai mult intervalul atunci calculăm valoarea funcţiei f în puncte $c\in(-2,-1)$. Dacă $f(c)<0$, atunci $x_1\in(c,-1)$, etc.

2 . Să se discute după valorile parametrului real a numărul de rădăcini ale ecuaţiei $x^4-4x^3-2x^2+12x+a=0$.

R . Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x+a$, derivabilă având derivata egală cu: $f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12$.

Ecuaţia $f'(x)=0$ are soluţiile $x_1'=-1, x_2'=1, x_3'=3$ pentru care $f(-1)=a-9, f(1)=a+7$, $f(3)=a-9$.

Să observăm că valorile funcţiei f în punctele în care derivata se anulează depind de parametrul a. Ne interesează semnele acestor valori. În funcţie de diferite valori ale parametrului a, obţinute egalând valorile funcţiei cu zero $a-9=0, a+7=0, a-9=0$ se face discuţia şirului Rolle.

Mai precis întocmim tabelul de mai jos

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
a \ $f(x)$	+	a-9	a+7	a-9	+	CONCLUZII
$a<-7$	+	-	-	-	+	$x_1<-1, x_2>3$
$a=-7$	+	-	0	-	+	$x_1<-1, x_2=x_3=1, x_4>3$
$a\in(-7,9)$	+	-	+	-	+	$x_1<-1, x_2\in(-1,1), x_3\in(1,3), x_4>3$
$a=9$	+	0	+	0	+	$x_1=x_2=-1, x_3=x_4=3$
$a>9$	+	+	+	+	+	nici o rădăcină reală

Exerciţii propuse

1 . Să se determine numărul soluţiilor reale ale ecuaţiilor:

a) $x^3-6x^2+9x-10=0$; b) $x^3+6x^2+9x+12=0$; c) $x_3+3x^2-9=0$;

d) $2x^5-5x^4+10x^3+10x^2-40x+1=0$.

2 . Să se discute, după valorile parametrului parametrului real m , numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiilor:

a) $x^2-2\ln x+m=0$; b) $x^3+3x^2-mx+5=0$; c) $x^3\ln x-x+m=0$; d) $2x^3-9x^2+12x+m=0$;

e) $3x^5-50x^3+135x+m=0$; f) $(m-5)x^3+12x^2-9x+2=0$; g) $x^3-3x^2-9x+m=0$;

h) $\ln x+2x^2-5x+m=0$; i) $x^4-6x^2+mx+24=0$.

3 . Să se arate că polinomul $P_n(x)=x^{n+1}-(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1)$ are o singură rădăcină reală pozitivă pe care o notăm cu a_n. Să se arate că şirul (a_n) are limita $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4* . Să se arate că dacă $x,y,z\in\mathbb{R}, x+y+z=2$ şi $xy+yz+zx=1$, atunci $x,y,z\in\left[0,\frac{4}{3}\right]$.

4. Teorema lui Lagrange

Această teoremă este o generalizare simplă a teoremei lui Rolle în care funcția f nu mai ia obligatoriu valori egale la capetele a, b ale intervalului considerat.
Mai precis are loc următoarea

Teorema (lui Lagrange *).
Fie o funcție $f:[a,b]\to\mathbb{R}, a,b\in\mathbb{R}, a<b$.
Dacă: 1) f **este continuă pe intervalul închis** $[a,b]$;
2) f **este derivabilă pe intervalul deschis** (a,b), atunci există cel puțin un punct c din intervalul deschis (a,b), $c\in(a,b)$ pentru care $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.

Demonstrație. Egalitatea care apare în teoremă se numește **formula lui Lagrange.**
Se consideră funcția $g:[a,b]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)-kx$, unde $k\in\mathbb{R}$. Evident funcția g este continuă pe $[a,b]$ (diferență de funcții continue), este derivabilă pe (a,b) (diferență de funcții derivabile) și $g'(x)=f'(x)-k$.

Se determină numărul real k din cerința $g(a)=g(b)$ când $k=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Acum funcției g i se poate aplica teorema lui Rolle când există $c\in(a,b)$ astfel încât $g'(c)=0$, adică $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ■

Interpretarea geometrică. Scrisă formula lui Lagrange sub forma $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$, această formulă exprimă faptul că există pe graficul funcției f cel puțin un punct $(c,f(c))$, diferit de extremități, în care panta tangentei $(f'(c))$ să fie egală cu panta coardei determinată de punctele $A(a,f(a)), B(b,f(b))$, ceea ce înseamnă că această tangentă este paralelă cu coarda AB (Fig. 25).

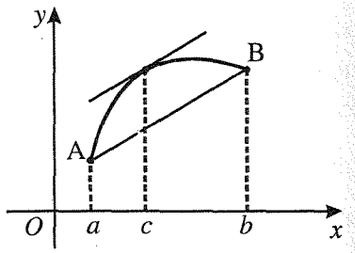


Fig. 25

Interpretarea fizică. Presupunem că x este timpul și $f(x)$ este coordonata unui punct, care se mișcă pe o dreaptă, la momentul x. Expresia $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ reprezintă viteza medie a mișcării punctului în intervalul de timp de la a la b. Formula lui Lagrange arată că există un moment $x=c$ în care viteza instantanee este egală cu viteza medie în intervalul de timp $[a,b]$.

*Lagrange, Joseph Louis (1736-1813) – faimos matematician francez

Exerciții rezolvate

1. Să se aplice teorema lui Lagrange funcției $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{2x-1}{x+5}$.

R. Funcția f este continuă pe $[-1,1]$ (ca funcție elementară – rațională), derivabilă pe $(-1,1)$ (ca funcție elementară). Conform teoremei lui Lagrange există $c\in(-1,1)$ astfel încât

$f(1)-f(-1)=2f'(c)$, unde $f'(x)=\dfrac{11}{(x+5)^2}$. Deci $\dfrac{1}{6}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{22}{(c+5)^2}$, ecuație ce are soluțiile $c_{1,2}=-5\pm2\sqrt{6}$. Cum $c\in(-1,1)$ se reține doar valoarea $c=-5+2\sqrt{6}$.

2. Să se determine abscisa unui punct c în care tangenta la graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{2}, x\le 0\\ \sqrt{x+1}, x>0\end{cases}$, să fie paralelă la coarda care unește punctele de abscise $x_1=-4, x_2=3$.

R. Având în vedere interpretarea geometrică a teoremei lui Lagrange, problema revine la a aplica teorema lui Lagrange funcției f pe $[-4,3]$.

Să remarcăm că f este continuă pe $[-4,0)$ ca funcție rațională și pe $(0,3]$ este compunere de funcții continue. Din $\lim\limits_{x\nearrow 0}f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0}f(x)=f(0)\Leftrightarrow 1=1$ se deduce că f este continuă și $x=0$.

Prin urmare f este continuă pe $[-4,3]$. Funcția f este derivabilă pe $(-4,3)-\{0\}$ (ca funcție elementară și compunere de funcții elementare). Din

$f_s'(0)=f_d'(0)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{\frac{x+2}{2}-1}{x}=$

$=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$, se deduce că f este derivabilă și în $x=0$.

Deci f este derivabilă pe $(-4,3)$.

Aplicând teorema lui Lagrange, există $c\in(-4,3)$ astfel încât $f(3)-f(-4)=7f'(c)$, unde

$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, x\in(-4,0)\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}, x\in(0,3)\end{cases}$ și deci $2+1=7f'(c)$. Este clar că $c\notin(-4,0)$, căci $3\neq\dfrac{7}{2}$.

Atunci $c\in(0,3)$ când formula lui Lagrange se scrie $3=\dfrac{7}{2\sqrt{c+1}}$. De aici $c=\dfrac{13}{36}\in(0,3)$.

3. Să se arate că $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\sin\dfrac{5\pi}{18}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\pi}{36}$.

R. Valoarea $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ provine din $\sin\dfrac{\pi}{4}$ și inegalitatea de demonstrat se aduce la forma:

$0<\sin\frac{5\pi}{18}-\sin\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{36}$, care sugerează considerarea funcției $f:\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{18}\right]\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x$ (continuă pe domeniul de definiție, derivabilă pe $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{18}\right)$) căreia i se aplică formula lui Lagrange. Deci există $c\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{18}\right)$ astfel încât $\sin\frac{5\pi}{18}-\sin\frac{\pi}{4}=\left(\frac{5\pi}{18}-\frac{\pi}{4}\right)\cos c$ sau $\sin\frac{5\pi}{18}-\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{36}\cos c$. Cum $c\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ avem $\cos c\in(0,1)$ și deci inegalitatea dorită are loc.

4. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcției $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}e^x, x\in[-1,0]\\ ax+b, x\in(0,1]\end{cases}$ să i se poată aplica teorema lui Lagrange și să aplice efectiv teorema.

R. Să verificăm cerințele din teoremă.

1)Continuitatea funcției f pe $[-1,1]$. Funcția f este continuă pe $[-1,0)$, $(0,1]$ deoarece este definită prin intermadiul unor funcții elementare, exponențială și respectiv polinomială. Pentru ca f să fie continuă pe $[-1,1]$ impunem ca f să fie continuă și în $x=0$. Avem: f este continuă în $x=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\nearrow 0}f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0}f(x)=f(0)\Leftrightarrow 1=b$.

2)Derivabilitatea funcției f pe $(-1,1)$. Funcția f este derivabilă pe $(-1,1)-\{0\}$, deoarece f este definită cu ajutorul unor funcții elementare.

Ca f să fie derivabilă pe $(-1,1)$, aceasta trebuie să fie derivabilă și în $x=0$ ceea ce conduce la $f_s'(0)=f_d'(0)\in\mathbb{R}$, adică: $\lim\limits_{x\nearrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\nearrow 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\searrow 0}\frac{ax+1-1}{x}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 1=a$.

Deci dacă $a=b=1$, condițiile din teorema lui Lagrange sunt validate și prin urmare există $c\in(-1,1)$ astfel încât $f(1)-f(-1)=2f'(c)$ sau $2-\frac{1}{e}=2f'(c)$. Pe intervalul $(-1,0)$, $f'(c)=e^c$ și deci $2-\frac{1}{e}=2e^c$ conduce la $c=\ln\frac{2e-1}{2e}\in(-1,0)$. Pe intervalul $(0,1)$, $f'(c)=1$ și formula lui Lagrange devine $2-\frac{1}{e}=2$, fals.

5. Folosind teorema lui Lagrange să se determine rădăcinile ecuației $3^x+4^x=2^x+5^x$.

R. Dacă se scrie ecuația sub forma $3^x-2^x=5^x-4^x$, atunci se sugerează considerarea funcției $f(t)=t^x$, căreia i se aplică (!) formula lui Lagrange pe intervalele $[2,3],[4,5]$. Deci există $c_1\in(2,3)$, $c_2\in(4,5)$ astfel încât $3^x-2^x=xc_1^{x-1}$ și respectiv $5^x-4^x=xc_2^{x-1}$. Ecuația se scrie $x\left(c_1^{x-1}-c_2^{x-1}\right)=0$. De aici $x_1=0$ sau $c_1^{x-1}=c_2^{x-1}$ cu soluția $x_2=1$.

Așadar soluțiile ecuației date sunt: $x_1=0, x_2=1$.

6. Aplicând formula lui Lagrange funcției $f(x)=\ln x$ pe intervalul $[n,n+1]$, $n\in\mathbb{N}^*$ să se demostreze că șirul cu termenul general $a_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$ este convergent și limita sa este cuprinsă între 0 și 1.

R. Pe intervalul $[k,k+1], k\in\mathbb{N}^*$, funcția $f(x)=\ln x$ este continuă, iar pe intervalul $(k,k+1)$ este derivabilă. Deci în virtutea teoremei lui Lagrange există $c_k\in(k,k+1)$ astfel încât

$f(k+1)-f(k)=\frac{1}{c_k}$ sau $\ln(k+1)-\ln k=\frac{1}{c_k}$, iar de aici $\frac{1}{k+1}<\ln(k+1)-\ln k=\frac{1}{c_k}<\frac{1}{k}$, deoarece $k<c_k<k+1$.

Punând aici $k=1,2,\ldots,n$ avem inegalitățile

$\frac{1}{2}<\ln 2-\ln 1<1$

$\frac{1}{3}<\ln 3-\ln 2<\frac{1}{2}$

.....

$\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$,

care adunate, membru cu membru, dau

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}<\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$. (1)

Acum $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)+\frac{1}{n+1}<0$, deoarece $\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>e$, care este adevărată. Prin urmare $a_{n+1}<a_n, \forall n\geq 1$, ceea ce arată că șirul (a_n) este strict descrescător. Vom arăta acum mărginirea șirului. Din prima inegalitate din (1) rezultă $a_{n+1}<1$, iar din a doua inegalitate din (1), $a_n>\ln(n+1)-\ln(n)>0$.

Deci $a_n\in(0,1), \forall n$. Conform teoremei lui Weierstrass șirul (a_n) este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c\in[0,1]$, unde $c=0{,}577215\ldots$ se numește constanta lui Euler.

7. Aplicând teorema lui Lagrange să se demonstreze inegalitățile:

a) $e^x>x+1, \forall x>0$; b) $\operatorname{arctg}x>\frac{x}{1+x^2}, \forall x>0$.

R. a) Fie $f:[0,x]\to\mathbb{R}, f(t)=e^t$, căreia i se aplică (se poate) formula lui Lagrange, când avem: $e^x-1=xe^c, c\in(0,x)$. De aici $\left(e^c>1\right)$ rezultă $e^x-1>x$, inegalitatea propusă spre demonstrat.

b) Luăm $f:[0,x]\to\mathbb{R}, f(t)=\operatorname{arctg}t$, căreia i se aplică formula lui Lagrange.

Avem: $\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}0=x\cdot\frac{1}{1+c^2}$, unde $c\in(0,x)$. De aici $\operatorname{arctg}x>\frac{x}{1+x^2}$, deoarece $c>x$.

8. Aplicând teorema lui Lagrange funcției $f:[0,x]\to\mathbb{R}, f(t)=\frac{1}{1+t}$ se obține punctul $c=c(x)$.

Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{c(x)}{x}$.

R. Funcția f îndeplinește condițiile din teorema lui Lagrange pe $[0,x]$.

Deci există $c(x)\in(0,x)$ astfel încât $f(x)-f(0)=xf'(c)$ sau $\frac{1}{x+1}-1=\frac{-x}{(1+c)^2}$ sau $c^2+2c-x=0$ cu soluțiile $c_{1,2}=-1\pm\sqrt{1+x}$. Cum $c\in(0,x)$ se reține $c(x)=-1+\sqrt{1+x}$. Acum $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1+\sqrt{1+x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x}{x\left(-1-\sqrt{1+x}\right)}=\frac{1}{2}$.

9. Să se calculeze, utilizând teorema lui Lagrange, limita $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{\ln n}{n}-\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right)=0$.

$\mathbb{R}$. Se consideră funcția $f:[n,n+1]\to\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}^*, f(t)=\frac{\ln t}{t}$ căreia i se aplică (se poate) teorema lui Lagrange. Deci există $c_n\in(n,n+1)$ astfel încât $f(n+1)-f(n)=f'(c_n)$, unde $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

Limita cerută devine: $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(-\frac{1-\ln c_n}{c_n^2}\right)=-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{c_n}\cdot\frac{1-\ln c_n}{c_n}$.

Din $n<c_n<n+1$ rezultă $\frac{n}{n+1}<\frac{n}{c_n}<1$, ceea ce dă $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{c_n}=1$. De asemenea, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\ln c_n}{c_n}=0$ pentru că $c_n\to\infty$ dacă $n\to\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\ln x}{x}=0$.

Așadar limita de calculat este zero.

Exerciții propuse

1. Care este eroarea care se comite atunci când se înlocuiește $\sqrt{101}$ cu 10 ? Dar $\sqrt[3]{8,001}$ cu $\sqrt[3]{8}$?

2. Utilizând formula lui Lagrange pentru funcția $f:[100,104]\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x}$ să se arate că $\sqrt{104}-10<0,2$.

3. Să se arate că $\sqrt[3]{30}-3<\frac{1}{9}$.

4. a) Să se aplice teorema lui Lagrange pentru funcțiile de mai jos:

1) $f:[0,3]\to\mathbb{R}, f(x)=x^3$; 2) $f:[1,2]\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x$; 3) $f:[1,4]\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x}$;

4) $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{4-x^2}$; 5) $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{3-x^2}{2}, x\in[0,1]\\ \frac{1}{x}, x\in(1,2]\end{cases}$;

6) $f:[-3,3]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1}, x\in(0,3]\\ \frac{x}{2}+1, x\in[-3,0]\end{cases}$.

b) Să se determine parametrii $m,n\in\mathbb{R}$ astfel încât funcției f să i se poată aplica teorema lui Lagrange pe mulțimea de definiție. Să se aplice efectiv teorema.

1) $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2, x\in[0,1]\\ mx-1, x\in(1,2]\end{cases}$; 2) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2+2x+1, x\in[-1,0]\\ m\sin\pi x+n, x\in(0,1]\end{cases}$;

3) $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2+3x+m, x\in[0,1]\\ nx+1, x\in(1,2]\end{cases}$; 4) $f:[1,3]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2x^2+n, x\in[1,2]\\ 2mx^3+11m, x\in(2,3]\end{cases}$;

5) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^4+mx+2, x\in[-1,0)\\ n+\ln(1+x^2), x\in[0,1]\end{cases}$; 6) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}e^x, x\in[-1,0]\\ mx+n, x\in(0,1]\end{cases}$.

5. Să se demonstreze inegalitățile:

1) $|\sin x-\sin y|\le|x-y|, \forall x,y\in\mathbb{R}$; 2) $|\cos x-\cos y|\le|x-y|, \forall x,y\in\mathbb{R}$;

3) $|\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} y|\le|x-y|, \forall x,y\in\mathbb{R}$; 4) $\frac{x-y}{x}<\ln\frac{x}{y}<\frac{x-y}{y}, 0<x<y$ (inegalitatea lui Neper);

5) $\frac{b-a}{\cos^2 a}<\operatorname{tg} b-\operatorname{tg} a<\frac{b-a}{\cos^2 b}, 0\le a<b<\frac{\pi}{2}$; 6) $n(b-a)a^{n-1}<b^n-a^n<n(b-a)b^{n-1}, 0<a<b$.

6. Să se determine abscisa unui punct c în care tangenta la graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x$ să fie paralelă cu coarda care unește punctele de abscise $x_1=-2, x_2=1$.

7. Aplicând teorema lui Lagrange funcției $f(x)=\ln x$ pe intervalul $[k,k+1], k\in\mathbb{N}^*$ să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$.

8. 1) Fie $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(t)=\ln(1+t)$. Aplicând formula lui Lagrange funcției f pe intervalul $[0,x], x>0$ să se arate că $x<(1+x)\ln(1+x), \forall x>0$;

2) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\cos(kx), a_i\in\mathbb{R}, i=\overline{0,n}$. Să se arate că există $c\in(0,1)$ astfel încât $f(c)=a_0+\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\frac{\sin k}{k}$.

9. Aplicând teorema lui Lagrange funcției:

1) $f:[0,x]\to\mathbb{R}, 0<x<1, f(t)=\frac{t}{1-t}$, se obține $c=c(x)$. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to0}c(x)$;

2) $f:[x,x+1]\to\mathbb{R}, x>0, f(t)=\sqrt{1+t}$ se obține $c=c(x)$. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{c(x)}{x}$;

3) $f:[0,x]\to\mathbb{R}, x\in(0,1), f(t)=\frac{t+1}{t-1}$ se obține $c=c(x)$. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to0}\frac{c(x)}{1-\sqrt{x+1}}$.

10. Să se calculeze: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{e^n}{n}-\frac{e^{n+1}}{n+1}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(n+1)(n+1)^{\frac{1}{n+1}}-n\cdot n^{\frac{1}{n}}\right]$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]$.

11. 1) Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este derivabilă și $|f'(x)|\le1, \forall x$, atunci $|f(x_1)-f(x_2)|\le|x_1-x_2|$, $\forall x_1,x_2$. Aplicație. 1) $f(x)=\sin x$; 2) $f(x)=\cos x$.

2) Fie $f:I\to\mathbb{R}$ (I interval mărginit) o funcție derivabilă cu derivata mărginită. Arătați că f este mărginită.

12. Să se rezolve ecuația $3^x+6^x=5^x+4^x$.

13. Să se compare $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}$ cu $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}$. Generalizați.

14. Se consideră șirul $(a_n)_{n\ge1}$ definit prin $a_n+e^{a_n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+1, n\ge1$.

Să se arate că (a_n) este convergent și să se calculeze $\lim\limits_{n} a_n$.

CONSECINȚE ALE TEOREMEI LUI LAGRANGE

Următoarele consecințe ale teoremei lui Lagrange sunt extrem de importante în analiza matematică.

Prima consecință (Funcții cu derivata nulă)

Corolar 1. Dacă o funcție derivabilă are derivata nulă pe un interval, atunci ea este constantă pe acest interval.

Demonstrație. Fie $f:E\to\mathbb{R}$, o funcție derivabilă în punctele din interiorul lui E și continuă pe E, E **interval** și $a\in E$ un element fixat. Dacă $x\in E$ este **arbitrar**, atunci conform teoremei lui **Lagrange** aplicată funcției f pe intervalul $[a,x]$ sau $[x,a]$, există un punct $c\in(a,x)$ sau $c\in(x,a)$ astfel încât $f(x)-f(a)=(x-a)f'(c)$.

Cum $f'(c)=0$, avem $f(x)=f(a),\forall x\in E$, ceea ce arată că f este constantă pe E. ■

Observații. 1) Afirmația reciprocă a corolarului 1 este clară. Dacă o funcție este constantă pe un interval, atunci derivata acesteia este nulă pe interval.

2) Corolarul demonstrat dă un procedeu de lucru prin care să arătăm că o funcție definită **pe un interval este constantă**. Calculăm derivata acesteia și dacă $f'=0$, atunci există o constantă $k\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)=k$. Pentru determinarea constantei se alege o valoare particulară x_0 din interval pentru care $f(x_0)$ **are o formă cât mai simplă**. Alteori dacă intervalul are forma (a,b), atunci pentru determinarea constantei se apelează la calculul $\lim\limits_{x\searrow a} f(x)$ sau $\lim\limits_{x\nearrow b} f(x)$.

Ilustrăm cele spuse aici prin următorul:

Exemplu. Să se arate că funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\arcsin x+\arccos x$ este constantă.

Calculăm derivata funcției și avem: $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0,\forall x\in(-1,1)$.

Cum $f'=0$ pe $(-1,1)$ rezultă $f(x)=k,\forall x\in(-1,1)$. Pentru determinarea lui k, alegem $x=0\in(-1,1)$ și calculăm $f(0)$, $f(0)=\arcsin 0+\arccos 0=\dfrac{\pi}{2}$. Așadar $f(x)=\dfrac{\pi}{2}$, $\forall x\in(-1,1)$. Cum pentru $x=1, f(1)=\arcsin 1+\arccos 1=\dfrac{\pi}{2}$ și pentru $x=-1$ avem de asemenea $f(-1)=\arcsin(-1)+\arccos(-1)=-\dfrac{\pi}{2}+\pi=\dfrac{\pi}{2}$, deducem că $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$, $\forall x\in[-1,1]$, o formulă binecunoscută de la trigonometrie, ce leagă funcțiile trigonometrice inverse arcsin, arccos.

3) Concluzia corolarului nu mai este adevărată dacă f nu este definită pe un interval.

Așa este funcția $f:(0,1)\cup(5,6)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}1, x\in(0,1)\\-1, x\in(5,6)\end{cases}$, pentru care $f'(x)=0,\forall x\in(0,1)\cup(5,6)$, fără ca f să fie funcție constantă.

Totuși dacă f este definită pe o reuniune de intervale și $f'(x)=0$, atunci f **este constantă pe fiecare interval** (așa cum este exemplul de mai sus).

Exerciții rezolvate

1. Să se arate că: $\arcsin\sqrt{1-x^2}+\arccos x=\pi,\forall x\in[-1,0]$.

R. Fie $f:[-1,0]\to\mathbb{R}, f(x)=\arcsin\sqrt{1-x^2}+\arccos x$. Se calculează derivata funcției când se obține $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{-x}{|x|\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0,\forall x\in(-1,0)$, deoarece dacă $x<0$, avem $|x|=-x$.

Așadar $f(x)=k,\forall x\in(-1,0)$. Cum $\lim\limits_{x\searrow -1} f(x)=\pi$, se deduce $k=\pi$.

Să observăm că $f(-1)=f(0)=\pi$. Deci $f(x)=\pi,\forall x\in[-1,0]$.

2. Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ două funcții derivabile cu proprietățile: $f(0)=g(0)$ și $f'\cdot g=f\cdot g'$. Să se arate că $f=g$.

R. Se consideră funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $h'(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Deci $h(x)=c$. Cum $h(0)=1$, deducem $c=1$, adică $f=g$.

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu proprietatea $f(0)=0$, $f'(x)+4f(x)=0,(\forall)x\in\mathbb{R}$. Să se arate că $f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$.

R. Se înmulțește egalitatea dată cu e^{4x} și se poate scrie ca $\left(f(x)e^{4x}\right)'=0,\forall x\in\mathbb{R}$.

De aici $f(x)e^{4x}=k,\forall x\in\mathbb{R}$. Pentru $x=0$ rezultă $k=0$ și deci $f(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Exerciții propuse

1. Să se arate că:

1) $\sin^2 x+\cos^2 x=1,\forall x\in\mathbb{R}$; 2) $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\dfrac{\pi}{2},\forall x\in\mathbb{R}$;

3) $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, x\in(0,1]\\-\dfrac{\pi}{2}, x\in[-1,0)\end{cases}$; 4) $\arcsin x+\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, x\in(0,1]\\-\dfrac{\pi}{2}, x\in[-1,0)\end{cases}$;

5) $\arcsin\left(3x-4x^3\right)-3\arcsin x=0,\forall x\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$.

2. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, astfel încât $|f(x)-f(y)|<M|x-y|^{1+\alpha},\forall x,y\in[a,b],\alpha,M>0$. Să se arate că f este funcția constantă.

3. Fie $f,g:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ două funcții derivabile cu proprietățile: $f(1)=g(1)$ și $f'\cdot g^2=f^2\cdot g'$. Să se arate că $f=g$.

4. Să se determine funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care verifică proprietățile:
a) $f'(x)+3f(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$; b) $f(-1)=e$.

5. Determinantul $\begin{vmatrix} \sin(x+a) & \sin(x+b) & \sin(x+c) \\ \cos(x+a) & \cos(x+b) & \cos(x+c) \\ a & b & c \end{vmatrix}$, $a,b,c\in\mathbb{R}$, nu depinde de x.

A doua consecința (Funcții cu derivate egale)

Corolar 2. Dacă două funcții derivabile **au derivatele egale pe un interval**, atunci ele diferă printr-o constantă pe acel interval.

Demonstrație. Fie $f, g: E\to\mathbb{R}$, derivabile pe interiorul lui E și continue pe E, E fiind **interval** cu $f'(x)=g'(x), \forall x\in E$.

Această condiție scrisă sub forma $(f-g)'(x)=0, \forall x\in E$ arată că se poate aplica corolarul 1. Deci există o constantă $k\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)-g(x)=k$, $\forall x\in E$, altfel spus, cele două funcții diferă printr-o constantă **pe intervalul** E. ■

Observații . 1). Cerința ca E să **fie interval este esențială**.
Următorul exemplu ilustrează acest fapt.

Fie $f, g:(-1,1)\cup(3,4)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}1, x\in(-1,1)\\ -1, x\in(3,4)\end{cases}$, $g(x)=1, \forall x\in E$.

Evident $f'(x)=g'(x), \forall x\in E$, fără ca $f(x)-g(x)=\begin{cases}0, x\in(-1,1)\\ -2, x\in(3,4)\end{cases}$ să fie o constantă. Dar $f-g$ este constantă pe fiecare interval $(-1,1),(3,4)$ egală cu 0 și repespectiv -2. Deci $f-g$ diferă **prin câte o constantă** pe fiecare interval.

2). În determinarea constantei se procedează așa cum am indicat în observația **2)** de la consecința întâi.

3).Formulele de la trigonometrie pot fi demonstrate utilizând această consecință. Spre exemplu să arătăm că $\sin 2x=2\sin x\cos x, \forall x\in\mathbb{R}$.

Se consideră funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin 2x, g(x)=2\sin x\cos x$ pentru care $f'(x)=2\cos 2x$ și $g'(x)=2\left[\cos^2 x-\sin^2 x\right]=2\cos 2x$.

Deci $f'(x)=g'(x), \forall x\in\mathbb{R}$. Așadar există $k\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)-g(x)=k, \forall x\in\mathbb{R}$. Luăm $x=0$ când $f(0)-g(0)=0$. Așadar $k=0$ și formula este stabilită.

Exerciții rezolvate

1. Să se determine funcția derivabilă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietățile $f'(x)=x^2-3x+5$ și $f(0)=1$.

R. Se constată că derivata funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+5x$ este $g'(x)=f'(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

Deci există $k\in\mathbb{R}$, o constantă astfel încât $f(x)-g(x)=k$. Pentru $x=0$ avem $f(0)=g(0)+k=1$, sau $k=1$. Așadar funcția căutată este $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+5x+1$.

2. Să se arate că funcțiile $f(x)=\operatorname{arctg} x, g(x)=\operatorname{arctg}\frac{x+2}{1-2x}, x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ diferă printr-o constantă pe fiecare din intervalele $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\infty\right)$.

R. Se calculează derivatele funcțiilor și avem: $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}, g'(x)=\frac{\left(\frac{x+2}{1-2x}\right)'}{1+\left(\frac{x+2}{1-2x}\right)^2}=\frac{1}{1+x^2}$.

Deci $f'=g'$ pe $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\infty\right)$, ceea ce înseamnă că există $k_1,k_2\in\mathbb{R}$ astfel încât

$$f(x)-g(x)=\begin{cases}k_1, x<\frac{1}{2}\\ k_2, x>\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Pentru determinarea constantelor k_1,k_2 particularizăm pe x în fiecare interval. Avem pentru $x=0, f(0)-g(0)=-\operatorname{arctg} 2=k_1$, iar pentru $x=1, f(1)-g(1)=\frac{\pi}{4}+\operatorname{arctg} 3=k_2$.

Exerciții propuse

1. Să se determine funcțiile derivabile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietățile:
1) $f'(x)=x+1, f(0)=0$; 2) $f'(x)=4x^3, f(1)=1$; 3) $f'(x)=x^2+1, f(0)=1$.

2. Să se determine funcțiile de două ori derivabile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, cu proprietățile:
1) $f''(x)=1, f(0)=f'(0)=1$; 2) $f''(x)=x+1, f(0)=0, f(1)=1$;
3) $f''(x)=2x-6, f(0)=1, f'(1)=0$.

3. Să se arate că funcțiile $f(x)=\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2(1+x^2)}}, g(x)=\operatorname{arctg} x, x>-1$, diferă printr-o constantă pe intervalul $(-1,\infty)$ și să se determine această constantă.

4. Să se demonstreze egalitățile:

1) $\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}=\begin{cases}2\operatorname{arctg} x, x>0\\ -2\operatorname{arctg} x, x<0\end{cases}$; 2) $\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1}=\begin{cases}-\frac{3\pi}{4}, x<-1\\ \frac{\pi}{4}, x>-1\end{cases}$;

3) $\arcsin\sqrt{1-x^2}=\pi-\arccos x, \forall x\in(-1,0)$; 4) $2\operatorname{arctg} x=\pi-\arcsin\frac{2x}{1+x^2}, \forall x\geq 1$;

5) $\arcsin 2x\sqrt{1-x^2}=2\arcsin x, \forall x\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

6) $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \arcsin\sqrt{\frac{x+1}{x}}, \forall x \in (-1,1)$.

A treia consecință (Rolul derivatei întâi. Intervale de monotonie. Puncte de extrem)

1.Intervale de monotonie

Un alt rezultat important pentru o funcție derivabilă **pe un interval** este furnizat de semnul derivatei. Acesta va fi utilizat pentru determinarea intervalelor de monotonie. Mai precis are loc următorul:

Corolar 3. Fie $f: E \to \mathbb{R}$, E **interval**, o funcție derivabilă.

1) Dacă $f'(x) \geq 0, \forall x \in E$, atunci f este **crescătoare** pe E;

2) Dacă $f'(x) \leq 0, \forall x \in E$, atunci f este **descrescătoare** pe E;

sau

1') Dacă $f'(x) > 0, \forall x \in E$, atunci f este **strict crescătoare** pe E;

2') Dacă $f'(x) < 0, \forall x \in E$, atunci f este **strict descrescătoare** pe E.

Demonstrație. **1)** Fie $x_1, x_2 \in E, x_1 < x_2$ și $f'(x) \geq 0, \forall x \in E$. Se aplică teorema lui Lagrange pe intervalul $[x_1, x_2]$. Prin urmare există $c \in (x_1, x_2)$ astfel încât $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c) \geq 0$, ceea ce arată că $f(x_1) \leq f(x_2)$. Așadar din $x_1 < x_2, x_1, x_2 \in E$ rezultă $f(x_1) \leq f(x_2)$, ceea ce demonstrează că f este crescătoare pe E. Acum este clar că dacă $f' > 0$, atunci am fi obținut $f(x_1) < f(x_2)$, ceea ce conduce la f strict crescătoare pe E, adică **1')**.Analog dacă $f'(x) \leq 0, \forall x \in E$ se obține că $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c) \leq 0$, adică $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Deci pentru $x_1 < x_2, x_1, x_2 \in E$ rezultă $f(x_1) \geq f(x_2)$, ceea ce înseamnă că f este descrescătoare pe E. Dacă $f'(x) < 0, \forall x \in E$, atunci găsim $f(x_1) > f(x_2)$ și prin urmare f este strict descrescătoare pe E. ■

Observații. **1)** Pentru a marca monotonia unei funcții utilizând semnul derivatei se utilizează tabele ca mai jos:

x	E
$f'(x)$	+ + +
$f(x)$	↗

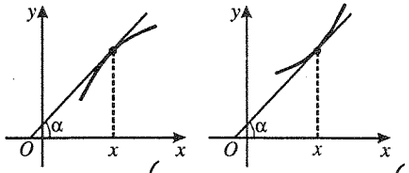


Fig.26 $\left(f'(x) = \operatorname{tg}\alpha > 0 \Rightarrow \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$

unde în linia corespunzătoare lui f am indicat printr-o săgeată orientată în sus

(↗) faptul că f este **(strict) crescătoare** pe E sau o săgeată orientată în jos (↘) pentru a marca faptul că f este **(strict) descrescătoare** pe E. Avem $\operatorname{tg}\alpha = f'(x) > 0 \Rightarrow \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (Fig.26), iar $\operatorname{tg}\alpha = f'(x) < 0 \Rightarrow \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ (Fig.27).

x	E
$f'(x)$	− − −
$f(x)$	↘

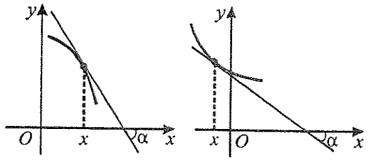


Fig.27 $\left(f'(x) = \operatorname{tg}\alpha < 0 \Rightarrow \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)\right)$

2) Pentru a determina intervalele de monotonie ale unei funcții derivabile $f: E \to \mathbb{R}$, E nu neapărat interval din $\mathbb{R}$ se procedează astfel:

a) se calculează derivata f' a funcției f;

b) se rezolvă (în $\mathbb{R}$) ecuația $f'(x) = 0, x \in E$;

c) se determină intervalele în care f' păstrează același semn;

d) se ține seama de corolarul 3) și se stabilesc intervalele de monotonie.

În concluzie, prima derivată dă informații despre comportarea curbei (Fig.28):

1) $f'(x) > 0$ în A și funcția **este strict crescătoare**;

2) $f'(x) < 0$ în C și funcția **este strict descrescătoare**;

3) $f'(x) = 0$ în B și D, numite **puncte staționare** (B **este punct de maxim local**, iar D **este punct de minim local**);

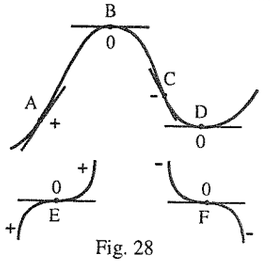


Fig. 28

4) punctele E, F sunt, de asemenea, **puncte staționare** pentru care în jurul lor $f'(x) > 0$ și respectiv $f'(x) < 0$ (E, F sunt puncte de inflexiune).

Exerciții rezolvate

1.Să se precizeze intervalele de monotonie pentru următoarele funcții:

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^4 - 8x^2$; 2) $f: \mathbb{R} - \{-2, 1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+3}{x^2+x-2}$;

3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$.

R. **Aplicăm schema indicată urmărind etapele de parcurs.**

1) a) **Calculul derivatei** Avem $(E = \mathbb{R}): f'(x) = 4x^3 - 16x$;

b) **Rezolvarea în $\mathbb{R}$ a ecuației** $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 16x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 2$.

c) Se întocmește tabelul de semn al derivatei, ca mai jos:

x	$-\infty$		-2		0		2		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	-16	$\nearrow$	0	$\searrow$	-16	$\nearrow$	∞

Pe fiecare interval $(-\infty,-2),(-2,0),(0,2),(2,\infty)$ funcția f' este continuă și nu se anulează, prin urmare păstrează același semn, pe un interval dat. Este de ajuns, de exemplu, pentru a vedea semnul lui f' pe $(-\infty,-2)$ să calculăm f' într-un punct oarecare din acest interval (de obicei se alege punctul încât calculul lui f' să fie cât mai simplu; alteori se recurge la calculul limitei $\lim\limits_{x\nearrow -2} f'(x)$ pentru a vedea semnul la stânga lui $x=-2$, care se va păstra pe tot intervalul $(-\infty,-2)$. Să luăm $x=-3$ pentru care $f'(-3)=4(-3)^3-16(-3)=-60<0$. Deci $f'(x)<0, \forall x\in(-\infty,-2)$.
Dacă $x=-2$ este rădăcină simplă pentru f', (cum este cazul de față) iar f' este continuă (cum este cazul de față), atunci pe următorul interval semnul alternează. Altfel luăm un punct $x_0\in(-2,0)$ și vedem care este semnul lui $f'(x_0)$, care se păstrează pe tot intervalul $(-2,0)$.
Așadar pe intervalele $(-\infty,-2],[0,2]$ funcția f este strict descrescătoare, iar pe intervalele $[-2,0],[2,\infty)$ funcția f este strict crescătoare.

2) Avem pentru derivata lui f expresia $f'(x)=-\dfrac{x^2+6x+5}{\left(x^2+x-2\right)^2}$.

Ecuația $f'(x)=0$, conduce la rezolvarea ecuației $x^2+6x+5=0$, cu soluțiile $x_1=-1, x_2=-5$ (care aparțin domeniului de definiție).
Se face tabelul de semn al derivatei

x	$-\infty$		-5		-2		-1		1		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	$\frac{-1}{9}$	$\nearrow$		$\nearrow$	-1	$\searrow$		$\searrow$	

Deci pe intervalele $(-\infty,-5],[-1,1),(1,\infty)$ funcția f este strict descrescătoare, iar pe intervalele $[-5,-2),(-2,-1]$ funcția f este strict crescătoare.

3) Calculul derivatei dă $f'(x)=\dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+5}}$. Soluțiile ecuației $f'(x)=0$ sunt date de $2x-3=0$, când găsim $x=\dfrac{3}{2}$. Tabelul de semn al derivatei este

x	$-\infty$			$\frac{3}{2}$			∞
$f'(x)$		$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$f(x)$		$\searrow$			$\nearrow$		

Deci pe $\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right]$ funcția f este strict descrescătoare, iar pe $\left[\dfrac{3}{2},\infty\right)$ funcția f este strict crescătoare.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x^3+3mx^2+12x+6, m\in\mathbb{R}$.
Să se determine m astfel încât f să aibă aceeași monotonie pe $\mathbb{R}$.
R. Derivata funcției este $f'(x)=6x^2+6mx+12$.
Cum coeficientul trinomului de gradul doi pentru x^2 este $6>0$, putem vorbi de $f'(x)\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Inegalitatea are loc dacă $\Delta\leq 0$, ceea ce dă $m\in\left[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right]$.

Exerciții propuse

1. Să se stabilească intervalele de monotonie pentru funcțiile următoare:
1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^3+3x$; 2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^3+x^2$;
3) $f:\mathbb{R}-\{\pm1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-1}$; 4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$;
5) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=x\sqrt{1-x^2}$; 6) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2e^x$;
7) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=(x+1)\ln x$; 8) $f:\mathbb{R}-\left\{(-1)^k\dfrac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$;
9) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-\sin x$; 10) $f:\mathbb{R}-[-1,0]\to\mathbb{R}, f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\ln\left(1+x^2\right)-mx, m\in\mathbb{R}$. Să se determine m pentru care funcția f este monoton crescătoare pe $\mathbb{R}$.

3. 1) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{me^x-(1+m)e^{-x}}{1+e^x}$. Să se determine m astfel încât f să fie monoton descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

2) Pentru $m\in\mathbb{R}^*$ studiați monotonia funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{e^{mx}}{x^2+m^2}$.

2. Puncte de extrem local pentru o funcție

Utilizând monotonia unei funcții, putem stabili punctele de minim sau maxim local pentru o **funcție derivabilă**. Un punct x_0 din **interiorul domeniului** de definiție E este punct de minim local dacă avem situația marcată în tabelul de mai jos:

x			x_0			
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$f(x_0)$		$\nearrow$	

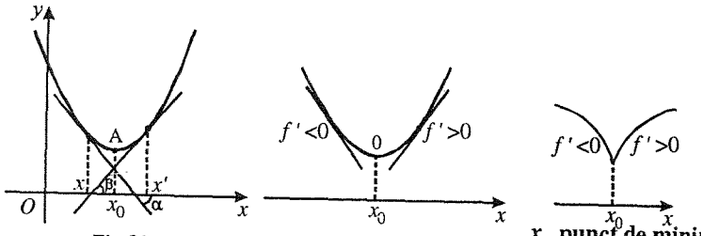


Fig.29

x_0 punct de minim, $f'(x_0)=0$ $\not\Rightarrow f'(x_0)$

x_0 punct de minim,

Punctul $A(x_0, f(x_0))$ (Fig.29) este **punct de minim local** pentru graficul funcției dacă într-o vecinătate a lui A, panta tangentei la grafic se schimbă de la valori negative, prin zero la valori pozitive, când ne deplasăm de-a lungul curbei în direcția pozitivă a axei Ox.

Punctul x_0 din interiorul domeniului de definiție E este punct de maxim local dacă avem situația de mai jos din tabel:

x			x_0			
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$f(x)$	↗			$f(x_0)$		↘	

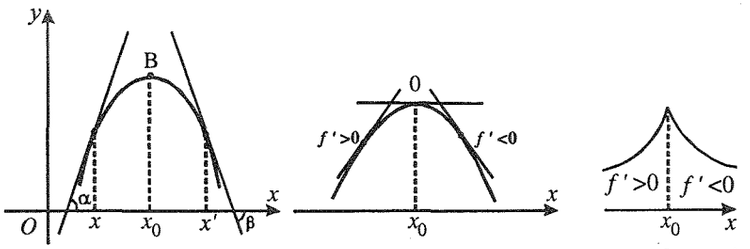


Fig.30

x_0 **punct de maxim,** $f'(x_0)=0$ $\quad \nexists f'(x_0)$

Punctul $B(x_0, f(x_0))$ (Fig.30) este **punct de maxim local** pentru graficul funcției dacă într-o vecinătate a lui B, panta tangentei la grafic se schimbă de la valori pozitive, prin zero la valori negative, când ne deplasăm de-a lungul curbei în direcția pozitivă a axei Ox.

Să observăm că în ambele cazuri există o vecinătate V a lui x_0 în care are loc inegalitatea $f(x)\geq f(x_0)$ sau $f(x)\leq f(x_0), \forall x\in V$.

Să știm deci că eventualele puncte de extrem local sunt soluții ale ecuației $f'(x)=0$, pentru o **funcție derivabilă** f, pentru care are loc una din situațiile indicate în tabelele de mai sus. Să reținem însă că absența punctelor critice (soluții ale ecuației $f'(x)=0$) nu înseamnă inexistența valorilor minimale sau maximale.

Spre exemplu, pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} -x, x<0 \\ x^2e^{-x}, x\geq 0 \end{cases}$ avem tabelul:

x	$-\infty$				0		2		∞
$f'(x)$	-	-	-	-1	0	+	0	-	
$f(x)$	↘				0	↗	$\frac{4}{e}$	↘	

Punctul $x=0$ este punct de minim, fără ca f să fie derivabilă în $x=0$, $f_s'(0)=-1, f'_d(0)=0$.

Am văzut că o funcție continuă, de exemplu, pe $[a,b]$ este mărginită și își atinge marginile pe compactul $[a,b]$. Este posibil ca aceste valori extreme să se realizeze în $x=a, x=b$.

Pentru a găsi $\max\limits_{a\leq x\leq b} f(x), \min\limits_{a\leq x\leq b} f(x)$ **se compară valorile funcției** în $x=a, x=b$, **în punctele critice** (soluțiile ecuației $f'(x)=0$) **precum și în punctele unghiulare și de întoarcere.**

Exerciții rezolvate

1. Reluăm una din problemele prezentate mai sus pentru a stabili natura punctelor de extrem, precum și valoarea extremelor.

1) Pentru funcția $f(x)=x^4-8x^2$, avem tabelul:

x	$-\infty$		-2		0		2		∞
$f'(x)$	-		0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	∞	↘	-16 (m)	↗	0 (M)	↘	-16 (m)	↗	∞

De aici constatăm că $x_1=-2, x_2=2$ reprezintă puncte de minim când $f(-2)=f(2)=-16$ este valoarea minimă. Valoarea -16 reprezintă valoarea minimă absolută sau globală a funcției f. Punctul $x=0$ este un punct de maxim pentru f, iar valoarea maximă locală este $f(0)=0$. Aceasta nu este o valoare maximă globală deoarece există $x=3$, de exemplu, pentru care $f(3)=9>0$.

De obicei sub valorile minime locale se pune litera m, iar sub valorile maxime locale se pune litera M între paranteze.

2. Să se determine cel mai mare termen al șirului $a_n=-\frac{n^4}{4}+27n+7$.

R. Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=-\frac{x^4}{4}+27x+7$, cu $f'(x)=-x^3+27$. Cum $x=3$ este soluție a ecuației $f'(x)=0$ avem $f'(x)>0$ dacă $x<3$ și $f'(x)<0$ dacă $x>3$, ceea ce arată că $x=3$ este punct de maxim pentru f. Deci $f(1)<f(2)<f(3)>f(4)>f(5)>\ldots$ sau $a_1<a_2<a_3>a_4>\ldots$

Deci cel mai mare termen al șirului este $a_3=\frac{271}{4}$.

3. Să se determine $\max\limits_{-4\leq x\leq 4} f(x)$ și $\min\limits_{-4\leq x\leq 4} f(x)$, dacă $f(x)=x^3+3x^2-9x+5$.

R. Funcția f fiind derivabilă avem $f'(x)=3x^2+6x-9$ și $f'(x)=0$ dă $x_1=-3, x_2=1$ puncte situate în $(-4,4)$. Deci trebuie comparate valorile funcției în punctele $x_0=-4, x_1=-3, x_2=1$ și $x_3=4$. Avem: $f(-4)=25, f(-3)=32, f(1)=0$ și $f(4)=81$.

De aici $\max_{-4\le x\le 4} f(x)=81=f(4)$, $\min_{-4\le x\le 4} f(x)=0=f(1)$.

Exerciții propuse

1 .Să se stabilească punctele de extrem și natura acestora pentru funcțiile de mai jos:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x^3-6x^2-18x+7$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x^3+3x^2-12x+5$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{2x}{x^2+9}$; d) $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left(x^2-x\right)e^x$; f) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$;

g) $f:(0,\infty)-\left\{\dfrac{1}{e}\right\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\ln x}{1+\ln x}$; h) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-2\operatorname{arctg} x$;

i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+\sin 2x$; j) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=xe^{x-x^2}$;

k) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$; l) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x-\dfrac{\pi x^2}{8}-\dfrac{x-1}{2}$.

2. Să se determine cea mai mare și cea mai mică valoare pentru funcțiile:

a) $f:[1,6]\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x}{8}+\dfrac{2}{x}$; b) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=x^5-x^3+x+2$;

c) $f:[-2,3]\to\mathbb{R}, f(x)=\left|3x^4-16x^3+24x^2-43\right|$; d) $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=\cos^2\dfrac{x}{2}\sin x$;

e) $f:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{2}\cos 2x+\sin x$; f) $f:[-2,0]\to\mathbb{R}, f(x)=\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$;

g) $f:\left[\dfrac{1}{2},4\right]\to\mathbb{R}, f(x)=\left|x^2+2x-3\right|+\dfrac{3}{2}\ln x$; h) $f:[0,10]\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x(10-x)}$;

i) $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$; j) $f:\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}, f(x)=\sin 2x-x$.

3. O persoană dorește să-și construiască lipit de casă încă o cameră în formă dreptunghiulară cu suprafața de 18 m^2. Dorind să consume cât mai puține cărămizi în construcția ei, se întreabă cum să procedeze. Va ști el cum să-și dimensioneze noua cameră ? Ajutați-l !

4. O persoană și-a construit în curte un bazin în formă dreptunghiulară de arie 24 m^2, iar în jurul bazinului alei cu lățimea de 1,5 m, pe laturile cele mai lungi ale bazinului și respectiv 1 m lățime, pe laturile mai scurte ale bazinului. Determinați aria pe care o ocupă bazinul și aleile lui. Care sunt dimensiunile bazinului care fac minimă această arie ?

5. Legea de mișcare a unei particule în planul tOs este dată de formula $s(t)=t^3-9t^2+24t+6$, $t\ge 0$. Ce reprezintă $s'(t), t\ge 0$. Reprezentați grafic în același reper cartezian tOs funcțiile $s(t)$ și $s'(t)$. Determinați $s''(t)$. Care este semnificația pentru $s''(t)$. Reprezentați $s(t)$ pe o axă orizontală. Ce se întâmplă cu particula la momentele $t=2, t=4$? Dar pentru $t>4$?

6.(Funcția profit și punctul de profit maxim) . O fabrică știe că dacă într-o săptămână sunt cerute x (în sute) bucăți dintr-un produs, atunci funcția cost total (în mii €) este $C(x)=3x+14$, iar funcția venit total (în mii €) este $V(x)=19x-2x^2$. Determinați nivelul cererii care maximizează profitul ($P(x)=V(x)-C(x)$).

7. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left(x^2+4x+m\right)e^x, m\in\mathbb{R}$. Să se determine parametrul m astfel încât funcția f să aibă puncte de extrem.

8. Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=a^x-(a-1)x, a>0, a\ne 1$. Dacă $m(a)$ este valoarea minimă a lui f să se calculeze $\lim_{a\to 0} m(a)$.

9. Să se determine cel mai mic termen al șirului (a_n) cu $a_n=n^2-\dfrac{14}{3}n$.

10. Fie $a,b\ge e$ pentru care $a^x+b^x\ge x^a+x^b, \forall x>0$. Atunci $a=b=e$.

11. Să se determine funcția polinomială de grad minim care are un maxim egal cu 6 pentru $x=1$ și un minim egal cu 2 pentru $x=3$.

12. Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left(x^2+mx\right)e^{-x}, m\in\mathbb{R}$ are două puncte de extrem, $\forall m$. Dacă x_1, x_2 sunt abscisele acestor puncte, atunci $e^{x_1}f(x_1)+e^{x_2}f(x_2)$ este independent de m.

3.Demonstrarea unor inegalități cu ajutorul derivatelor

Utilizând corolarul 3, se pot demonstra elegant o serie de inegalități. De fapt o inegalitate de forma $f(x)\ge 0$ pentru $x\ge x_0$ sugerează utilizarea monotoniei funcției pentru rezolvare. La monotonie avem relații de tipul $f(x)\ge f(x_0)$ sau $f(x)\le f(x_0)$ pentru $x\ge x_0$. Se disting cel puțin trei tehnici de lucru pentru a proba o inegalitate de forma $f(x)\ge 0, \forall x\ge x_0$.

1) Dacă f este (strict) crescătoare și $f(x_0)=0$, atunci din $x\ge x_0$ rezultă $f(x)\ge f(x_0)=0$. Sub formă de tabel avem:

x	x_0					$+\infty$
$f'(x)$		+	+	+	+	+
$f(x)$	0	↗				

2) Dacă f are un minim global $x_m\in(x_0,\infty)$ pentru care $f(x_m)=0$, atunci evident $f(x)\ge f(x_m)=0, \forall x\ge x_0$.

3) Dacă f este descrescătoare pe $[x_0,\infty)$ și $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ ($+\infty$ este un punct de acumulare pentru $[x_0,\infty)$), atunci avem $f(x)\ge 0, \forall x\ge x_0$.

Tabelul arată sub forma :

x	x_0					$+\infty$
$f'(x)$		-	-	-	-	-
$f(x)$					↘	0

Observații analoge se pot face pentru inegalități valabile pe $(-\infty, x_0]$ sau pe intervale de forma $[a,b]$, (a,b) etc.

Ilustrăm aceste observații prin :

Exerciții rezolvate

1. Să se demonstreze inegalitățile :

1) $2x^3+3x^2-12x+7>0, \forall x>1$; 2) $\frac{x}{e}\geq \ln x, \forall x>0,$ și să se arate că $\pi^e<e^\pi$;

3) $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}, \forall x>0$.

R. 1) Se consideră funcția $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2x^3+3x^2-12x+7$ pentru care

$f'(x)=6x^2+6x-12=6\left(x^2+x-2\right)$.

Ecuația $f'(x)=0$ are soluțiile $x_1=-2, x_2=1,$ care nu aparțin intervalului $(1,\infty)$. Tabelul pentru semnul derivatei și monotonia funcției este redat în continuare :

x	1					$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		↗				

Să remarcăm că f este strict crescătoare pe $(1,\infty)$, iar $f(1)=0$. Deci din $x>1$ se obține $f(x)>f(1)=0$, adică exact inegalitatea propusă spre demonstrat.

2) Luăm funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{e}-\ln x$. Derivata funcției este $f'(x)=\frac{1}{e}-\frac{1}{x}=\frac{x-e}{ex}$.

În acest caz tabelul are structura:

x	0			e			$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$	$-\ 0$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		↘		0		↗	

Din tabel se observă că $x=e$ este punct de minim global când $f(e)=0$. Prin urmare $\forall x>0, f(x)\geq f(e)=0$, adică exact inegalitatea propusă spre demonstrat.

Inegalitatea, în cazul particular, se scrie echivalent (prin logaritmare în baza e) : $e\ln\pi<\pi$ sau $\frac{\pi}{e}-\ln\pi>0$, adică $f(\pi)>f(e)$ ceea ce-i adevărat deoarece $\pi>e$ și f este strict crescătoare pe $[e,\infty)$.

3) Considerăm funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Trebuie să arătăm că $f(x)<0, \forall x>0$. Din nou dorim să studiem monotonia funcției. Pentru aceasta calculăm f'.

Avem $f'(x)=\frac{2x+1-2\sqrt{x^2+x}}{2x(1+1)\sqrt{x^2+x}}$.

Semnul lui f' este dat de semnul numărătorului, deoarece pentru $x>0$, numitorul este pozitiv.

Pentru a afla semnul numărătorului se rezolvă ecuația $2x+1-2\sqrt{x^2+x}=0$. Se constată ușor că este

o ecuație imposibilă. Prin urmare pe intervalul $(0,\infty)$ numărătorul are același semn.

Tabelul are structura de mai jos :

x	0					$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$					↗	0

Deci f este strict crescătoare pe $(0,\infty)$. Este suficient să observăm că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, ceea ce-I imediat. Deci inegalitatea este stabilită.

2. Să se demonstreze inegalitatea: $e^x<(1+x)^{1+x}, \forall x>0$.

R. Pentru ușurința demonstrației (în acest caz atât baza cât și exponentul conțin variabila x) se preferă scrierea echivalentă a inegalității în urma logaritmării în baza e, astfel:

$x<(1+x)\ln(1+x), \forall x>0$ sau $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x), \forall x>0$.

Fie acum funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)$ pentru care

$f'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}=-\frac{x}{(1+x)^2}$.

Tabelul cu semnul derivatei și monotonia funcției arată ca mai jos:

x	0					$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	0					↘

În acest caz funcția f este strict descrescătoare. Din faptul că $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=0$ rezultă $f(x)<0, \forall x$, adică inegalitatea dorită.

3. Să se arate că funcția $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\log_x(x+1)$ este strict descrescătoare și apoi să se probeze inegalitatea $\log_2 3>\log_4 5$.

R. Scriem funcția f sub forma $f(x)=\frac{\ln(x+1)}{\ln x}$ pentru care derivata este

$f'(x)=\frac{x\ln x-(x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2 x}$. Numitorul lui f' este strict pozitiv pentru orice $x>1$.

Rămâne să studiem semnul numărătorului. Aici se poate considera funcția $g:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=x\ln x$ și atunci numărătorul este $g(x)-g(x+1)$. Dacă știm monotonia lui g, atunci din $x<x+1$ deducem semnul diferenței $g(x)-g(x+1)$. Avem $g'(x)=\ln x+1$. Cum pentru $x>1$ rezultă $g'(x)>0$, deducem că g este o funcție strict crescătoare. Prin urmare $g(x)<g(x+1), \forall x>1$. Așadar numărătorul lui f' este negativ. În final $f'(x)<0, \forall x>1$, ceea ce demonstrează că f este strict descrescătoare pe $(1,\infty)$.

Pentru a demonstra inegalitatea să observăm că ea se traduce cu ajutorul lui f prin $f(2)>f(4)$, care este adevărată deoarece $2<4$ și f este strict descrescătoare.

4. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x^5+7x^3+2x+1$ f este bijectivă.

R. Prezentăm aici o cale simplă, utilizând tabelul cu semnul derivatei și monotonia funcției, de a

proba că o funcție este bijectivă.

Avem : $f'(x)=15x^4+21x^2+2>0, \forall x\in\mathbb{R}$. Tabelul arată astfel :

x	$-\infty$					$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$					$+\infty$

Din faptul că $f'(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$ rezultă că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. Se știe că orice funcție strict monotonă pe domeniul de definiție este injectivă.

Din f continuă, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ rezultă $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, ceea ce arată că f este surjecție.

Ultima linie a tabelului dă informațiile din care se deduce injecția și surjecția funcției. Deci f este bijecție.

Exerciții propuse

1.Să se demonstreze inegalitățile :

1) $\frac{2}{2x+1}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right), \forall x>0$; 2) $x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)<a, a>0, \forall x>0$;

3) $\ln(n+1)>\frac{1}{ne}+\ln n, n\in\mathbb{N}^*$; 4) $\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)<\frac{1}{x}+\ln x, \forall x>0$;

2.Să se demonstreze inegalitățile :

1) $e^x\geq x+1, \forall x\in\mathbb{R}$; 2) $e^x\geq ex, \forall x>0$; 3) $\frac{x}{1+x}\leq\ln(1+x), \forall x>-1$;

4) $\frac{x}{1+x^2}-\frac{x^2}{2}\leq \operatorname{arctg} x, \forall x\in\mathbb{R}$; 5) $\ln x\leq x-1, \forall x>0$;

6) $\cos x\geq 1-\frac{x^2}{2}, \forall x\in\mathbb{R}$; 7) $\left(\frac{x+1}{2}\right)^{x+1}\leq x^x, \forall x>0$.

3.Să se demonstreze inegalitățile :

1) $a^{1+\frac{x}{a}}-a-x>0, \forall x>0, a\geq e$; 2) $n^{\sqrt{n+1}}>(n+1)^{\sqrt{n}}, \forall n\geq 9$; 3) $x(2+\cos x)>3\sin x, x>0$;

4) $\cos x<\frac{\sin^2 x}{x^2}, 0<x<\frac{\pi}{2}$; 5) $\left(x+\frac{1}{x}\right)\operatorname{arctg} x>1, \forall x>0$; 6) $\ln(1+x)<\frac{x}{\sqrt{1+x}}, \forall x>0$.

4.Să se demonstreze inegalitățile :

1) $x^4+8x+12x^2\ln x-8x^3-1>0, \forall x>1$; 2) $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\leq\sqrt{1+x}, \forall x\geq 0$;

3) $\ln n<m\sqrt[m]{n}, m, n\in\mathbb{N}^*$; 4) $\frac{1}{3}tg\, x+\frac{2}{3}\sin x>x, 0<x<\frac{\pi}{2}$; 5) $\ln(1+x^2)<x\, arctg\, x<x^2, \forall x>0$;

6) $e^x-1-x<x^2e^x, \forall x>0$; 7) $(e+x)^{e-x}>(e-x)^{e+x}, \forall x\in(0,e)$;

8) $x+\frac{x^3}{6}\leq\arcsin x, x\in[0,1)$.

5.Să se arate că următoarele funcții sunt bijective :

1) $f:(0,\infty)\to(1,\infty), f(x)=x^4+x^2+x+1$; 2) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+\ln x$;

3) $f:(0,\infty)\to(1,\infty), f(x)=e^x+x^2+x$; 4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x+xe$;

5) $f:[e,\infty)\to[0,\infty), f(x)=x\ln x-x$; 6) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+\sin x$;

7) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+3x$; 8) $f:[1,\infty)\to(0,1], f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$;

9) $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^3}{(1+x)^2}$.

6. Fie $a>0$. Să se arate că dacă $a^x\geq x^a, \forall x>0$, atunci $a=e$.

7. Să se determine a astfel încât $\frac{ax}{1+x^2}\leq \operatorname{arctg} x+\frac{x^2}{2}, \forall x\in\mathbb{R}$.

8. a) Demonstrați că: $\frac{x}{2+x}\leq\sqrt{1+x}-1\leq\frac{x}{2}$ dacă $x>-1$ și apoi calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$.

9. Dacă $x_1, x_2, x_3\in[0,1]$, atunci $x_1+x_2+x_3-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3\leq 1$.

10. Dacă $a, b, c\in[0,1]$, atunci $a^2+b^2+c^2\leq a^2b+b^2c+c^2a+1$.

11. Dacă $a, b, c\in[0,1]$, atunci $\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\leq 1$.

12. Să se arate că $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}<\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}$.

13. Determinați funcțiile derivabile $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ pentru care $f(0)=0$ și $f'(x)=2\sqrt{f(x)}, \forall x>0$.

A patra consecință (Derivata unei funcții într-un punct)

Următorul rezultat este important pentru că permite să decidem dacă o funcție este derivabilă într-un punct. Condiția suficientă ca acest lucru să se întâmple este dată de :

Corolar 4. Fie $f:E\to\mathbb{R}, E$ interval și $x_0\in E$.

Dacă: **1)** f este **continuă** în x_0 ;

2) f este **derivabilă** pe $E-\{x_0\}$;

3) există $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=l\in\overline{\mathbb{R}}$,

atunci f **are derivată** în x_0 și $f'(x_0)=l$.

Dacă $l\in\mathbb{R}$, atunci f **este derivabilă** în x_0 și $f'(x_0)=l$.

Demonstrație. Se aplică teorema lui Lagrange funcției f pe un interval $[x, x_0], x<x_0$ și avem $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(c_x)$, cu $x<c_x<x_0$.

De aici $f_s'(x_0)=\lim\limits_{x\nearrow x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\nearrow x_0} f'(c_x)=l$, deoarece $c_x\to x_0$ dacă $x\nearrow x_0$. Analog $f_d'(x_0)$ există și este egală cu l . Deci f are derivată în x_0 și $f'(x_0)=l$. ■

Observații. 1) Acest corolar (pe care îl denumim corolarul teoremei lui Lagrange) pentru studiul derivabilității unei funcții într-un punct, permite să calculăm derivatele laterale într-un punct.

2) Corolarul teoremei lui Lagrange dă o condiție suficientă pentru existența derivatei unei funcții într-un punct. Condiția nu este și necesară, după cum se poate vedea prin exemplul următor:

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$, derivabilă în origine și $f'(0)=0$, dar

nu există $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$, unde $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$, întrucât se știe **nu există** $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$.

3) Dacă una din condițiile corolarului nu-i verificată, concluzia nu este numaidecât adevărată.

Spre exemplu funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}0, x\in[0,1)\\ 1, x=1\end{cases}$ este derivabilă pe $[0,1)$ și $\lim\limits_{x\nearrow 1} f'(x)=0$ și totuși f nu este derivabilă în $x=1$, nefiind continuă în acest punct.

Dar nu este exclusă posibilitatea ca o funcție discontinuă într-un punct să aibă totuși derivată în acest punct.

De exemplu $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$ este discontinuă în $x=0$ și totuși $f'(0)=\infty$, calculată folosind definiția.

4) În condițiile corolarului, dacă f este derivabilă în x_0, va rezulta că derivata f' este continuă în x_0.

Exemplu. **Să se studieze derivabilitatea funcției** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2, x\leq 1\\ \ln x+x, x>1\end{cases}, x_0=1$.

R. 1) Continuitatea funcției f **în** $x_0=1$. **Avem:**

$\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 1} x^2=1, \lim\limits_{x\searrow 1} f(x)=\lim\limits_{x\searrow 1}(x+\ln x)=1, f(1)=1$,

ceea ce arată că f **este continuă în** $x_0=1$.

2) Derivabilitatea funcției f **pe** $\mathbb{R}-\{1\}$.

Funcția f **este derivabilă pe** $(-\infty,1)$, **fiind restricția unei funcții (poliniomiale) derivabile pe** $\mathbb{R}$, **iar pe intervalul** $(1,\infty)$ **fiind sumă de funcții derivabile este derivabilă.**

3) Existența limitei $\lim\limits_{x\to 1} f'(x)$.

Derivata funcției f **este** $f'(x)=\begin{cases}2x, x<1\\ \frac{1}{x}+1, x>1.\end{cases}$

Acum $\lim\limits_{x\nearrow 1} f'(x)=\lim\limits_{x\nearrow 1}(2x)=2=f_s'(1)$ **și** $\lim\limits_{x\searrow 1} f'(x)=\lim\limits_{x\searrow 1}\left(\frac{1}{x}+1\right)=2=f_d'(1)$.

Cum $f_s'(1)=f_d'(1)=2$ **rezultă că** f **este derivabilă în** $x=1$ **și** $f'(1)=2$.

Exerciții propuse

1. Să se studieze, utilizând corolarul teoremei lui Lagrange, derivabilitatea următoarelor funcții în punctele indicate:

1) $f:[-2,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=|x-1|\sqrt{x+2}, x_0=1$; 2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^3\sin\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}, x_0=0$;

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}}, x>0\\ 0, x\leq 0\end{cases}, x_0=0$; 4) $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-1}, x\geq 1\\ \arccos x, x\in[0,1)\end{cases}, x_0=1$;

5) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\ln(1+3x), x\geq 0\\ 3x, x<0\end{cases}, x_0=0$; 6) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}, x_0=0$;

7) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2(x^2+1)}}, x_0=-1$.

2. Să se determine parametrii reali a,b **pentru care funcțiile următoare sunt derivabile pe domeniul maxim de definiție:**

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^4+ax+2, x<0\\ b+\ln(1+x^2), x\geq 0\end{cases}$; 2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}e^x+ax-1, x\leq 0\\ \frac{2}{x}\ln(1+x)+b, x>0\end{cases}$;

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^3+ax^2+bx-2, x<1\\ \operatorname{arctg}(x-1), x\geq 1\end{cases}$.

5. Regulile lui L' Hospital

Calcularea formelor de nedeterminare în cazul limitelor

"Au reste je reconnois devoir beaucoup aux lumieres de Mrs. Bernoulli, sur tout à celles du jeune presentement Professeur à Groningue. Je me suis servi sans façon de leurs dècouvertes ..." (L'Hospital," Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes",1696).

Am văzut că pentru a elimina nedeterminările în cazul limitelor de funcții am apelat la scrieri convenabile, artificii de calcul, pentru a pune în evidență structuri ale căror limite sunt cunoscute. Scopul acestui paragraf este de a calcula limita unui raport de funcții cu ajutorul limitei raportului derivatelor lor, desigur în anumite condiții precizate de cele două reguli l'Hospital.

1. Cazul de nedeterminare: $\frac{0}{0}$

Prima regulă a lui l'Hospital. Fie $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ două funcții cu proprietățile:

1) f,g derivabile pe (a,b);

2) $\lim\limits_{x\searrow a} f(x)=\lim\limits_{x\searrow a} g(x)=0$;

3) $g'(x)\neq 0,\forall x\in(a,b)$;

4) există $\lim\limits_{x\searrow a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\in\overline{\mathbb{R}}$.

Atunci există limita $\lim\limits_{x\searrow a}\frac{f(x)}{g(x)}$ și mai mult $\lim\limits_{x\searrow a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\searrow a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

(limita raportului este egală cu limita raportului derivatelor).

Observații. **1) Interpretarea geometrică a regulii lui l'Hospital**

Fie $I=(a<t<b)$. Fie $\widetilde{f},\widetilde{g}$ prelungirile lui f și g și $x=a$. În planul xOy fie curba (Γ) definită parametric prin: $x=\widetilde{g}(t)$, $y=\widetilde{f}(t)$.

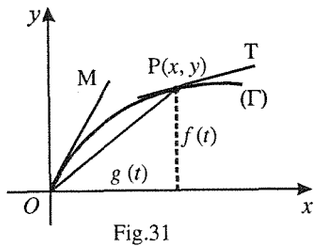


Fig.31

Deoarece $\widetilde{f}(a)=\widetilde{g}(a)=0$, curba (Γ) trece prin origine (Fig.31). Dacă $t>a$, în punctul P corespunzător de pe grafic există tangenta PT a cărei pantă este egală cu $\frac{d(y)}{d(x)}=\frac{f'(t)}{g'(t)}$. În figură panta dreptei OP este egală cu $\frac{f(t)}{g(t)}$. Egalitatea $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, se traduce prin aceea că dacă panta tangentei PT are limita l, atunci panta corzii OP are aceeași limită, care ar putea fi panta tangentei OM la curba (Γ).

2) Regula rămâne adevărată **mutatis mutandis** dacă $x\nearrow a$ (sau $x\to a$).

3) Regula are loc pentru cazul a punct de acumulare finit. Rezultatul rămâne valabil și dacă punctul de acumulare este infinit $a=\infty$. Printr-o substituție de forma $x=\frac{1}{t}$ se reduce acest caz la $a=0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right)'}{\left(g\left(\frac{1}{t}\right)\right)'}=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{t^2}f'\left(\frac{1}{t}\right)}{-\frac{1}{t^2}g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

4) Dacă expresia $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ reprezintă **din nou forma de nedeterminare** $\left(\frac{0}{0}\right)$ și dacă funcțiile f',g' satisfac condițiile teoremei precedente, atunci $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$. Aceste egalități ar putea fi înțelese în sensul că dacă a treia limită există, atunci și prima și a doua limita există.

2. Cazul de nedeterminare: $\frac{\infty}{\infty}$

A doua regulă a lui l'Hospital. Fie $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ două funcții cu proprietățile:

1) f,g sunt derivabile pe (a,b);

2) $\lim\limits_{x\searrow a} f(x)=\lim\limits_{x\searrow a} g(x)=\infty$;

3) $g(x)\neq 0,g'(x)\neq 0,\forall x\in(a,b)$;

4) există $\lim\limits_{x\searrow a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\in\overline{\mathbb{R}}$.

Atunci există limita $\lim\limits_{x\searrow a}\frac{f(x)}{g(x)}$ și are loc egalitatea $\lim\limits_{x\searrow a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\searrow a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Observații. **1)** Regula rămâne valabilă **mutatis mutandis** pentru $x\nearrow a$ (sau $x\to a$) și la fel dacă $x\to\pm\infty$.

2) În virtutea celor două reguli există o metodă generală de calcul a limitei câtului a doua funcții, bazată pe egalitatea.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Această tehnică de lucru se numește **regula lui l'Hospital**.

3) Dacă f', g' satisfac ipotezele din una din cele două teoreme, regula lui l'Hospital se poate aplica pentru a doua oară:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

4) Prima și a doua regulă a lui l'Hospital se referă la cazul când căutăm limita câtului a două funcții f și g care tind simultan la zero sau la infinit când $x\to a$.

A găsi o astfel de limită înseamnă a elimina o nedeterminare de tipul $\frac{0}{0}$ (sau $\frac{\infty}{\infty}$).

Vom arăta că și celelalte cazuri de **nedeterminare:** $0\cdot\infty$,$\infty-\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$ **sunt reductibile la cazurile** $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$. **Primele două prin transformări, iar ultimile trei, luând logaritmul funcțiilor corespunzătoare.**

5) În aplicațiile curente, condițiile din enunțul regulii sunt satisfăcute. De aceea, **de obicei**, se trece direct la calculul limitei în a a funcției $\frac{f'}{g'}$. **Dacă aplicarea regulii conduce la o contradicție, înseamnă că, dintre condițiile teoremei, cel puțin una nu este îndeplinită.**

Dacă avem de calculat limita $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}$ (suntem în cazul $\frac{0}{0}; 0\le\left|x^2\sin\frac{1}{x}\right|\le x^2\Rightarrow x^2\sin\frac{1}{x}\to 0$ dacă $x\to 0$), atunci în încercarea de a aplica direct regula lui l'Hospital avem $\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{1}$, care nu există deoarece nu există $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$. Se observă că în acest caz condiția 4) din prima regulă nu se îndeplinită. Totuși limita dată este $\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$.

6) Reciproca regulii lui l'Hospital este falsă: adică $\frac{f}{g}$ are limită în $x=a$, nu rezultă că și $\frac{f'}{g'}$ are limită în $x=a$. Într-adevăr fie funcțiile $f(x)=x+\sin x, g(x)=x$. Ne interesează limita $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ (suntem în cazul $\frac{\infty}{\infty}$; $x-1\le x+\sin x\le x+1$ plus criteriul majorării). Este clar că $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1$, dar $\frac{f'(x)}{g'(x)}=1+\cos x$, care nu are limită când $x\to\infty$.

7) Atragem atenția că nu întotdeauna aplicarea corectă a regulii lui l'Hospital conduce la situații mai simple. În aceste cazuri **se recomandă** fie **o rescriere pentru** $\frac{f}{g}$ **și o nouă încercare de a aplica regula lui l'Hospital**, fie **utilizarea limitelor structurilor cunoscute studiate la capitolul** "Limite de funcții".
De aceea recomandăm:

În calculul limitelor de funcții combinarea metodelor elementare cu regula lui l'Hospital.

Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze limitele:

a) $\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{\arcsin(2x+1)}{4x^2-1}$; b) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 3x}{\sin 5x\sin 8x}$; c) $\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$.

R. a) Suntem în cazul de nedeterminare $\left(\frac{0}{0}\right)$ **și aplicăm regula lui l'Hospital obținând:**

$\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{\arcsin(2x+1)}{4x^2-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{\frac{2}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}}{8x}=-\frac{1}{2}$. **Mai simplu era dacă am fi scris limita sub forma:**

$\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{\arcsin(2x+1)}{2x+1}\cdot\frac{1}{2x-1}=\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{\arcsin(2x+1)}{2x+1}\cdot\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{1}{2x-1}=1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$, **unde am utilizat limita cunoscută** $\lim_{u(x)\to 0}\frac{\arcsin u(x)}{u(x)}=1$.

b) Suntem în cazul de nedeterminare $\left(\frac{0}{0}\right)$. **Aplicăm regula lui l'Hospital și obținem:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 3x}{\sin 5x\sin 8x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x+3\sin 3x}{5\cos 5x\sin 8x+8\sin 5x\cos 8x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-4\cos 2x+9\cos 3x}{25\sin 5x\sin 8x+40\cos 5x\cos 8x+40\cos 5x\cos 8x-64\sin 5x\sin 8x}=\frac{5}{80}=\frac{1}{16}.$$

Cu mai multă grijă am fi putut prelucra fracția asfel $\frac{\cos 2x-\cos 3x}{5x\cdot 8x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{8x}{\sin 8x}$.

Pentru prima fracție utilizarea regulii lui l'Hospital conduce

la $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 3x}{40x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x+3\sin 3x}{80x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-4\cos 2x+9\cos 3x}{80}=\frac{5}{80}=\frac{1}{16}$.

Pentru celelalte fracții limita este egală cu unu. Scrierea fracției sub forma indicată conduce la calcule mai puține în aplicarea regulii lui l'Hospital.

c) Limita devine succesiv (se aplică regula lui l'Hospital)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x+2\sin 2x}{2\sin x\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-x\sin x+4\cos 2x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\frac{6}{2}=3.$$

Mai simplu era dacă după prima aplicare a regulii lui l'Hospital am fi scris fracția sub forma $\frac{1}{2\cos x}\cdot\left(1+\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x+4\cos x\right)$ când limita este egală cu $\frac{1}{2}(1+1+4)=3$.

2. Să se calculeze limitele :

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^k}, k\in\mathbb{N}^*$; a') $\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n^k}, k\in\mathbb{N}^*$; b) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^a}, a>0$; b') $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

R. a) Fie $f(x)=e^x, g(x)=x^k$, evident funcții derivabile pe $\mathbb{R}$.

Avem: $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$ (deci suntem în cazul $\frac{\infty}{\infty}$), $f'(x)=e^x, g'(x)=kx^{k-1}\neq 0$,

$\forall x>0$. De asemenea există limita $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{kx^{k-1}}$. Cu această limită suntem din nou în cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$. Se aplică regula lui l'Hospital pentru $\frac{f'}{g'}$ și avem

$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{k(k-1)x^{k-2}}$. Aplicând de k ori această regulă găsim: $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{k!}=\infty$. Așadar

$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^k}=\infty$. În exercițiile pe care le rezolvăm, convenim să detaliem doar situațiile în care unele din condițiile regulii lui l'Hospital nu sunt îndeplinite.Deci pentru exemplu de mai sus vom scrie:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^k}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{kx^{k-1}}=\cdots=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{k!}=\infty.$$

Observație. Din $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^k}=\infty$ rezultă ușor că $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{P_k(x)}=\infty$, unde $P_k(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+$ $+\ldots+a_0, a_k>0$ este o funcție polinomială de grad k, limită ce are următoarea semnificație:

> **Funcția exponențială crește mult mai repede decât orice funcție polinomială, pentru valori mari ale argumentului.**

a') Aici avem de calculat limita șirului (a_n), cu $a_n=\frac{e^n}{n^k}, k\in\mathbb{N}^*$. Această limită se deduce din limita precedentă, transcriind-o în limbaj de șiruri.

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty\Leftrightarrow\forall(x_n), x_n\to\infty\Rightarrow f(x_n)\to\infty$, unde $f(x)=\frac{e^x}{x^k}$.

Luând $x_n=n\to\infty$, avem $f(n)=\frac{e^n}{n^k}\to\infty$.

b)Avem succesiv $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^a}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{ax^{a-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{ax^a}=0$. De aici se deduce ușor că $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{P_k(x)}=0$,pentru orice $P_k(x)$ funcție polinomială de grad k, rezultat care afirmă că

> **Orice funcție polinomială crește mult mai repede decât funcția logaritmică, pentru valori mari ale argumentului.**

b') Se scrie șirul sub forma $\sqrt[n]{n}=n^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln n}$.

În general dacă avem f^g, atunci $\boxed{f^g=e^{g\ln f}}$, egalitate ce se verifică printr-o simplă logaritmare în bază e.

Deci $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}\ b')}=e^0=1$.

Observație. Sunt câteva exerciții simple prin care pledăm în calculul limitelor de funcții pentru utilizarea combinată a tehnicilor clasice (limite fundamentale) cu regula lui l'Hospital.

Exerciții propuse

Să se determine următoarele limite:

I. 1) $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^3-1}$; 2) $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^2+5x+6}$; 3) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$; 4) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1}$;

5) $\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{5x+2}+2}{\sqrt{3x+10}-2}$; 6) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$; 7) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$; 8) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{3x}$; 9) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{\ln(1+2x)}$;

10) $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2x-1)}{x^2+x-2}$; 11) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$; 12) $\lim_{x\to\infty}\frac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$; 13) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$; 14) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x\cos x}$;

15) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$; 16) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}$; 17) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x-\sin x}$; 18) $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$;

19) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{1-2\sin 2x-\cos 4x}$; 20) $\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{x^2}-1\right)^2}{\frac{x^2}{2}+\cos x-1}$.

II.1) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{3x}$; 2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{5x}$; 3) $\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^n}{x^m}, n,m\in\mathbb{N}^*$; 4) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+e^x\right)}{x}$;

5) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+2e^x\right)}{\ln\left(1+3e^x\right)}$; 6) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x+e^x\right)}{\ln\left(x^2+e^{2x}\right)}$; 7) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x+e^x}$; 8) $\lim_{x\to\infty}\frac{x+x^2-e^x}{x^3+x^4+e^{2x}}$.

Alte cazuri de nedeterminare

Celelalte cazuri de nedeterminare: $0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,\infty^0,1^\infty$ pot fi reduse la cazurile $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$ printr-o scriere adecvată pentru $f\cdot g, f-g$ și respectiv f^g.

3. Cazul de nedeterminare: $0\cdot\infty$

Pentru calculul limitei produsului $f\cdot g$ în punctul x_0 cu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, iar $\lim\limits_{x\to x_0}|g(x)|=\infty$ există două posibilități de rescriere a produsului $f\cdot g$.

1) Dacă $g(x)\neq 0$ pentru $x\neq x_0, x\in E$, atunci scriem $f\cdot g=\dfrac{f}{\dfrac{1}{g}}$ și

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{g(x)}=0$ când s-a redus cazul la $\dfrac{0}{0}$.

2) Dacă $f(x)\neq 0$ pentru $x\neq x_0, x\in E$, atunci avem scrierea $f\cdot g=\dfrac{g}{\dfrac{1}{f}}$ cu

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{|f(x)|}=\lim\limits_{x\to x_0}|g(x)|=\infty$ și deci s-a redus cazul la $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Observație. Se preferă unul sau celălalt caz după cum aplicarea regulii lui l'Hospital conduce mai rapid la rezultat.

Exerciții rezolvate

Să se calculeze limitele: a) $\lim\limits_{x\searrow 0} x\ln x$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot\ln(\operatorname{tg} x)$;

d*) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x-e\right]$.

R. a) Suntem în cazul $0\cdot\infty$. Prelucrând după primul caz obținem:

$\lim\limits_{x\searrow 0} x\ln x=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{x}{\dfrac{1}{\ln x}}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{1}{-\dfrac{1}{x\ln^2 x}}=-\lim\limits_{x\searrow 0} x\ln^2 x$, **iar acum avem de calculat o limită mai complicată decât cea inițială. În această situație se utilizează scrierea din cazul al doilea când avem:** $\lim\limits_{x\searrow 0} x\ln x=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\searrow 0}(-x)=0$.

b) Avem cazul de nedeterminare $0\cdot\infty$. Obținem:

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{\dfrac{1}{x}}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^2e^x\right)$ **și din nou avem de calculat o limită mai complicată decât cea inițială. Trecem la scrierea**

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{-x}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}}=0$.

c) Avem cazul de nedeterminare $0\cdot\infty$. Limita se scrie:

$\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot\ln(\operatorname{tg} x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\dfrac{1}{\sin x}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}{-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}=0$.

d*) $\lim\limits_{x\to\infty} xe\left[\dfrac{1}{e}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x-1\right]=e\lim\limits_{x\to\infty} x\left[e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1}-1\right]=e\lim\limits_{x\to\infty} x\left[x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-1\right]=$

$=e\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)-t}{t^2}=-\dfrac{e}{2}$.

Exerciții propuse

Să se calculeze limitele următoare:

1) $\lim\limits_{x\searrow 0} x^2\ln x$; 2) $\lim\limits_{x\searrow 0} e^{-\frac{1}{x}}\ln x$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} x$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\searrow e}\ln(x-e)\cdot(\ln x-1)$; 6) $\lim\limits_{x\searrow 1}(x-1)\ln\sqrt{x^2+2x-3}$; 7) $\lim\limits_{x\searrow 1}(x-1)e^{\frac{1}{x-1}}$;

8) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x\cdot\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$; 9) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x-e\right]$;

11) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}-\cos\dfrac{1}{x^2}\right]$; 12) $\lim\limits_{n\to\infty} n(e-e_n), e_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

4. Cazul de nedeterminare: $\infty-\infty$

Avem de calculat $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]$ și $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$ sau $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$. Și acest caz se poate reduce în două moduri la cazurile studiate până acum dacă uzităm scrierile

1) $f-g=\dfrac{f-g}{\dfrac{1}{fg}}=\dfrac{\dfrac{1}{g}-\dfrac{1}{f}}{\dfrac{1}{fg}}$ când se obține cazul $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ sau

2) $f-g=f\left(1-\dfrac{g}{f}\right)$ când pentru $\dfrac{g}{f}$ avem cazul $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Dacă aici $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)}=1$, atunci pentru $f\left(1-\dfrac{g}{f}\right)$ avem cazul de nedeterminare $0\cdot\infty$.

Exerciții rezolvate

Să se calculeze limitele: a) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\ln x)$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^x-x\right)$.

R. a) Suntem în cazul de nedeterminare $(\infty-\infty)$. **Se aduce limita la forma** $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$,

când $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$. **Deci limita cerută este egală cu** $\infty(1-0)=\infty$.

b) Avem nedeterminarea $(\infty-\infty)$. **Limita se scrie** $\lim\limits_{x\to\infty}e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\right)$ **unde**

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0$. **Deci limita este egală cu** $\infty(1-0)=\infty$.

Observație. **De remarcat că atât în cazul a), cât și în cazul b) am forțat factor comun funcția mai „puternică": x față de $\ln x$ (a)) și respectiv e^x față de x (b)).**

Exerciții propuse

Să se calculeze limitele:

1) $\lim\limits_{x\searrow0}(\operatorname{ctg}x+\ln x)$; **2)** $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$; **3)** $\lim\limits_{x\to0}\left(\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x}\right)$; **4)** $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2x\right)$;

5) $\lim\limits_{x\nearrow\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}3x)$; **6)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\pi x}{2}-x\operatorname{arctg}x\right)$; **7)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

8) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{2x+1}{x^2+x-2}-\frac{1}{x\ln x}\right)$; **9)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x(x+1)(x+2)}-x\right)$.

5. Cazurile de nedeterminare: $0^0,\infty^0,1^\infty$

Suntem în situația de a calcula $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}$ (în ipoteza $f(x)>0$, $\forall x\neq x_0, x, x_0\in E$).

Dacă $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$, atunci suntem în cazul 0^0; dacă

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$, atunci avem nedeterminarea ∞^0, iar dacă

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$ și $\lim\limits_{x\to x_0}|g(x)|=\infty$, atunci avem nedeterminarea 1^∞.

Pentru a calcula limita funcției f^g pentru $x\to x_0$ se utilizează egalitatea

$$f^g=e^{g\ln f}$$

(se demonstrează aplicând funcția ln), care o reducem la calculul limitei $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\ln f(x)$, cu care ne plasăm în cazul $0\cdot\infty$.

Exerciții rezolvate

Să se calculeze următoarele limite: a) $\lim\limits_{x\searrow0}x^x$; **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$; **c)** $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;

R. a) Avem $\lim\limits_{x\searrow0}x^x=\left(0^0\right)=\lim\limits_{x\searrow0}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\searrow0}x\ln x}$.

Dar $\lim\limits_{x\searrow0}x\ln x=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\searrow0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\searrow0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$. **Așadar** $\lim\limits_{x\searrow0}x^x=e^0=1$.

b) Suntem în cazul de nedeterminare ∞^0. **Limita se scrie:**

$\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=\left(\infty^0\right)=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln x}$, **când** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$.

Deci limita cerută este $e^0=1$.

c) Limita devine $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\left(1^\infty\right)=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\cos x}$,

iar $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin x}{2x\cos x}=-\frac{1}{2}$, **unde am folosit că** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Așadar limita cerută este $e^{-\frac{1}{2}}$.

Exerciții propuse

1.Să se calculeze limitele:

I. $\left(0^0\right)$ **1)** $\lim\limits_{x\searrow0}x^{tgx}$; **2)** $\lim\limits_{x\searrow0}(\sin x)^{\sin x}$; **3)** $\lim\limits_{x\searrow0}\left[\ln(1+x)\right]^x$; **4)** $\lim\limits_{x\searrow1}(\ln x)^{x-1}$;

5) $\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)^x$; **6)** $\lim\limits_{x\searrow0}\left(2^x-1\right)^{\sin x}$; **7)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-arctgx\right)^{\frac{1}{\ln x}}$; **8)** $\lim\limits_{x\to0}x^{\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}}$;

9) $\lim\limits_{x\to0}\left(x\cos\frac{x}{x^2+1}\right)^{\frac{x}{x^2+1}}$.

II. $\left(\infty^0\right)$ **1)** $\lim\limits_{x\searrow0}(\operatorname{ctg}x)^x$; **2)** $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$; **3)** $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$; **4)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tg\,x)^{2x-\pi}$;

5) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tg\,x}$; **6)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+x+1\right)^{\frac{1}{x}}$; **7)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

III. $\left(1^\infty\right)$ **1)** $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\ln x}$; **2)** $\lim\limits_{x\to5}(6-x)^{\frac{1}{x-5}}$; **3)** $\lim\limits_{x\searrow0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; **4)** $\lim\limits_{x\searrow0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$;

5) $\lim\limits_{x\to1}(\ln ex)^{\frac{1}{x-1}}$; **6)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^x$; **7)** $\lim\limits_{x\to0}(1+\arcsin x)^{\frac{1}{\sin x}}$; **8)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(2-\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{\sin x-\cos x}}$;

9) $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$; **10)** $\lim\limits_{x\to0}\left[\cos(\sin x)\right]^{\frac{1}{x^2}}$; **11)** $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\operatorname{ctg}x}$; **12)** $\lim\limits_{x\searrow0}\left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]^{\frac{1}{\sin x}}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; 15) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+\sin x\right)^{\frac{1}{x}}$;

16) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x+\sin^2 x\right)^{\frac{1}{x^2}}$; 17) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}+x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right]^x$; 18) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}+x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^x$.

2. Cum poate fi utilizată regula lui l'Hospital pentru calculul următoarelor limite de şiruri:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{e^n}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^n+n\right)^{\frac{1}{n}}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} n\right)^{\frac{1}{n}}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi n}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{tg}^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+\ln n}$.

3. Să se arate că limitele: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=1$; **2)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=0$ **, nu pot fi găsite cu regula lui l'Hospital.**

4. Dacă $e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e$ **şi** $c_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\to c$, **să se arate că** $\lim\limits_n\frac{e-e_n}{c_n-c}=e$.

5. Se consideră şirul (a_n) **cu** $a_1>0, a_{n+1}=\ln\left(1+a_n\right), n\geq 1$. **Să se arate că** (a_n) **este convergent şi să se calculeze** $\lim\limits_n a_n$, $\lim\limits_n na_n$.

6. Rolul derivatei a doua în studiul funcţiilor

1.Convexitate şi concavitate

Am văzut că semnul primei derivate dă informaţii asupra monotoniei funcţiei, iar zerourile primei derivate sunt eventuale puncte de extrem. Aceste informaţii şi altele le utilizăm în trasarea graficului unei funcţii, numai că în destule cazuri, sunt necesare şi informaţii suplimentare, care să le întregească pe cele furnizate de prima derivată. Aşa de pildă o funcţie derivabilă poate fi strict crescătoare în două moduri, după cum tangenta la grafic se află sub grafic
(Fig. 32.a)) sau deasupra graficului (Fig.32.b)). Analog, o funcţie derivabilă poate fi strict descrescătoare în două moduri după poziţia tangentei la grafic în raport cu acesta: sub grafic (Fig.33.a)) sau deasupra graficului (Fig.33.b)).

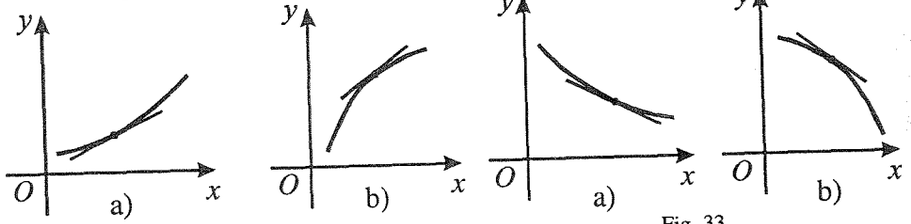


Fig. 32

Fig. 33

Prin următoarea definiţie precizăm riguros formele graficului prezente mai sus.

Definiţii. 1) O funcţie $f: I\to\mathbb{R}, I\subseteq\mathbb{R}$ interval, se numeşte **convexă pe intervalul** I dacă $\forall x_1, x_2\in I, \forall t\in[0,1]$ are loc inegalitatea :

$$f\left((1-t)x_1+tx_2\right)\leq(1-t)f\left(x_1\right)+tf\left(x_2\right).$$

2) O funcţie $f: I\to\mathbb{R}, I\subseteq\mathbb{R}$ interval, se numeşte **concavă pe intervalul** I dacă $\forall x_1, x_2\in I, \forall t\in[0,1]$ are loc inegalitatea:

$$f\left((1-t)x_1+tx_2\right)\geq(1-t)f\left(x_1\right)+tf\left(x_2\right).$$

Observaţii. 1) Dacă în definiţia precedentă inegalităţile sunt stricte atunci spunem că funcţia f este **strict convexă** şi respectiv **strict concavă**.

2) Este imediat că funcţia f este **concavă** dacă $(-f)$ este **convexă** pe I.

3) Funcţia convexă (concavă) pe un interval admite următoarea interpretare geometrică. Să considerăm punctele $A\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$, $B\left(x_2, f\left(x_2\right)\right)$, $x_1\neq x_2$ aparţinând graficului funcţiei f şi punctul $x_t=(1-t)x_1+tx_2, t\in[0,1]$, care aparţine segmentului de capete x_1, x_2 (se verifică uşor dubla inegalitate $x_1\leq x_t\leq x_2$) (Fig.34).

Coarda AB are ecuaţia

$$y=f\left(x_2\right)+\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}\left(x-x_2\right)$$ şi ordonata punctului C de abscisă x_t de pe această coardă va fi

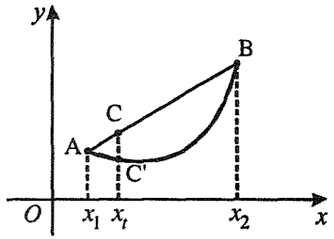


Fig. 34

$$y_c=f\left(x_2\right)+\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}\left(x_t-x_2\right)$$

$$=(1-t)f\left(x_1\right)+tf\left(x_2\right).$$

Dacă f este convexă, atunci $f\left(x_t\right)\leq y_c$. Punctul C' aparţinând graficului are coordonatele $\left(x_t, f\left(x_t\right)\right)$. Semnificaţia inegalităţii $f\left(x_t\right)\leq y_c$, cazul funcţiei convexe, este aceea că **graficul funcţiei** f **este situat sub orice coardă dacă unim două puncte situate pe graficul funcţiei**, cu abscisele aparţinând lui I. Analog, semnificaţia inegalităţii $f\left(x_t\right)\geq y_c$, cazul funcţiei concave, este că **graficul funcţiei** f **este situat deasupra coardei determinate de orice două puncte situate pe graficul funcţiei, cu abscisele aparţinând lui** I**.** Dacă în fiecare punct graficul funcţiei admite o tangentă unică, atunci inegalitatea $f\left(x_t\right)\leq y_c$ este echivalentă cu faptul că în fiecare punct $\left(x, f\left(x\right)\right), x\in\left[x_1, x_2\right]$

tangenta la graficul lui f este situată **sub** graficul lui f. O interpretare analogă pentru inegalitatea $f(x_t) \geq y_c$.

Se mai spune despre funcția convexă că are graficul o **curbă convexă**, iar despre funcția concavă că are graficul o **curbă concavă**. În limbajul trivial spunem despre graficul convex, având forma secțiunii unui vas cu gura în sus, că „ține apa", în timp ce graficul concav „nu ține apa".

Exerciții rezolvate

Să se demonstreze că au loc următoarele proprietăți:
1) Produsul dintre o funcție convexă și o funcție constantă pozitivă este o funcție convexă.
2) O sumă finită de funcții convexe este o funcție convexă.
3) Dacă $g: I \to J \subseteq \mathbb{R}, f: J \to \mathbb{R}, g$ convexă ,iar f convexă și crescătoare, atunci $f \circ g$ este convexă.
4) Dacă g este inversa lui f, atunci au loc afirmațiile:
a) f convexă, crescătoare $\Rightarrow g$ concavă, crescătoare;
b) f convexă, descrescătoare $\Rightarrow$ g convexă, descrescătoare;
c) f concavă, descrescătoare $\Rightarrow g$ concavă, descrescătoare.
5) Dacă $f: I \to \mathbb{R}$, I interval, este o funcție neconstantă și convexă, atunci f nu-și poate atinge valoarea cea mai mare în interiorul intervalului.
R. Demonstrăm 3) și 5).
3) Din g convexă pe I rezultă

$g((1-t)x_1+tx_2) \leq (1-t)g(x_1)+tg(x_2), \forall x_1, x_2 \in I, \forall t \in [0,1]$.

De aici rezultă (f crescătoare, combinată cu f convexă):

$(f \circ g)((1-t)x_1+tx_2) \leq f((1-t)g(x_1)+tg(x_2)) \leq (1-t)(f \circ g)(x_1)+t(f \circ g)(x_2)$, **ceea ce arată că $f \circ g$ este convexă (de observat momentul când a intervenit faptul că f este crescătoare- deci de reținut că f, g convexe nu implică numai decât $f \circ g$ convexă!).**
5) Vom demonstra prin reducere la absurd. Presupunem că f își atinge valoarea cea mai mare în x_0 din interiorul intervalului I. Cum f nu este constantă rezultă că x_0 poate fi inclus într-un interval (x_1, x_2) astfel încât $x_1 < x_0 < x_2$ și cel puțin la capetele intervalului f să fie strict mai mică decât $f(x_0)$. Fie $f(x_1) < f(x_0), f(x_2) \leq f(x_0)$. Punem $x_0 = (1-t)x_1 + tx_2$ și înmulțim prima inegalitatea cu $(1-t)$, a doua cu t și le adunăm, când avem:

$(1-t)f(x_1)+tf(x_2) < f(x_0) = f((1-t)x_1+tx_2)$, **relație ce contrazice convexitatea lui f.**

Exerciții propuse

Formulați proprietăți analoge cu 1), 2), 3), 5), de la exerciții rezolvate pentru funcții concave.

2. Condiție suficientă de convexitate(concavitate)

Următorul rezultat vine să caracterizeze funcțiile convexe (concave) pe un interval prin intermediul semnului celei de-a doua derivate.

Mai precis are loc următoarea:

Teoremă. Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}, a < b$ o funcție de două ori derivabilă pe $[a,b]$.

1) Dacă $f''(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$, atunci funcția f este convexă pe intervalul $[a,b]$.

2) Dacă $f''(x) \leq 0, \forall x \in (a,b)$, atunci funcția f este concavă pe intervalul $[a,b]$.

Demonstrație. 1) Fie $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Pentru fiecare punct $x \in (x_1, x_2)$ se aplică teorema lui Lagrange funcției f pe intervalele $[x_1, x]$, $[x, x_2]$ și deci există $c_1 \in (x_1, x), c_2 \in (x, x_2)$ astfel încât

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(c_1), \quad \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(c_2).$$

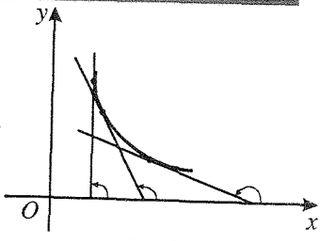


Fig. 35

Cum $c_1 < c_2$ rezultă $f'(c_1) \leq f'(c_2)$ (din enunț $f'' \geq 0$ arată că f' este crescătoare) adică $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$.

Din $x \in (x_1, x_2)$ arbitrar, aceasta este echivalentă cu scrierea: $x = (1-t)x_1 + tx_2, \forall t \in (0,1)$.

Înlocuind pe x în inegalitatea de mai sus rezultă $f(x) \leq (1-t)f(x_1)+tf(x_2)$, ceea ce arată că f este convexă pe $[a,b]$.

2) Analog. ■

Observații. 1) Este valabilă și afirmația reciprocă și anume: Dacă $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ este de două ori derivabilă pe $[a,b]$ și este convexă (concavă), atunci $f'' \geq 0 (\leq 0)$.

2) **Interpretarea geometrică.** Derivata a doua f'', fiind derivata primei derivate, din $f'' \geq 0$ se deduce că f' este o funcție crescătoare , ceea ce înseamnă că pentru un grafic convex panta tangentei la grafic crește când punctul de tangență se deplasează spre dreapta (Fig.35). O interpretare analogă se poate da dacă $f'' \leq 0$.

Intervale de convexitate (concavitate)

Am văzut în paragraful precedent că dacă $f: I \to \mathbb{R}$ este o funcție de două ori derivabilă pe intervalul I și dacă $f'' \geq 0$, atunci f este convexă pe I, iar dacă $f'' \leq 0$, funcția este concavă pe I. Așadar semnul celei de-a doua derivate permite să găsim intervalele de convexitate și concavitate pentru o funcție. Pentru

determinarea intervalelor de convexitate(concavitate) recomandăm parcurgerea etapelor:

1) Se calculează f'';
2) Se rezolvă ecuația $f''(x)=0$;
3) Cu ajutorul rădăcinilor derivatei a doua se determină intervalele pe care derivata a doua păstrează același semn;
4) Dacă $f''>0$ pe un interval , atunci f este convexă pe acel interval, iar dacă $f''<0$ pe un interval, atunci f este concavă pe acel interval.

Faptul că pe un interval $[x_1,x_2]$, f este convexă, se marchează într-un tabel de forma:

x	x_1		x_2
f		⌒	
f''	+	+ + + +	

iar dacă este concavă

x	x_1		x_2
f		⌓	
f''	-	- - - -	

Exerciții rezolvate

1. Să se determine intervalele de convexitate și concavitate pentru următoarele funcții:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+3x^2$; **b)** $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$;

c) $f(x)=x^2e^x$; **d)** $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\ln x$; **e)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x-\cos x$.

R. a) Calculăm f'' și avem $f'(x)=3x^2+6x, f''(x)=6(x+1)$. Ecuația $f''(x)=0$ are soluția $x=-1$. Se întocmește tabelul de semn pentru f'', care are forma :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		⌒	2	⌓	
$f''(x)$	-	-	0	+ +	+

Deci pe intervalul $(-\infty,-1)$ funcția este concavă,iar pe intervalul $(-1,\infty)$ funcția este convexă.

b) Avem : $f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$; $f''(x)=\dfrac{-4}{(x+1)^3}$.

Tabelul cu semnul lui f'' este

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		⌒		⌓	
$f''(x)$	+	+		- - -	

din care deducem că funcția este convexă pe intervalul $(-\infty,-1)$ și concavă pe intervalul $(-1,\infty)$.

c) Avem: $f'(x)=(x^2+2x)e^x$ și $f''(x)=(x^2+4x+2)e^x$. Ecuația $f''(x)=0$ are soluțiile $x_{1,2}=-2\pm\sqrt{2}$ .Tabelul cu semnul lui f'' este :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f(x)$		⌒		⌓		⌒	
$f''(x)$	+	+ 0	-	- 0	+	+	

Deci f este funcție convexă pe intervalele $(-\infty,-2-\sqrt{2})$, $(-2+\sqrt{2},\infty)$ și concavă pe intervalul $(-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2})$.

d) Calculăm f''. Avem $f'(x)=\ln x+1$, $f''(x)=\dfrac{1}{x}$. Ecuația $f''(x)=0$ nu are soluții. Tabelul are forma:

x	0		$+\infty$
$f(x)$		⌒	
$f''(x)$	+	+ + +	

Deci f este convexă pe domeniul de definiție.

e) $f'(x)=\cos x+\sin x, f''(x)=-\sin x+\cos$. Ecuația $f''(x)=0$ este $tgx=1$ cu soluțiile $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Funcția f find periodică se constantă că și f' și f'' au aceeași calitate (demonstrați !). Perioada principală este $T_0=2\pi$. Deci este suficient să stabilim intervalele de convexitate pe $[0,2\pi]$, iar pe $\mathbb{R}$ le determinăm adăugând la capetele intervalelor găsite pe $[0,2\pi]$ multiplu de perioada principală.

Tabelul este

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
$f(x)$		⌒		⌓		⌒	
$f''(x)$	+	+ 0	-	- 0	+	+	

Deci f este convexă pe intervalele $\left(0,\frac{\pi}{4}\right),\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right)$ și concavă pe intervalul $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$. Acum pe $\mathbb{R}$ avem că f este convexă pe intervalele $\left(2k\pi,\frac{\pi}{4}+2k\pi\right),\left(\frac{5\pi}{4}+2k\pi,2\pi+2k\pi\right), k\in\mathbb{Z}$ și concavă pe intervalele $\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right), k\in\mathbb{Z}$.

2.(Inegalitatea lui Jensen)Dacă $f:I\to\mathbb{R}$, I interval, este o funcție convexă, atunci

$f(q_1x_1+q_2x_2+...+q_nx_n)\le q_1f(x_1)+q_2f(x_2)+...+q_nf(x_n)$, unde

$q_i>0, i=\overline{1,n}, q_1+q_2+...+q_n=1, \forall\, x_i\in I, q_1x_1+...+q_nx_n\in I$.

Dacă f este concavă, atunci are loc inegalitatea de sens contrar.

R. Demonstrația se va face prin inducție matematică după n .Vom presupune că f este convexă. Pentru $n=2$ afirmația are loc, fiind chiar definiția funcției convexe. Presupunem inegalitatea adevărată pentru n și o demonstrăm pentru $n+1$,adică fie $x_1,x_2,...,x_{n+1}\in I$ și $(n+1)$ numere positive $q_1,q_2,...,q_{n+1}$ cu $q_1+...+q_{n+1}=1$. Să arătăm că $f\left(\sum_{i=1}^{n+1}q_ix_i\right)\le\sum_{i=1}^{n+1}q_if(x_i)$.

Se înlocuiește în stânga suma ultimilor doi termeni $q_nx_n+q_{n+1}x_{n+1}$ cu un singur termen scriind

$(q_n+q_{n+1})\left(\frac{q_n}{q_n+q_{n+1}}x_n+\frac{q_{n+1}}{q_n+q_{n+1}}x_{n+1}\right)=x_n'$. Deci

$f\left(q_1x_1+...+(q_n+q_{n+1})x_n'\right)\le q_1f(x_1)+...+(q_n+q_{n+1})f(x_n')$

$\le q_1f(x_1)+...+(q_n+q_{n+1})\left[\frac{q_n}{q_n+q_{n+1}}f(x_n)+\frac{q_{n+1}}{q_n+q_{n+1}}f(x_{n+1})\right]=\sum_{i=1}^{n+1}q_if(x_i)$.

Conform metodei inducției matematice, inegalitatea este adevărată $\forall n\ge 2$.

3. Să se demonstreze că într-un triunghi ABC au loc inegalitățile :

1) $\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos A\cos B\cos C\le\frac{1}{8}$; 3) $\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{a+c-b}+\frac{c}{a+b-c}\ge 3$;

4) $r_a+r_b+r_c\ge 9r$, unde r_a,r_b,r_c reprezintă razele cercurilor exînscrise triunghiului ABC.

R. 1) Funcția $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x$ cu $f''(x)=-\sin x<0, \forall x\in(0,\pi)$ este o funcție concavă pe $[0,\pi]$. Deci (luăm $q_1=q_2=q_3=\frac{1}{3}$ în inegalitatea lui Jensen)

$f\left(\frac{1}{3}A+\frac{1}{3}B+\frac{1}{3}C\right)=f\left(\frac{A+B+C}{3}\right)\ge\frac{1}{3}f(A)+\frac{1}{3}f(B)+\frac{1}{3}f(C)$, adică exact inegalitatea dorită.

2) Dacă un unghi al triunghiului este obtuz, atunci cosinusul acelui unghi este negativ și deci întreg membru stâng este la fel, și inegalitatea se verifică. Presupunem că $A,B,C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Inegalitatea se logaritmează și se scrie echivalent $\ln\cos A+\ln\cos B+\ln\cos C\le\ln\frac{1}{8}$.

Se ia acum funcția $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln\cos x$, pentru care $f''(x)=-\frac{1}{\cos^2 x}<0$, ceea ce arată că f este concavă (Altfel se poate decide că este concavă fiind compunere de funcții $g(x)=\cos x$, care este concavă și $h(x)=\ln x$, care este concavă și crescătoare.

Atunci $f=h\circ g$ este concavă). Deci $f\left(\frac{A+B+C}{2}\right)\ge\frac{1}{3}f(A)+\frac{1}{3}f(B)+\frac{1}{3}f(C)$ sau

$\ln\cos\frac{\pi}{3}\ge\frac{1}{3}\ln\cos A+\frac{1}{3}\ln\cos B+\frac{1}{3}\ln\cos C$, adică $3\ln\frac{1}{2}\ge\sum\ln\cos A$.

3) Notând $a+b+c=2p$, atunci inegalitatea se rescrie $\frac{a}{2(p-a)}+\frac{b}{2(p-b)}+\frac{c}{2(p-c)}\ge 3$, ceea ce

sugerează(termenii din stânga) considerarea funcției $f:(0,p)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{2(p-x)}$ pentru care $f''(x)>0$ ceea ce arată că f este convexă.

Așadar $f\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c\right)\le\frac{1}{3}f(a)+\frac{1}{3}f(b)+\frac{1}{3}f(c)$ sau încă

$f\left(\frac{2p}{3}\right)\le\frac{1}{3}\left[\frac{a}{2(p-a)}+\frac{b}{2(p-b)}+\frac{c}{2(p-c)}\right]$ sau în final $3\le\frac{a}{2(p-a)}+\frac{b}{2(p-b)}+\frac{c}{2(p-c)}$.

4) Se știe că $r_a=\frac{s}{p-a},...,r=\frac{s}{p}$. Prin urmare $\frac{r_a}{r}=\frac{p}{p-a}$ și inegalitatea devine $\frac{p}{p-a}+\frac{p}{p-b}+\frac{p}{p-c}\ge 9$, (1). Luăm funcția $f:(0,p)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{p-x}$ cu $f''>0$, ceea ce arată că f este convexă. Așadar $f\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c\right)\le\frac{1}{3}f(a)+\frac{1}{3}f(b)+\frac{1}{3}f(c)$ sau

$f\left(\frac{2p}{3}\right)\le\frac{1}{3}\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)$ adică $\frac{3}{p}\le\frac{1}{3}\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)$, iar de aici găsim ușor inegalitatea (1).

Exerciții propuse

1. Să se determine intervalele de convexitate și concavitate pentru funcțiile următoare ($f:D\to\mathbb{R}$, unde D este domeniul maxim de definiție) :

1) $f(x)=x^3-5x^2+3x-5$; 2) $f(x)=x^3-6x^2+12x+4$; 3) $f(x)=-x^4-2x^3+36x^2+x$;

4) $f(x)=3x^5-5x^4+3x-2$; 5) $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$; 6) $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$; 7) $f(x)=\frac{(x+1)^2}{x-1}$;

8) $f(x)=\frac{x^3}{x^2+12}$; 9) $f(x)=x\left|\frac{x}{1+x}\right|$; 10) $f(x)=\sqrt[3]{x+2}$; 11) $f(x)=\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}$;

12) $f(x)=x\sqrt{\frac{x-1}{3x+1}}$; 13) $f(x)=\sqrt[3]{4x^3-12x}$; 14) $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$; 15) $f(x)=x^2\ln x$;

16) $f(x)=x\ln(1+|x|)$; 17) $f(x)=x-\ln|x|$; 18) $f(x)=\frac{\ln x}{1+\ln x}$; 19) $f(x)=xe^x$;

20) $f(x)=e^{-x^2}$; 21) $f(x)=(1+x^2)e^x$; 22) $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$; 23) $f(x)=\frac{1}{x}e^{\frac{1}{|x-1|}}$;

24) $f(x)=x-\sin x$; 25) $f(x)=\frac{\sin x+1}{\sin x}$; 26) $f(x)=\operatorname{arctg}x-x$;

27) $f(x)=\arcsin\frac{1-x}{1+x}$; 28) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2-1}$; 29) $f(x)=x^x$.

2. Aplicând funcției concave $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x$, inegalitatea lui Jensen ,să se demonstreze inegalitatea dintre media geometrică și cea aritmetică.

3. Aplicând funcției $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\ln x$, inegalitatea lui Jensen să se demonstreze inegalitatea dintre media geometrică și cea armonică.

4. Să se demonstreze că într-un triunghi ABC au loc inegalitățile :

1) $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$,cu $A,B,C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; 2) $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$;

3) $\sqrt{\cos A}+\sqrt{\cos B}+\sqrt{\cos C}\le\frac{3\sqrt{2}}{2}, A,B,C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;4) $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C\ge 3\sqrt{3}, A,B,C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

5*) $a+b+c\le\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{a+c-b}+\frac{c^2}{a+b-c}$.

5. **Să se arate că dacă a,b,c,d sunt laturile unui patrulater convex, atunci**

$$\frac{a}{b+c+d-a}+\frac{b}{a+c+d-b}+\frac{c}{a+b+d-c}+\frac{d}{a+b+c-d}\ge 2.$$

3.Condiție suficientă pentru un punct de inflexiune

În paragraful 5.3.4 am definit ce este un punct de inflexiune cu precizările de rigoare a ceea ce înseamnă că graficul este convex sau concav.
Are loc următoarea:

Teoremă. Fie $f:E\to R$ și x_0 un punct din intervalul E.
Dacă f este de două ori derivabilă într-o vecinătate V a lui x_0 și dacă există două numere $\alpha,\beta\in V$ astfel încât

1) $\alpha<x_0<\beta$;

2) $f''(x_0)=0$;

3) ($f''<0$ pe (α,x_0) și $f''>0$ pe (x_0,β))sau ($f''>0$ pe (α,x_0) și $f''<0$ pe (x_0,β)), atunci x_0 este **punct de inflexiune pentru** f.

Punctul $M(x_0,f(x_0))$ se numește **punct de inflexiune al graficului.**

Demonstrație. Din definiția punctului de inflexiune și teorema de la paragraful "Condiție suficientă de convexitate". ■

Observații .**1)** x_0 este punct de inflexiune dacă $f'(x_0)=f''(x_0)=0$ și $f'''(x_0)\neq 0$.

2) Condiția $f''(x_0)=0$ nu implică automat x_0 punct de inflexiune. Într-adevăr fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^4$ pentru care $f'(x)=4x^3$ și $f''(x)=12x^2$. Ecuația $f''(x)=0$ are soluția $x_0=0$, care însă nu este punct de inflexiune pentru f deoarece $f''(x)>0$, atât pentru $x<0$ cât și pentru $x>0$.

3) Condiția ca f **să fie continuă** în x_0 **este importantă.**

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}-x^2+1, x\le 0\\ -\sqrt{x}, x>0\end{cases}$ cu $f''(x)=\begin{cases}-2, x<0\\ \frac{1}{4\sqrt{x}}, x>0\end{cases}$,ceea ce înseamnă că pe intervalul $(-\infty,0)$, $f''<0$, adică f este concavă, iar pe $(0,\infty)$, $f''>0$, adică f este convexă. Dar $x_0=0$ nu este punct de inflexiune **funcția nefiind continuă în acest punct.**

4) De asemenea dacă f **nu are derivată** (finită sau infinită) în x_0, atunci x_0 **nu este punct de inflexiune** pentru f.

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2, x\le 0\\ \sqrt{x}, x>0\end{cases}$ cu $f'(x)=\begin{cases}2x, x<0\\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, x>0\end{cases}$ și

$$f''(x)=\begin{cases}2, x>0\\ -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}, x>0\end{cases}.$$

Se constantă că f este continuă în $x_0=0$ și $f_s'(0)=0, f_d'(0)=\infty$. Deci f nu are derivată în $x_0=0$. Acest punct este **punct unghiular pentru** f, deși $f''>0$ dacă $x<0$ și $f''<0$ pentru $x>0$.

5) Pentru ca x_0 să fie punct de inflexiune pentru funcția f (îndeplinid condițiile teoremei) trebuie să avem una din situațiile indicate mai jos.

x	0		x_0		∞
$f(x)$		⌒		⌒	
$f''(x)$		+ +	0	- -	

x	0		x_0		∞
$f(x)$		⌒		⌒	
$f''(x)$		- -	0	+ +	

Exerciții rezolvate

Să se determine punctele de inflexiune pentru funcțiile:

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-x+2$; **2)** $f:\mathbb{R}-\{\pm 1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{1-x^2}$;

3) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

R.1) Avem $f'(x)=3x^2-1$ și $f''(x)=6x$. Ecuția $f''(x)=0$ are soluția $x=0$ .Cum $f''(x)<0$ dacă $x<0$ și $f''(x)>0$ dacă $x>0$ rezultă că $x=0$ este punct de iflexiune pentru f, iar punctul $(0,2)$ este punct de inflexiune pentru graficul funcției.

2) Se calculează f'' și se rezolvă ecuația $f''(x)=0$.

Avem: $f''(x)=\frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}$, $f''(x)=0\Rightarrow x=0$. Tabelul (în jurul punctului $x=0$)

x	-1		0		1
$f(x)$		⌒		⌒	
$f''(x)$		- -	0	+ +	

arată că $x=0$ este punct de inflexiune pentru f iar punctul $(0,0)$ este punct de inflexiune pentru grafic.

3) Avem $f''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}=0$ implică $x=e^{\frac{3}{2}}$. Tabelul arată că $x=e^{\frac{3}{2}}$ este punct de inflexiune pentru funcție, iar punctul $\left(e^{\frac{3}{2}},\frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}\right)$ este punct de inflexiune pentru grafic.

x	0		$e^{\frac{3}{2}}$		∞
$f(x)$		⌒		⌣	
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$

Exerciții propuse

Să se determine punctele de inflexiune pentru funcțiile:

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-5x^2+3x-5$; 2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{1+x^2}$;

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2}$; 4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^{-x^2}$;

5) $f:\mathbb{R}-\{-1,0\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{1+x}e^{\frac{1}{x}}$; 6) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x^2\ln x$;

7) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2(x^2+1)}}$; 8) $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=arctg\frac{x}{1-x}$;

9) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-2\operatorname{arctg} x$; 10) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(1+x^2)$.

4.Condiție suficientă pentru un punct de extrem

S-a văzut că studiind semnul derivatei întâi de o parte și de alta a unui punct de extrem, se poate preciza dacă acesta este punct de maxim sau de minim.Următorul rezultat spune că aceeași concluzie se poate trage dacă studiem semnul derivatei a doua **în punctul de extrem**. Mai precis are loc:

Teorema. Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă și $x_0\in(a,b)$ un punct de extrem pentru f.

1) Dacă $f''(x_0)>0$, atunci x_0 este **punct de minim local** pentru f.

2) Dacă $f''(x_0)<0$, atunci x_0 **este punct de maxim local** pentru f.

Demonstrație. 1) Din $f''(x_0)>0$, există $\delta>0$ astfel încât pe $(x_0-\delta,x_0+\delta)$, f' este crescătoare. Dar din ipoteză $f'(x_0)=0$. Atunci $\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$ avem $f'(x)\le f'(x_0)=0$, adică pe intervalul $(x_0-\delta,x_0)$ funcția f este descrescătoare. Analog dacă $x\in(x_0,x_0+\delta)$, atunci $0=f'(x_0)\le f'(x)$ și prin urmare f este crescătoare pe intervalul $(x_0,x_0+\delta)$. De aici se deduce că x_0 este punct de minim pentru f .2) Analog cu 1). ■

Observații. 1) Pentru **punctul de minim** avem tabelul (pe o vecinătate a lui x_0).

x		x_0	
$f'(x)$	$-$ $-$	0	$+$ $+$
$f''(x)$	$+$ $+$ $+$ $+$ $+$		
$f(x)$	↘	$f(x_0)$	↗

Din tabel rezultă că f' trece de la valori negative, prin zero la valori pozitive, atunci când x crește, ceea ce înseamnă că $(f')'(x)>0, \forall x\in V$.

Pentru **punctul de maxim** avem tabelul (pe o vecinătate a lui x_0):În acest caz observăm că f' trece de la valori pozitive, prin zero la valori negative, atunci când x crește ceea ce înseamnă că $(f')'(x)<0, \forall x\in V$ .Chestiunile discutate mai sus au corespondent grafic ($y=f(x)$ este o funcție oarecare, de două ori derivabilă pe domeniul de definiție) sugestiv dat în Fig.36. ($+,0,-$ sunt pentru panta tangentei la grafic). 2) Dacă $f''(x_0)<0$, tangenta la grafic în punctul $(x_0,f(x_0))$ se află deasupra graficului , iar dacă $f''(x_0)>0$ această tangentă este sub grafic.

x		x_0	
$f'(x)$	$+$ $+$	0	$-$ $-$
$f''(x)$	$-$ $-$ $-$ $-$ $-$		
$f(x)$	↗	$f(x_0)$	↘

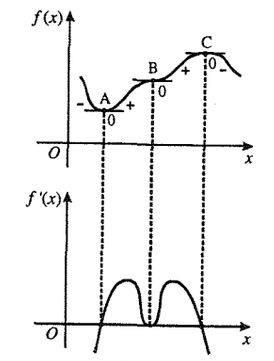


Fig. 36

Exerciții rezolvate

Să se precizeze natura punctelor de extrem x_0 indicate pentru funcțiile de mai jos :

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^4-4x^3+4x^2, x_0\in\{0,1,2\}$; 2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2e^x, x_0\in\{-2,0\}$;

R. 1) Avem $f'(x)=4x(x^2-3x+2)$. Din $f'(x)=0$ rezultă $x\in\{0,1,2\}$. Pe de altă parte $f''(x)=4(3x^2-6x+2)$. Cum $f''(0)=8>0$, $f''(1)=-4<0, f''(2)=8>0$ rezultă că $x=0, x=2$ sunt puncte de minim local pentru f, iar $x=1$ este punct de maxim local al lui f.

2)Avem $f'(x)=(x^2+2x)e^x=0$ cu soluțiile $x_1=-2, x_2=0$. Derivata a doua este $f''(x)=(x^2+4x+2)e^x$. Cum $f''(-2)=-2e^{-2}<0$, iar $f''(0)=2>0$ rezultă că $x=-2$ este punct de maxim pentru f, în timp ce $x=0$ este punct de minim pentru f.

Exerciții propuse

1. **Să se precizeze natura punctelor de extrem x_0 pentru funcțiile $f:E\to\mathbb{R}$, E fiind domeniul maxim de definiție(utilizând semnul lui $f''(x_0)$):**

1) $f(x)=x^3-3x+2$; 2) $f(x)=x^3-x^2$; 3) $f(x)=\frac{1}{x(x-1)}$; 4) $f(x)=\frac{8(x-1)}{x^2+6x+18}$;

5) $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$; 6) $f(x)=x-\ln x$; 7) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$; 8) $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$

9) $f(x)=xe^{-x}$; 10) $f(x)=\sin 2x+2\cos x, \in [0,2\pi]$.

2. Dintr-o foaie dreptunghiulară de dimensiuni 12 cm, 7,5 cm se taie din fiecare colț un pătrat de latura x. Din foaia rămasă se formează o cutie deschisă de laturi 12-2 x, 7,5-2 x și înălțimea x. Arătați că volumul cutiei este de $V(x)=4x^3-39x^2+90x$ și determinați x pentru care volumul este maxim.

3. O piatră este aruncată vertical în sus și după t secunde înălțimea atinsă (în metri) este dată de legea $y(t)=100t-5t^2$. Determinați înălțimea maximă pe care o atinge piatra și timpul la care se realizează.

4. Lângă zidul casei cineva vrea să delimiteze printr-un gard de 20 m lungime, 3 laturi ale unui dreptunghi (a patra latură fiind zidul casei). Scrieți aria dreptunghiului în funcție de o latură. Determinații laturile care fac maximă aria.

5. O fabrică de frigidere produce n frigidere săptămânal la un cost de $300n+2000$ €. Funcția cerere este dată de $500-2n$. Care este numărul de frigidere fabricate săptămânal ca profitul să fie maxim ?

5.10. PROBLEME DE EXTREM. APLICAȚII ALE DERIVATELOR

Exerciții rezolvate

1. Să se scrie numărul 8 ca sumă a două numere pentru care suma cuburilor să fie cea mai mică posibilă.

R. Fie x,y cele două numere a căror sumă este egală cu 8. Deci $x+y=8$. De aici $y=8-x$. Ni se cere să determinăm numărul x pentru care funcția $f(x)=x^3+(8-x)^3$ ia cea mai mică valoare. Pentru a determina punctul de extrem al acestei funcții se calculează $f'(x)=48x-192$ și se rezolvă ecuația $f'(x)=0$, când se obține $x=4$. Se verifică faptul că $x=4$ este punct de minim al funcției când $\min f=128$. Din $x+y=8$ găsim $y=4$. Așadar cele două numere sunt : $x=y=4$.

2. Să se determine imaginea intervalului $[-1,3]$ prin funcția $f(x)=4x^3-12x$.

R. Trebuie să determinăm mulțimea valorilor $f(x)$ ale funcției când $x\in[-1,3]$, iar în virtutea continuității, aceasta este un interval $\left[\min\limits_{x\in[-1,3]} f(x), \max\limits_{x\in[-1,3]} f(x)\right]$. Deci practic trebuie să găsim cea mai mică și cea mai mare valoare a funcției pe intervalul $[-1,3]$. Se determină punctele de extrem ale funcției utilizând derivata. Avem $f'(x)=12x^2-12$, iar ecuația $f'(x)=0$ are soluțiile $x_1=-1, x_2=1$, puncte din intervalul $[-1,3]$. Se compară valoarea funcției în punctul $=1$ (situat în interiorul intervalului $[-1,3]$) cu valorile funcției la capetele intervalului. Se găsește $\max\limits_{x\in[-1,3]} f(x)=f(3)=72$, $\min\limits_{x\in[-1,3]} f(x)=f(1)=-8$. Deci $f([-1,3])=[-8,72]$.

3. Să se arate că $\left|x^3-3x\right|\le 2, \forall |x|\le 2$.

R. Inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu : $-2\le x^3-3x\le 2, \forall |x|\le 2$. Se consideră funcția $f:[-2,2]\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-3x$, căreia trebuie să-i găsim extremele. Ca și la problema precedentă vom compara valorile funcției în punctele în care f' se anulează cu valorile funcției la capetele intervalului. Avem $f'(x)=3x^2-3$, iar $f'(x)=0$ are soluțiile $x_1=-1, x_2=1$. Din tabelul următor:

se deduce că $\min\limits_{x\in[-2,2]} f(x)=f(-2)=f(1)=-2$,

iar $\max\limits_{x\in[-2,2]} f(x)=f(-1)=f(2)=2$.

Așadar: $-2\le f(x)\le 2, \forall x\in[-2,2]$.

x	-2		-1		1		2
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	-2	↗	2	↘	-2	↗	2

4. Să se determine dreptunghiul de arie maximă înscris într-un cerc de rază R.

R. Notăm cu x,y dimensiunile dreptunghiului $ABCD$ înscris în cercul de centru O și rază R (Fig. 37) ale cărui diagonale sunt diametre și deci se intersectează în O. Avem aria S a dreptunghiului egală cu $S=xy$. Ideea este de a exprima pe y în funcție de x și în acest fel aria S devine o funcție de o singură variabilă. Din triunghiul dreptunghic ABC, via teorema lui Pitagora, $x^2+y^2=4R^2$, iar de aici $(y>0)\ y=\sqrt{4R^2-x^2}$. Așadar aria S este egală cu $S(x)=x\sqrt{4R^2-x^2}, x\in(0,2R)$. Ni se cere x pentru care aria S este maximă. Derivata funcției S este $S'(x)=\frac{2\left(2R^2-x^2\right)}{\sqrt{4R^2-x^2}}$ iar ecuația $S'(x)=0$ are soluția $x=R\sqrt{2}\,(x>0)$.

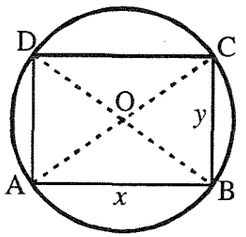


Fig. 37

Cum pentru $x<R\sqrt{2}$, $S'(x)>0$, iar dacă $x>R\sqrt{2}$ atunci $S'(x)<0$, deducem că $x=R\sqrt{2}$ este punct de maxim pentru S, când $\max\limits_{x\in(0,2R)} S(x)=2R^2$. Este ușor de văzut că $x=R\sqrt{2}$, $y=R\sqrt{2}$. Așadar dreptunghiul de arie maximă înscris în cercul de rază R este pătratul de latură $R\sqrt{2}$.

5. Perimetrul unui triunghi isoscel este $2p$. Care sunt lungimile laturilor sale astfel încât volumul corpului format prin rotirea triunghiului în jurul bazei să fie maxim ?

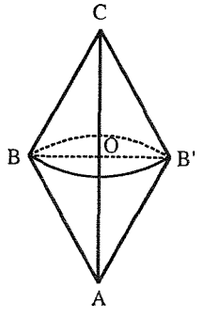


Fig. 38

R. Fie triunghiul ABC, de bază $AC=x$. Atunci $AB=BC=p-\frac{x}{2}$. Prin rotirea triunghiului ABC în jurul bazei AC se obține un corp de rotație format din două conuri (Fig.38). Vom exprima volumul V al corpului în funcție de variabila x. Avem $V=\frac{\pi\cdot h^2\cdot AC}{3}$, unde $h=OC=\sqrt{\left(p-\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}$ când $V=V(x)=\frac{1}{3}p\pi\cdot(p-x)x$.

Trebuie determinat x pentru care volumul corpului este maxim. Pentru aceasta calculăm derivata $V'(x)$ și o egalăm cu zero. Avem:

$V'(x)=\frac{1}{3}p\pi(p-2x)=0$ când $x=\frac{p}{2}$. Cum la stânga lui $x=\frac{p}{2}, V'(x)>0$, iar la dreapta lui $x=\frac{p}{2}, V'(x)<0$, deducem că $x=\frac{p}{2}$ este punct de maxim pentru V și $\max V(x)=\frac{\pi p^3}{12}$.

Triunghiul isoscel ce face maxim volumul V are laturile: $\frac{p}{2},\frac{3p}{4},\frac{3p}{4}$.

6. Se dau în plan punctele $A(0,1), B(2,3)$. Pe axa Ox să se determine punctul M pentru care suma $S=AM+MB$ este cea mai mică.

R. Fie $M(x,0)$ un punct de pe axa Ox. Atunci S devine: $S=S(x)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x-2)^2+9}$, o funcție de x, pentru care trebuie determinat punctul de minim. Pentru aceasta calculăm derivata S': $S'(x)=\dfrac{x\sqrt{x^2-4x+13}+(x-2)\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2-4x+13}}$. Ecuația $f'(x)=0$ are soluția $x=\dfrac{1}{2}$. Deci punctul căutat este $M\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ când $\min S(x)=2\sqrt{5}$.

Altfel. Se ia A', simetricul lui A în raport cu Ox. Dreapta $A'B$ taie pe Ox în punctul M cerut!

7.(Derivatele și afacerile) Funcția $y=\dfrac{x^2}{2}-8x+60$ este costul în mii € pentru fabricarea a x (în sute) produse. Care este numărul minim de produse pentru a minimiza costurile de producție ?

R. Din $y'=0$ rezultă $x=8$ pentru care $y''(8)>0$, ceea ce arată că $x=8$ este punct de minim. Costurile totale sunt minime dacă se produc 800 de produse. În acest caz $y(8)=28$ (mii) €.

Probleme propuse

1. Care număr pozitiv adunat cu inversul său dă cea mai mică sumă?
2. Să se descompună numărul 36 ca produs de două numere pentru care suma pătratelor lor este cea mai mică posibilă.
3. Să se scrie 13 ca suma a două numere pozitive x,y pentru care expresia $3\sqrt{x}+2\sqrt{y}$ este maximă.
4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-3x+3}$. Să se determine imaginea lui f.
5. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$ nu poate avea valori mai mari decât $\dfrac{3}{2}$ și valori mai mici decât $\dfrac{1}{2}$.
6. Să se determine cea mai mică și cea mai mare valoare a funcțiilor:
1) $f(x)=x^3-6x+1, x\in[-1,2]$; 2) $f(x)=\left[6x^5-15x^4+10x^3+1\right], x\in[-1,3]$, [ ] este partea întreagă; 3) $f(x)=\dfrac{7x^2-8}{x^2+x+1}, x\in[-1,3]$.
7. Pentru ce valoare a parametrului a valorile funcției $f(x)=x^3-6x^2+9x+a$ în punctul $x=2$ și în punctele de extrem, luate într-o anumită ordine, formează o progresie geometrică?
8. Să se demonstreze inegalitățile:
1) $1\le x^5-x^3+x+2\le 3, \forall x\in[-1,1]$; 2) $5\sqrt[3]{e}\le\left(3x^2-7x+7\right)e^x\le\dfrac{11}{3}\sqrt[3]{e^2}, \forall x\in\left[0,\dfrac{2}{3}\right]$;
3) $\dfrac{1}{4}\le\sin^6 x+\cos^6 x\le 1, \forall x\in\mathbb{R}$; 4) $\cos x\sin 2x>-\dfrac{7}{9}, \forall x\in[-\pi,\pi]$;
5) $-\dfrac{11}{27}\le 4x^3-x|x-2|\le 105, \forall x\in[0,3]$; 6) $0\le(x-1)^2\sqrt{x^2-2x+3}\le 4\sqrt{6}, \forall x\in[0,3]$.
9. Cât trebuie să fie unghiul de la vârful unui triunghi isoscel de arie dată astfel încât raza cercului înscris în acest triunghi să fie cea mai mare ?
10. În triunghiul de bază a și înălțime h să se înscrie un dreptunghi de arie maximă.
11. Laturile neparalele ale unui trapez și baza mică sunt de 10 cm. Să se determine baza mare astfel încât aria trapezului să fie maximă.
12. Într-un semicerc se înscrie un trapez care are baza mare diametrul semicercului. Să se determine unghiul de la baza trapezului pentru ca aria trapezului să fie maximă.

13. Perimetrul unui triunghi isoscel este $2p$. Care sunt laturile sale astfel încât volumul corpului format prin rotirea triunghiului în jurul înălțimii să fie maxim?
14. Volumul unui prisme triunghiulare regulate este V. Cât trebuie să fie latura bazei astfel încât aria suprafeței totale să fie cea mai mică ?
15. Determinați înălțimea cilindrului de volum maxim posibil care poate fi înscris într-o sferă de rază R.
16. Să se determine relația între raza R și înălțimea h a unui cilindru de volum dat, care are aria suprafeței totale cea mai mică posibilă.
17. Determinați înălțimea conului circular drept de volum maxim, care poate fi înscris într-o sferă de rază R.
18. Să se determine înălțimea unui con circular drept circumscris unei sfere de rază R, care are cel mai mic volum.
19. Dintre toți cilindrii drepți înscriși într-un con circular drept de rază R și înălțime h, care este cel cu volumul maxim?
20. Într-o emisferă se înscrie un trunchi de con având ca bază cercul emisferei. Ce înălțime trebuie să se dea trunchiului de con pentru ca aria sa laterală să fie minimă?
21. Determinați laturile dreptunghiului cu cea mai mare arie, care poate fi înscris în elipsa: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$.
22. Care este punctul de pe elipsa $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{18}-1=0$ în care tangenta formează cu axele de coordonate un triunghi de arie minimă?
23. Se dau punctele $A(1,4), B(3,0)$ pe elipsa $2x^2+y^2=18$. Să se determine al treilea punct C pe elipsă pentru care aria triunghiului ABC este maximă.
24. Pe parabola $y=x^2$ să se determine punctul cel mai apropiat de dreapta $y=2x-2$.
25.(Derivatele și afacerile) Funcția $y=12x-2a-ax^2$ descrie profitul (în sute de €) al unei fabrici care utilizează x mașini pentru a fabrica produsele, iar a este numărul de curse într-o zi.
a) Arătați că sistemul este neeconomic dacă se fac $a=4$ livrări pe zi.
b) Dacă se fac $a=3$ livrări pe zi, determinați numărul x de mașini care ar trebui utilizate ca profitul să fie maxim.
26.(Derivatele și afacerile) Un fabricant știe că dacă x (sute) produse sunt cerute într-o anumită săptămână, atunci: 1) funcția cost total (în mii €) este $3x+14$ și 2) funcția venit total este (în mii €) $19x-2x^2$. Determinați:
a) funcția profit ($P(x)=V(x)-C(x)$); b) punctul care precizează când avem profit și când suntem în pierdere; c) nivelul de cereri care maximizează profitul.

5.11. ASIMPTOTE

O problemă importantă în trasarea graficelor funcțiilor este determinarea asimptotelor. Într-o exprimare superficială **vom înțelege prin asimptotă o dreaptă** (verticală, orizontală sau oblică) față de care graficul funcției "se apropie oricât de mult".O astfel de problemă se poate pune pentru funcții ce au ramuri spre infinit, adică funcții al **căror grafic nu este conținut într-un dreptunghi**. Vom distinge două categorii de asimptote: verticale și oblice.

1. Asimptote verticale

Fie $f:E\to\mathbb{R}, E\subset\mathbb{R}, a\in\mathbb{R}$ **punct de acumulare** pentru E.

Definiție. Se spune că dreapta $x=a$ este **asimptotă verticală la stânga** pentru f, dacă $\lim\limits_{x\nearrow a} f(x)=+\infty$ sau $\lim\limits_{x\nearrow a} f(x)=-\infty$.

Observații. 1) Dreapta $x=a$, într-un reper cartezian xOy, este o dreaptă paralelă cu Oy (deci „verticală").

2)Interpretarea geometrică. Dacă $x=a$ este asimptotă verticală la stânga a lui f, iar $M(x,f(x))$ și $N(a,f(x)), x<a$ (Fig.39), atunci lungimea segmentului MN tinde la zero când $x\nearrow a$ și ordonata lui M tinde către $+\infty$ sau $-\infty$.

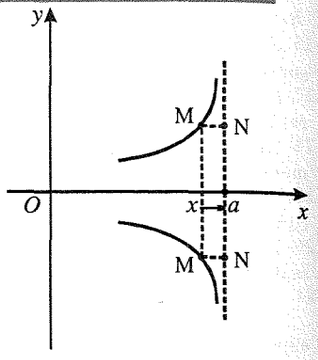


Fig. 39

Exemplu. **Fie funcția**

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, x<1\\ 1, x\geq 1\end{cases}$. **Să observăm că**

$\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x)=\dfrac{1}{0_-}=-\infty$, **ceea ce arată că** $x=1$ **este asimptotă verticală la stânga pentru** f.

Analog se definește conceptul de asimptotă verticală la dreapta. Mai precis are loc următoarea:

Definiție. Se spune că dreapta $x=a$ este **asimptotă verticală la dreapta** pentru f, dacă $\lim\limits_{x\searrow a} f(x)=+\infty$ sau $\lim\limits_{x\searrow a} f(x)=-\infty$.

Observații analoge cu acelea de la definiția precedentă se pot face și în acest caz.

Exemplu. **Fie funcția** $f:(3,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x-3}$. **Avem** $\lim\limits_{x\searrow 3} f(x)=\dfrac{1}{0_+}=\infty$, **ceea ce arată că dreapta** $x=3$ **este simptotă verticală la dreapta pentru** f.

Definiție. Se spune că dreapta $x=a$ este **asimptotă verticală** pentru f dacă ea este asimptotă verticală atât la stânga cât și la dreapta sau numai lateral.

Observații. 1) Pentru existența asimptotei verticale **nu este necesar ca** f **să fie definită în** $x=a$ (vezi exemplul precedent, f nu este definită în $x=3$). Evident f nu are asimptotă verticală pe $x=a$, dacă punctul $x=a$ este de continuitate pentru $f\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)\in\mathbb{R}\right)$.

2) Funcțiile date spre studiu sunt de cele mai multe ori funcții elementare sau compuneri de funcții elementare, iar pentru astfel de funcții asimptotele verticale se determină ușor:

- funcția polinomială fiind continuă pe $\mathbb{R}$, nu are asimptote verticale;

- funcția rațională are ca asimptote verticale dreptele $x=a$, unde a este zero al numitorului;
- funcția logaritmică $f(x)=\ln x$, are ca asimptotă verticală dreapta $x=0$, iar dacă $f(x)=\ln g(x)$, atunci vor fi asimptote verticale dreptele $x=a$, unde a este soluție a ecuației $g(x)=0$.
- funcția $f(x)=\operatorname{tg} x$, are asimptote verticale dreptele $x=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$ (acestea fiind punctele în care funcția nu este definită); etc.

Exerciții rezolvate

Să se determine asimptotele verticale pentru funcțiile $f:E\to\mathbb{R}$ (E **fiind domeniul maxim de definiție):**

1) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$; 2) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{(x+1)(x-1)}}$; 3) $f(x)=\ln\left(x^2-5x+6\right)$.

R. 1) **În acest caz** $E=\mathbb{R}-\{\pm 2\}$. **Deci posibile asimptote verticale sunt dreptele** $x=\pm 2$. **Cum** $\lim\limits_{x\nearrow -2}\dfrac{x^2}{x^2-4}=+\infty$ **și** $\lim\limits_{x\searrow -2}\dfrac{x^2}{x^2-4}=-\infty$ **rezultă că** $x=-2$ **este asimptotă verticală a lui** f. **De asemenea** $\lim\limits_{x\nearrow 2} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\searrow 2} f(x)=+\infty$, **adică** $x=2$ **este asimptotă verticală a lui** f.

2) **Domeniul de definiție al funcției este** $E=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. **Din** $\lim\limits_{x\nearrow -1} f(x)=\lim\limits_{x\searrow 1} f(x)=\infty$ **se deduce că dreptele** $x=-1$ **și** $x=1$ **sunt asimptote verticale pentru** f.

3) **Avem** $E=(-\infty,2)\cup(3,\infty)$. **Se găsește ușor că** $\lim\limits_{x\nearrow 2} f(x)=\lim\limits_{x\searrow 3} f(x)=-\infty$ **ceea ce arată că dreptele** $x=2, x=3$ **reprezintă asimptotele verticale ale lui** f.

Exerciții propuse

Să se determine asimptotele verticale pentru funcțiile $f:E\to\mathbb{R}$ (E **fiind domeniul maxim de definiție):**

1) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$; 2) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-5x+4}$; 3) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$; 4) $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+\ln x}$;

5) $f(x)=x+\ln\left(x^2-1\right)$; 6) $f(x)=e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$; 7) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}e^x$; 8) $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

9) $f(x)=xe^{\frac{1}{|x-1|}}$; 10) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-2x}}$.

2.Asimptote oblice

Cea de-a doua categorie de asimptote o constitue asimptotele oblice.

Fie $f:E\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ unde E **conține un interval de forma** (a,∞).

Definiție. Se spune că dreapta $y=mx+n$ este **asimptotă oblică la ramura spre $+\infty$ a funcției** f, dacă distanța dintre dreaptă și grafic, măsurată pe verticală, tinde către zero când x tinde către ∞, adică dacă $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-mx-n\right]=0$.

Analog se poate defini conceptul de asimptotă oblică la ramura spre $-\infty$, admițând că E **conține un interval de forma** $(-\infty,b), b\in\mathbb{R}$.

Definiție. Se spune că dreapta $y=m'x+n'$ este **asimptotă oblică la ramura spre $-\infty$ a funcției** f, dacă distanța dintre dreaptă și grafic, măsurată pe verticală, tinde către zero când x tinde către $-\infty$, adică dacă $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-m'x-n'\right]=0$.

În Fig.40 avem reprezentarea geometrică a asimptotei oblice la ramura spre $+\infty$ unde $M(x,mx+n), N(x,f(x))$ sunt puncte situate pe dreaptă și respectiv pe grafic.

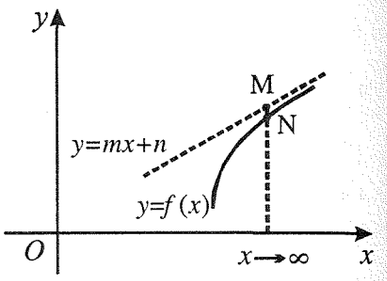


Fig. 40

Observații. **1)** În general, asimptotele unei funcții sunt numite **asimptote la graficul funcției** (sau vom spune că **graficul are asimptote**).

2) În general, asimptotele oblice la $+\infty$ și $-\infty$ (în cazul în care există) sunt diferite.

3) Evident pentru $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}, \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ **nu are sens problema asimptotelor oblice la** $+\infty$ sau $-\infty$ ($\pm\infty$ **nu sunt puncte de acumulare pentru intervalul** (α,β)).

4) Există funcții care nu au asimptote.

Problema de care ne vom ocupa în continuare este aceea a existenței asimptotelor oblice și a modului de determinare a lor (deci a elementelor m,n și respectiv m',n' cu ajutorul lui f). Are loc următoarea:

Teoremă. 1) Dreapta $y=mx+n$ este asimptotă oblică la ramura spre $+\infty$ a lui f dacă și numai dacă $m,n\in\mathbb{R}$ (m,n **sunt finite**) unde

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\ n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right], m\neq 0.$$

2) Dreapta $y=m'x+n'$ este asimptotă oblică la ramura spre $-\infty$ a lui f dacă și numai dacă $m',n'\in\mathbb{R}$ (m',n' **sunt finite**) unde

$$m'=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\ n'=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-m'x\right], m'\neq 0.$$

Demonstrație. Vom demonstra **1)**, pentru **2)** procedându-se analog. Presupunem că $y=mx+n$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ pentru f și să determinăm pe m și n. Așadar știm că $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-mx-n\right]=0$.

Avem: $f(x)-mx=\left[f(x)-mx-n\right]+n$ și deci

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-mx-n\right]+n=0+n=n$ și de asemenea,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-m\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-mx}{x}=\frac{n}{\infty}=0$. Cum $\frac{f(x)}{x}=\left(\frac{f(x)}{x}-m\right)+m$ se deduce că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-m\right)+m=m$. Reciproc, dacă au loc relațiile

$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]$, $m,n\in\mathbb{R}, m\neq 0$, atunci se găsește ușor că $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-mx-n\right]=0$, relație care arată că $y=mx+n$ este asimptotă oblică la $+\infty$ pentru f. ■

Observații. **1)** Practic pentru a determina asimptota oblică la $+\infty$ pentru f se procedează astfel:

- se calculează $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$;
- dacă m **este finit și nenul** atunci se calculează limita $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]$;
- dacă și n **este finit**, atunci dreapta $y=mx+n$ reprezintă asimptota oblică spre $+\infty$ a lui f.

Analog pentru determinarea asimptotei oblice spre $-\infty$ a lui f.

2) Dacă cel puțin una din cele două limite nu există sau este infinită, curba nu are asimptotă oblică la $+\infty$ ($-\infty$).

3) În teorema precedentă am cerut $m\neq 0$. Dacă $m=0$ și n este **finit**, atunci $y=n$ se numește **asimptotă orizontală spre** $+\infty$ a lui f. Dacă $m'=0$ și n' este finit, atunci dreapta $y=n'$ se numește **asimptotă orizontală spre** $-\infty$ a lui f. Denumirea de „orizontală” pentru asimptotă provine din aceea că dreapta $y=n\,(y=n')$ este paralelă cu axa Ox.

Aşadar:

1) dacă $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=n, n$ finit, atunci dreapta $y=n$ este **asimptotă orizontală** spre $+\infty$ **pentru** f ;

2) dacă $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=n', n'$ finit, atunci dreapta $y=n'$ este **asimptotă orizontală** spre $-\infty$ **pentru** f .

Observaţie . O funcţie f **nu poate admite atât asimptotă orizontală cât şi oblică spre** $+\infty$ $(-\infty)$.

Exerciţii rezolvate

Să se determine asimptotele (orizontale, oblice) pentru funcţiile $f:E\to\mathbb{R}$, E **fiind domeniul maxim de definiţie.**

1) $f(x)=\dfrac{|x|}{x+3}$; 2) $f(x)=\dfrac{x^2}{3x+1}$; 3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x}$; 4) $f(x)=|x|e^{\frac{1}{x}}$.

R. 1) $E=\mathbb{R}-\{-3\}$. Se explicitează funcţia şi se obţine: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x+3}, x\geq 0\\ \dfrac{-x}{x+3}, x<0, x\neq -3\end{cases}$.

Este uşor de văzut că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$, adică $y=1, y=-1$ sunt asimptote orizontale pentru f spre $+\infty$ şi respectiv spre $-\infty$.

2) $E=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$. Cum $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)\notin\mathbb{R}$ rezultă că f nu admite asimptote orizontale spre $\pm\infty$. Se caută asimptota oblică la ramura spre $+\infty$, de forma $y=mx+n$ pentru care se calculează $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{3x^2+x}=\dfrac{1}{3}$ şi

$n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{3x+1}-\dfrac{x}{3}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x}{3(3x+1)}=-\dfrac{1}{9}$. Deci $y=\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{9}$ este asimptota oblică de la $+\infty$ pentru graficul lui f . Se vede imediat că aceeaşi dreaptă reprezintă asimptota oblică şi la $-\infty$.

3) $E=\mathbb{R}-\{0\}$. În acest caz $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2x}=\dfrac{1}{2}$ în timp ce $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2x}=-\dfrac{1}{2}$. Deci $y=\dfrac{1}{2}$ şi $y=-\dfrac{1}{2}$ reprezintă asimptotele orizontale la $+\infty$ şi respectiv $-\infty$ pentru funcţia f .

4) $E=\mathbb{R}^*$. Funcţia se explicitează astfel: $f(x)=\begin{cases}xe^{\frac{1}{x}}, x>0\\ -xe^{\frac{1}{x}}, x<0\end{cases}$.

. Se vede uşor că $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$, adică f nu posedă asimptote orizontale spre $\pm\infty$.

Căutăm asimptote oblice:

- spre $+\infty$ de forma $y=mx+n$, unde $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$ şi

  $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=1$. Deci $y=x+1$ este asimptota oblică spre $+\infty$ pentru f .

- spre $-\infty$ de forma $y=m'x+n'$, unde $m'=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-e^{\frac{1}{x}}\right)=-1$ şi

  $n'=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right]=-1$. Deci $y=-x-1$ este asimptota oblică la $-\infty$ pentru f .

Exerciţii propuse

1 **Să se determine asimptotele (orizontale, oblice) pentru funcţiile** $f:E\to\mathbb{R}, E$ **fiind domeniul maxim de definiţie.**

1) $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$; 2) $f(x)=\dfrac{x}{2x-1}$; 3) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+5}$; 4) $f(x)=\sqrt{x^2-x}-x$;

5) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; 6) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$; 7) $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$;

8) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{|1-x^2|}}$; 9) $f(x)=\ln\dfrac{x-1}{x+2}$; 10) $f(x)=|x-1|e^{\frac{1}{x}}$; 11) $f(x)=\sin 2x+2\cos x$;

12) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$; 13) $f(x)=\dfrac{x}{2}+\operatorname{arctg}x$; 14) $f(x)=x^2e^{\frac{1}{x}}$.

2 **Fie** $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x+1}$. **Să se determine** a,b **dacă** $y=x+1$ **este asimptotă, iar în** $x=1$, f **are un extrem.**

REZUMATUL CAPITOLULUI

Noțiunea	Definiție. Caracterizare.	Interpretarea geometrică. Notații
Derivata unei funcții într-un punct	$f:E\to\mathbb{R}, E$ interval, $x_0\in E\cap E'$ • f are derivată în $x_0 \Leftrightarrow$ există $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ în $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ • f este derivabilă în $x_0 \Leftrightarrow$ există $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ în $\mathbb{R}$	• $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$, este derivata funcției f în x_0 • Dacă $f'(x_0)\in\mathbb{R}$, atunci acest număr este coeficientul unghiular al tangentei la grafic în $(x_0,f(x_0))$. Ecuația tangentei este : $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ • Dacă $f'(x_0)=\pm\infty$, atunci tangenta la grafic în $(x_0,f(x_0))$ este dreapta: $x=x_0$
Derivatele laterale	$f:E\to\mathbb{R}, E$ interval $x_0\in E, x_0$ punct de acumulare pentru $E\cap(-\infty,x_0)$ și pentru $E\cap(x_0,\infty)$ • f are derivată la stânga în $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\nearrow x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in\overline{\mathbb{R}}$ • f are derivată la dreapta în $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\searrow x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in\overline{\mathbb{R}}$	$\lim\limits_{x\nearrow x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f_s'(x_0)$ $\lim\limits_{x\searrow x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f_d'(x_0)$ • Dacă $f_s'(x_0), f_d'(x_0)\in\mathbb{R}$, atunci aceste numere sunt pantele semitangentelor la grafic în $(x_0,f(x_0))$
Puncte de întoarcere	$(x_0,f(x_0))$ este punct de întoarcere pentru graficul lui f dacă $f_s'(x_0), f_d'(x_0)$ sunt infinite și diferite	(f este continuă în x_0)
Punct unghiular	$(x_0,f(x_0))$ este punct unghiular pentru graficul lui f dacă $f_s'(x_0), f_d'(x_0)$ sunt diferite și cel puțin una este finită	(f este continuă în x_0)
Funcție derivată	$f:E\to\mathbb{R}, I\subseteq E$, interval • f este derivabilă pe intervalul I dacă este derivabilă în fiecare punct din I	$D_{f'}=\{x\in E \mid \exists f'(x)\in\mathbb{R}\}$ se numește domeniul de derivabilitate al funcției f Funcția $f':D_{f'}\to\mathbb{R}, x\to f'(x)$ se numește derivata lui f

Operații cu funcții derivabile	$f,g:E\to\mathbb{R}$ derivabile în $x_0\in E\cap E'$ (pe E) Atunci : 1) $f+g$ este derivabilă în x_0 (pe E) și $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$ 2) $f\cdot g$ este derivabilă în x_0 (pe E) și $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x)+f(x_0)g'(x_0)$ 3) $\dfrac{f}{g}$ este derivabilă în x_0 (dacă $g(x_0)\neq 0$) (pe E, dacă $g(x)\neq 0,\forall x\in E$) și $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0)=\dfrac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$	$(f+g)'=f'+g'$ Derivata sumei este egală cu suma derivatelor $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$ $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$
Derivarea funcțiilor compuse	$I\xrightarrow{f}J\xrightarrow{g}\mathbb{R}$, f derivabilă în x_0, g derivabilă în $f(x_0)=y_0$. Atunci $(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$	$(g\circ f)'=g'(f)\cdot f'$
Teorema lui Lagrange	$f:[a,b]\to\mathbb{R}, a<b$. 1) f continuă pe $[a,b]$; 2) f derivabilă (a,b); Atunci $\exists c\in(a,b)$ astfel încât $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$	$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$, adică panta dreptei determinată de punctele $A(a,f(a)), B(b,f(b))$ este aceeași cu a unei tangente la grafic într-un punct $(c,f(c))$ situat pe curba AB
Consecințe ale teoremei lui Lagrange	1. Dacă o funcție derivabilă are derivata nulă pe un interval, atunci ea este constantă pe acest interval 2. Dacă două funcții derivabile au derivatele egale pe un interval, atunci ele diferă printr-o constantă pe acel interval 3.(Monotonia unei funcții derivabile) $f:E\to\mathbb{R}$ • $f'(x)>0,\forall x\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe E • $f'(x)<0,\forall x\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe E	Pentru a determina constanta, se alege $x_0\in E$ și se calculează $f(x_0)$. $f,g:E\to\mathbb{R}, E$ interval și $f'=g'\Rightarrow\exists c\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x)-g(x)=c,\forall x\in E$ Pentru a determina intervalele de monotonie ale unei funcții derivabile se procedează astfel: 1) Se rezolvă ecuația $f'(x)=0$; 2) Se determină intervale pe care f păstrează același semn

Teste de evaluare

Testul 1 (1 punct din oficiu)

1. a) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} xe^x, x\le 1 \\ -x^2+mx+n, x>1, m,n\in\mathbb{R} \end{cases}$.

Să se determine m,n astfel încât f să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

b) Să se determine punctele de extrem ale lui f pentru m,n de la a).

(ADMITERE, CHIMIE-FIZICĂ, GALAȚI, 1990). (2 puncte)

2. Să se arate că $\ln x > \dfrac{2(x-1)}{x+1}$, $x>1$. (1 punct)

(ADMITERE, A.S.E., BUCUREȘTI, 1991)

3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{(x+3)(x-1)^2}{x^2}$. Se cer:

a) asimptota oblică la $+\infty$; b) punctele de extrem local. (2 puncte)

(ADMITERE, A.S.E., BUCUREȘTI, 1992)

4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} 2x-\sqrt{a^2x^2+ax+1}, x\le 1 \\ \sqrt{x-1}+|a|\sqrt{x}, x>1 \end{cases}$.

a) Să se discute continuitatea lui f după valorile parametrului real a.

b) Pentru $a=-1$ să se studieze derivabilitatea lui f. (2puncte)

(ADMITERE, A.S.E., CLUJ, 1993)

5. Să se calculeze limitele: a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(m\cos\dfrac{1}{x}-n\cos\dfrac{2}{x}\right)=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow m=n=1$.

(2 puncte)

Testul 2 (1 punct din oficiu)

1. Se consideră funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} ax^2-3x+1, x\in[-1,0) \\ x^2+bx-c, x\in[0,1] \end{cases}$.

Să se determine valorile parametrilor a,b,c pentru care funcția îndeplinește condițiile teoremei lui Rolle pe $[-1.1]$. (1,5 puncte)

(ADMITERE, INSTITUTUL MARINĂ CIVILĂ, CONSTANȚA 1998)

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\left(x^2+mx\right)e^{-x}$, $m\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că pentru orice $m\in\mathbb{R}$, funcția f admite două puncte de extrem și două puncte de inflexiune.

b) Să se calculeze $f^{(n)}(0), n\in\mathbb{N}$. (2 puncte)

(ADMITERE, MATEMATICĂ, UNIVERSITATE, PLOIEȘTI, 1998)

3. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\begin{cases} 3x-2, x\le 0 \\ 4x-2+\ln\left(x^2-x+1\right), x>0. \end{cases}$

1) Studiați derivabilitatea funcției f pe $\mathbb{R}$. 2) Enunțați teorema lui Lagrange.

3)Aplicați teorema lui Lagrange funcției $g:[-1,1]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)$, $\forall x\in[-1,1]$, precizând valorile punctului intermediar c. (1,5 puncte)

(ADMITERE, F.S.E., UNIVERSITATE, SIBIU, 1998)

4. 1) Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx-\ln\left(1+x^2\right)$ să fie monoton descrescătoare pe $\mathbb{R}$ (ADMITERE, MATEMATICĂ, IAȘI, 1996)

2) Să se arate că $x>1+\ln x$, $\forall x>0, x\ne 1$. (2 puncte)

(ADMITERE, MATEMATICĂ, UNIVERSITATE, TIMIȘOARA, 1997)

5. Să se calculeze limitele: a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^n}, n\in\mathbb{N}^*$; b) $\lim\limits_{x\searrow e}(\ln x-1)\ln(x-e)$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. (2 puncte)

Testul 3 (tip grilă) (1 punct din oficiu)

1. Care este intervalul valorilor parametrului real m pentru care ecuația $x^3-3x+m=0$ are toate rădăcinile reale ? a) $m\in[0,1]$; b) $m\in[-1,1]$; c) $m\in[0,2]$; d) $m\in[-1,3)$; e) $m\in[-2,2]$.

(2 puncte) (ADMITERE, UNIVERSITATEA ROMÂNO-AMERICANĂ, BUCUREȘTI, 1998)

2. Care este valoarea limitei: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$?

a) $\dfrac{1}{2}$; b) 2; c) 1; d) ∞; e) 0. (1 punct)

(ADMITERE, UNIVERSITATEA ROMÂNO-AMERICANĂ, BUCUREȘTI, 1998)

3. Mulțimea valorilor lui x pentru care sunt adevărate inegalitățile: $\dfrac{x^2}{x^2+1}\le\ln\left(1+x^2\right)\le x^2$, este:

a) $(0,\infty)$; b) $(-\infty,\infty)$; c) $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$; d) $(-1,1)$; e) $(-1,\infty)$ (2 puncte)

(ADMITERE, UNIVERSITATEA TEHNICĂ ,CLUJ, 1998)

4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x+x$. Care afirmație este adevărată?

a) funcția f are extreme locale; b) funcția f are asimptotă verticală; c) funcția f are asimptotă oblică; d) funcția f are asimptotă orizontală. (2 puncte) (ADMITERE, F.S.E., PITEȘTI, 1998)

5. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}-\{a\}\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=\dfrac{x^2+2px+5}{x-a}$. Funcția f admite extreme locale în $x=-1$ și $x=3$ pentru a și p având valorile: a) $a=2, p=-1$;

b) $a=1, p=1$; c) $a=-3, p=1$; d) $a=1, p=-1$; e) $a=3, p=-2$. (2 puncte)

(ADMITERE, UNIVERSITATE, TÂRGU MUREȘ, 1998)

6. REPREZENTAREA GRAFICĂ A FUNCȚIILOR

În acest ultim capitol sunt realizate graficele unor funcții elementare, utilizând cunoștințe dobândite până acum la analiza matematică. Plecând de la graficul funcției f se discută și rezolvă grafic ecuația $f(x)=m, m\in\mathbb{R}$, adică se determină numărul de soluții ale ecuației și se precizează intervalele cărora le aparțin. Se reprezintă grafic principalele conice: cercul, elipsa, hiperbola, parabola.

- Reprezentarea grafică a funcțiilor 526
- Reprezentarea grafică a conicelor 544
- Probleme propuse 551
- Teste de evaluare 554

6.1. REPREZENTAREA GRAFICĂ A FUNCȚIILOR

Scopul acestui capitol este de a realiza reprezentarea geometrică a unei funcții $f: A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ceea ce vom numi într-o formulare uzuală **trasarea graficului funcției** f sau **desenarea graficului funcției** f într-un reper cartezian xOy ales. Acest lucru îl vom realiza cu ajutorul cunoștințelor studiate până în acest moment. Se obișnuiește parcurgerea unor etape în cadrul cărora se stabilesc **diferite elemente,** utile în trasarea graficului.

Uneori, fie din motive ce privesc **dificultatea unor calcule**, fie din motive de simplitate a funcției se renunță la determinarea unor elemente sau se renunță la o etapă (derivata a doua) sau chiar mai mult.

Până la urmă trasarea unui grafic **ține de exercițiu**. De aceea recomandăm cititorilor să aibă răbdarea necesară, de fiecare dată, pentru a parcurge toate etapele necesare ce premerg trasării graficului, până la obținerea unei dexterități. Etapele de parcurs le vom marca cu litere romane. Aceste etape sunt:

I. Domeniul E de definiție al funcției

Acesta poate fi indicat în mod explicit în enunț sau în caz contrar el este format din toate punctele pentru care operațiile prin care este definită funcția au sens (determinând **domeniul maxim** pe care poate fi definită funcția).

1. Determinarea perioadei și a simetriilor permit limitarea mulțimii pe care studiem funcția (**dacă funcția are perioada principală** T_0, atunci **se va studia funcția pe un interval de lungimea unei perioade**, de exmplu $[0,T_0]$; dacă am trasat graficul funcției pe acest interval, atunci generarea lui pe întreg domeniul de

definiție se face prin translatarea spre dreapta pe intervalele $[T_0,2T_0],[2T_0,3T_0],\ldots$ și spre stânga pe intervalele $[-T_0,0],[-2T_0,-T_0],\ldots$ a graficului realizat pe intervalul $[0,T_0]$; **dacă funcția este pară** $(f(-x)=f(x),\forall x\in E)$, **sau impară** $(f(-x)=-f(x),\forall x\in E)$ atunci **este suficient studiul funcției pe submulțimea** $E\cap[0,\infty)$; dacă **funcția este pară** atunci **graficul funcției** (prescurtat G_f) **este simetric în raport cu axa** Oy, iar dacă **funcția este impară**, atunci **graficul este simetric în raport cu originea** O **a reperului cartezian ales** xOy).

2. Determinarea intersecțiilor graficului funcției cu axele de coordonate

- $G_f\cap Oy$: Dacă $0\in E$, atunci se calculează $f(0)$ și avem pentru grafic punctul $(0,f(0))$.
- $G_f\cap Ox$: Se rezolvă ecuația $f(x)=0$. Se reține acele soluții x, situate în domeniul de definiție E.

3. Calcularea valorilor sau limitelor lui f la capetele intervalelor lui E.

II. Derivata întâi

1. Se stabilește mulțimea punctelor în care funcția este derivabilă și se precizează natura punctelor în care f nu este derivabilă (**unghiulare, de întoarcere**).
2. Se calculează prima derivată, f'.
3. Se rezolvă ecuația $f'(x)=0$. Soluțiile $x_i^{'}\in E$ sunt eventuale puncte de **minim** sau **maxim** ale lui f. Se calculează $f\left(x_i^{'}\right)$. Se stabilește semnul lui f' pe intervale. Această ultimă acțiune se poate realiza în etapa V.

III. Derivata a doua

1. Se calculează derivata a doua, f''.
2. Se rezolvă ecuația $f''(x)=0$. Se reține acele soluții $x_i^{''}\in E$, ele fiind eventuale puncte de inflexiune ale graficului.

Se calculează $f\left(x_i^{''}\right)$. Se stabilește semnul lui f'' pe intervale.

Această ultimă acțiune se poate realiza în etapa V.

Facem observația că această etapă se elimină dacă expresia lui f'' este complicată.

Această etapă permite precizarea formei graficului funcției pe intervale (**convex** dacă $f''>0$ și **concav** dacă $f''<0$).

IV. Asimptote

Se determină cele două categorii de asimptote (dacă există).

1) Asimptote verticale. Se determină punctele a, pentru care cel puțin una din limitele laterale $\lim\limits_{x\nearrow a} f(x)$, $\lim\limits_{x\searrow a} f(x)$ este infinită.

2) Asimptote oblice

- **la ramura spre** $+\infty$ are forma: $y=mx+n$, unde

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\ n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right],\ m,n\in\mathbb{R}.$$

- **la ramura spre** $-\infty$ are forma: $y=m'x+n'$, unde

$$m'=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\ n'=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-m'x\right],\ m',n'\in\mathbb{R}.$$

Dacă $m=0, n\in\mathbb{R}$ atunci $y=n$ este **asimptotă orizontală spre** $+\infty$; dacă $m'=0, n'\in\mathbb{R}$, atunci $y=n'$ este **asimptotă orizontală spre** $-\infty$.

V. Tabelul de variație

Rezultatele din etapele precedente vor fi cumulate într-un tabel numit **tabelul (tabloul) de variație al funcției** alcătuit din următoarele rubrici orizontale:

1. Prima rubrică are **domeniul de definiție** E sau **domeniul de studiu** $[0,T_0]$, $E\cap[0,\infty)$ în care sunt trecute valorile importante ale lui $x: x_i, x_i', x_i'', 0$ precum şi semnele: | (bară verticală) sau ||| (două bare verticale continue, cu spațiul dintre ele haşurat) pentru arăta că f nu este definită acolo.

2. A doua rubrică **conține semnul primei derivate** şi numărul 0 (dacă există) precum şi semnele: /// (cu specificația că f' nu este definită) şi ¦ (bară verticală punctată) pentru a marca faptul că în acel punct f nu este derivabilă.

3. În rubrica a treia se trec **valorile corespunzătoare ale funcției** $f, f(x_i), f(x_i'), f(x_i''), f(0)$, **limitele funcției (sau valorile funcției) la capetele intervalelor din** E precum şi săgețile ↗ sau ↘ care marchează monotonia funcției (creşterea sau descreşterea funcției). De asemenea, în această linie pot figura semnele |, /// pentru a preciza că f nu este definită într-un punct sau pe un interval. Dacă în această rubrică apar anomalii de genul funcția f „urcă" de la o valoare mai mare la una mai mică, înseamnă că s-a greşit la semnul derivatei sau la limite ori valori în aceste puncte, etc.

4. Rubrica a patra conține **semnul celei de-a doua derivate** şi numărul 0 (dacă există), semnele de la 2, precum şi ∪ dacă $f''>0$ sau ∩ dacă $f''<0$.

În cazul dificultăților de calcul pentru f'' sau în rezolvarea ecuației $f''(x)=0$, această rubrică se omite. Deci dacă n-avem etapa III, atunci această linie va lipsi din tabel.

VI. Trasarea graficului

Într-un reper cartezian xOy se vor marca **prin linii punctate** asimptotele după care **se vor trece toate punctele**: $(x_i,0), (x_i', f(x_i')), (x_i'', f(x_i'')), (0, f(0))$.

Aceste puncte se unesc printr-o curbă continuă, ținând seama de asimptote, monotonie, convexitate, concavitate, etc.

Pentru a obține graficul funcției $x\to|f(x)|$, se trasează uşor graficul funcției $x\to f(x)$. Se reține acele porțiuni ale graficului, pentru care $y=f(x)$ este mai mare sau egal cu zero, ceea ce înseamnă că aceste porțiuni sunt situate deasupra axei Ox. Porțiunile din grafic situate sub axa Ox, se simetrizează în raport cu această axă şi se obține astfel întreg graficul funcției $x\to|f(x)|$.

Reprezentarea grafică a funcțiilor. Rezolvarea grafică a ecuațiilor

Prezentăm în continuare graficele câtorva funcții precum şi rezolvarea grafică a unor ecuații care depind de un parametru.

1) $\boxed{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-x}$ (funcție polinomială).

Să se traseze graficul funcției f şi să se discute numărul de rădăcini reale ale ecuației $f(x)=m$, după valorile parametrului real m.

R. Vom parcurge etapele prezentate în secțiunea teoretică.

I. **Domeniul de definiție**. $E=\mathbb{R}$. Să observăm că funcția este **impară** deoarece $f(-x)=(-x^3)-(-x)=-x^3+x=-(x^3-x)=-f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Deci vom studia funcția pe $E_s=[0,\infty)$ **(intervalul de studiu)**

- $G_f\cap Ox: f(x)=0\Rightarrow x_1=0, x_2=1$;
- $G_f\cap Oy: x=0\Rightarrow f(0)=0$.
- $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

II. **Derivata întâi**. Fiind o funcție polinomială, atunci se ştie că aceasta este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Avem: $f'(x)=3x^2-1$. Ecuația $f'(x)=0$ are soluția (în E_s) $x_1'=\frac{\sqrt{3}}{3}$ pentru care $f(x_1')=-\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

III. **Derivata a doua**. Avem: $f''(x)=6x$, iar ecuația $f''(x)=0$ are soluția $x_1''=0$ când $f(0)=0$.

IV. **Asimptote**

1) **verticale**: nu sunt (funcția fiind continuă pe $[0,\infty)$);

2) **oblică** spre $+\infty$: $y=mx+n$, unde $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty\notin\mathbb{R}$.

Deci nu avem nici asimptotă oblică spre $+\infty$ pentru f.

Din $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ se deduce că f nu are asimptotă orizontală spre $+\infty$.

V. Tabelul de variație

x	0	$\sqrt{3}/3$	1	∞
$f'(x)$	$-\ -\ 0\ +\ +\ +\ +\ +$			
$f(x)$	$0\searrow$	$\overset{-2\sqrt{3}/9}{(m)}\nearrow 0\nearrow$	$\nearrow$	∞
$f''(x)$	$0\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +$			

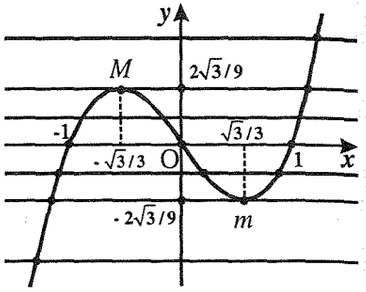


Fig. 1

VI. **Graficul** (este redat în Fig. 1).

Cum f este impară, graficul este simetric în raport cu O.

Rezolvarea grafică a ecuației $f(x)=m, m\in\mathbb{R}$. Discuția numărului de rădăcini reale ale ecuației $f(x)=m$, după valorile parametrului real m am realizat-o utilizând șirul lui Rolle.

Vom arăta în continuare o altă modalitate de tratare a acestei chestiuni, utilizând graficul funcției. Metoda se numește, din acest motiv, **metoda grafică**. Fie dreapta $y=m$, paralelă cu axa Ox. Când m este variabil din $\mathbb{R}$, această dreaptă, parcurge mulțimea tuturor dreptelor din planul xOy, care sunt paralele cu Ox.

Dacă această dreaptă taie graficul funcției $y=f(x)$, într-unul sau mai multe puncte, atunci abscisele acestor puncte vor fi soluții ale ecuației $f(x)=m$.

Dacă dreapta nu intersectează graficul, atunci pentru acele valori ale lui m, ecuația $f(x)=m$ nu are soluții.

În discuția ecuației, prin metoda grafică, distingem cazurile:

1) $m<-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$. Se observă că dreapta $y=m$ taie graficul într-un singur punct. Deci ecuația $f(x)=m$ are o unică soluție reală situată în intervalul $(-\infty,-1)$.

2) $m=-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$. Ecuația $f(x)=m$ are o soluție $x_1\in(-\infty,-1)$ și rădăcina dublă $x_2=x_3=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3) $m\in\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{9},0\right)$. Ecuația are trei rădăcini reale distincte: $x_1<-1$, $x_2\in\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $x_3\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},1\right)$ generate de cele trei puncte de intersecție ale dreptei $y=m$ cu graficul funcției.

4) $m=0$. Ecuația are trei rădăcini reale distincte $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$.

5) $m\in\left(0,\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right)$. Ecuația are trei rădăcini reale distincte: $x_1\in\left(-1,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $x_2\in\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0\right)$, $x_3>1$.

6) $m=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$. Ecuația are trei rădăcini reale $x_1=x_2=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (rădăcină dublă) și $x_3>1$.

7) $m>\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$. În acest caz ecuația $f(x)=m$ are o singură rădăcină reală $x_1>1$.

Observații. 1) Cum se aleg valorile pentru m? Sunt acele valori semnificative ale funcției, care se pot lua din tabelul de variație al funcției. Uneori pentru a preciza mai bine intervalele soluțiilor se aleg și alte valori.

2) Această ecuație cu parametru a fost simplă, iar discuția se poate soluționa fie cu șirul lui Rolle, fie prin metoda grafică. **Dar există cazuri când este preferată una din cele două tehnici, pentru rapiditatea rezolvării.**

2) $\boxed{g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\left|x^3-x\right|}$

Să se traseze graficul funcției g.

R. Observăm că $g(x)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, ceea ce arată că graficul funcției g este situat deasupra axei Ox. De asemenea funcția $g=|f|$, unde f este funcția analizată în exemplul precedent. Deci g coincide cu f acolo unde $f\geq 0$ și este egală cu $(-f)$ acolo unde $f\leq 0$.

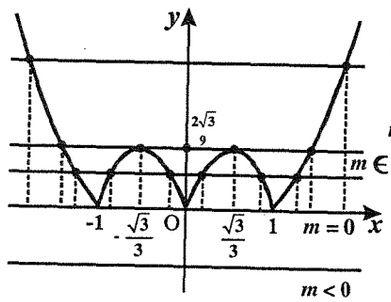


Fig.2

Deci graficul lui g se obține din graficul lui f simplu: **coincide cu graficul lui** f pe mulțimea

acelor x pentru care $f(x)\geq 0$ şi este **simetricul graficului lui** f în raport cu axa Ox pentru acei $x\in\mathbb{R}$ pentru care $f(x)\leq 0$.

Aşadar graficul lui g este cel indicat în Fig. 2.

Observaţii. 1) Realizând graficul funcţiei g plecând de la graficul lui f, se poate pierde faptul că punctele $(-1,0),(0,0),(1,0)$ sunt puncte unghiulare ale graficului.

2) De regulă, când în structura unei funcţii apare modulul se **trece la explicitarea acestuia**. Trasaţi graficul acestei funcţii independent de graficul funcţiei precedente, prin parcurgerea tuturor etapelor.

Rezolvarea grafică e ecuaţiei $g(x)=m, m\in\mathbb{R}$. Discuţia ecuaţiei $g(x)=m, m\in\mathbb{R}$ ar decurge astfel:

a) $m<0$. Ecuaţie imposibilă.

b) $m=0$. Ecuaţia are trei soluţii reale distincte: $x_1=-1, x_2=0, x_3=1$.

c) $m\in\left(0,\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$. Ecuaţia are şase soluţii reale distincte: $x_1<-1, x_2\in\left(-1,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $x_3\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},0\right), x_4\in\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right), x_5\in\left(\frac{\sqrt{3}}{3},1\right), x_6>1$.

d) $m=\frac{2\sqrt{3}}{9}$. Ecuaţia are şase soluţii reale: $x_1<-1, x_2=x_3=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (rădăcină dublă), $x_4=x_5=\frac{\sqrt{3}}{3}, x_6>1$.

e) $m>\frac{2\sqrt{3}}{9}$. Ecuaţia are două soluţii reale: $x_1<-1$, $x_2>1$.

3) $\boxed{f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2}{x+1}}$ (funcţie raţională).

a) Să se traseze graficul funcţiei f.

b) Să se discute numărul de rădăcini reale ale ecuaţiei: $x^2-mx-m=0$, după valorile parametrului real m.

R. a) I. **Domeniul de definiţie.** $E=\mathbb{R}=-\{-1\}$. Funcţia nu este nici pară, nici impară, cum uşor se poate vedea.

- $G_f\cap Ox: f(x)=0\Rightarrow x=0$.
- $G_f\cap Oy: f(0)=0$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\nearrow -1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\searrow -1}=+\infty$ (ultimele două limite arată că $x=-1$ este asimptotă verticală).

II. **Prima derivată.** Funcţia f este derivabilă pe E şi $f'(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.

Ecuaţia $f'(x)=0$ are soluţiile $x_1'=-2, x_2'=0$ pentru care $f(-2)=-4$ şi $f(0)=0$.

III. **A doua derivată.** Avem: $f''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}$. Ecuaţia $f''(x)=0$ nu are soluţii, ceea ce arată că nu avem puncte de inflexiune.

IV. **Asimptote.**

1) **verticale**: $x=-1$ (s-a văzut la I.).

2) **oblică** spre $+\infty$: $y=mx+n$, unde $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x}=1$ şi

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{x+1}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x+1}=-1.$$

Deci $y=x-1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ pentru f.

Aceeaşi dreaptă se găseşte ca asimptotă oblică spre $-\infty$.

V. **Tabelul de variaţie**

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-\ 0\ +$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow -4\ (M)$	$\searrow -\infty$	$+\infty\ \searrow 0\ (m)$	$\nearrow +\infty$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$

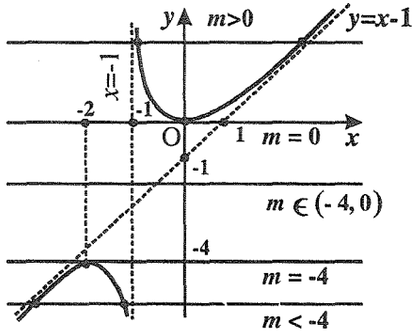


Fig.3

VI. **Graficul** este redat în Fig. 3.

b) Ecuaţia se mai scrie $m(x+1)=x^2$ sau $(x\neq -1)\ m=\frac{x^2}{x+1}$, adică am pus în evidenţă funcţia f căreia i-am trasat graficul. Valorile principale pentru m se aleg, de obicei, valorile extreme ale funcţiei (aici valorile -4 şi 0). Discuţia este următoarea (am marcat pe grafic câte o dreaptă $y=m$ pentru fiecare caz analizat):

1) $m<-4$. Ecuaţia are două rădăcini reale distincte: $x_1<-2, x_2\in(-2,-1)$.

2) $m=-4$. Ecuaţia are rădăcina dublă $x=-2$.

3) $m\in(-4,0)$. Ecuația nu are soluție.

4) $m=0$. Ecuația are rădăcina dublă $x=0$.

5) $m>0$. Ecuația are două rădăcini reale distincte: $x_1\in(-1,0)$, $x_2>0$.

Observație. Așa cum este dată ecuația, fiind de gradul doi, se putea face discuția utilizând discriminantul.

4) $\boxed{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2}}$

Să se reprezinte grafic funcția f și apoi să se discute ecuația $f(x)=m, m\in\mathbb{R}$.

R. I. **Domeniul de definiție.** $E=\mathbb{R}$.

- $G_f\cap Ox: f(x)=0\Rightarrow x=0, x=3$.
- $G_f\cap Oy: f(0)=0$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

II. **Prima derivată.** Avem: $f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{\sqrt[3]{\left(x^3-3x^2\right)^2}}\in\mathbb{R}$ dacă $x\neq 0, x\neq 3$.

Deci f este derivabilă pe $\mathbb{R}-\{0,3\}$.

Ce se poate afirma despre punctele în care f nu este derivabilă ?

Pentru $x=0$ avem: $f_s'(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0} f'(x)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{x-2}{\sqrt[3]{x(x-3)^2}}=\infty$ și

$f_d'(0)=\lim\limits_{x\searrow 0} f'(x)=-\infty$ relații care arată că punctul $(0,0)$ este un punct de întoarcere pentru grafic.

Pentru $x=3$ se găsește ușor că $f_s'(3)=f_d'(3)=\infty$, ceea ce arată că $x=3$ este punct de inflexiune.

III. **A doua derivată.** Găsim: $f''(x)=\dfrac{-2}{(x-3)\sqrt[3]{\left(x^3-3x^2\right)^2}}$, $x\neq 0, x\neq 3$. Ecuația

$f''(x)=0$ n-are soluții.

IV. **Asimptote**

1) **verticale**: nu există.

2) **oblice**: • la ramura spre $+\infty$, are forma $y=mx+n$, unde $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ și

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{x^3-3x^2}-x\right]=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3-3x^2\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3-3x^2}+x^2}=-1.$$ Deci $y=x-1$.

• la ramura spre $-\infty$ se obține aceeași dreaptă $y=x-1$.

V. **Tabelul de variație**

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+\infty\ \vert\ -\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty\ \vert\ +\infty$	$+$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\sqrt[3]{-4}$ (m)	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$		$+$		$-$				

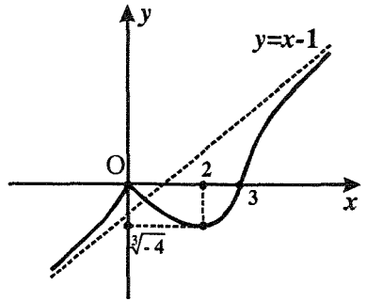


Fig. 4

VI. **Graficul** este prezentat în Fig. 4.

Rezolvarea grafică a ecuației $f(x)=m, m\in\mathbb{R}$. Discuția ecuației este imediată.

1) Dacă $m<\sqrt[3]{-4}$, atunci ecuația are o singură soluție reală: $x_1<0$.

2) Dacă $m=\sqrt[3]{-4}$, atunci ecuația are trei rădăcini reale: $x_1<0$, $x_2=x_3=2$.

3) Dacă $m\in\left(\sqrt[3]{-4},0\right)$, ecuația are trei rădăcini reale distincte: $x_1<0$, $x_2\in(0,2)$, $x_3\in(2,3)$.

4) Dacă $m=0$, ecuația are trei rădăcini reale: $x_1=x_2=0$, $x_3=3$.

5) Dacă $m>0$, ecuația are o singură rădăcină reală: $x_1>3$.

5) $\boxed{f:E\to\mathbb{R},\ f(x)=x+\sqrt{x^2+2x}}$

a) Să se determine domeniul maxim de definiție E și să se traseze graficul funcției.

b) Să se discute ecuația $\sqrt{x^2+2x}=m-x$, m fiind parametru real.

R. a) Domeniul maxim de definiție se determină din cerința de existență a radicalului de ordin par. Deci se impune $x^2+2x\geq 0$, cu soluția $x\in(-\infty,-2]\cup[0,\infty)$.

I. **Domeniul de definiție.** $E=(-\infty,-2]\cup[0,\infty)$

- $G_f\cap Ox: f(x)=0\Rightarrow x+\sqrt{x^2+2x}=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2x}=-x\Leftrightarrow x^2+2x=x^2$

(ultima echivalentă are loc pe $E\cap(-x\geq 0)$) cu soluția $x=0$, când $f(0)=0$.

• $G_f \cap Oy: f(0)=0$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-x^2-2x}{x-\sqrt{x^2+2x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)}=-1$ ceea

ce arată că $y=-1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$.

• $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $f(-2)=-2$, $f(0)=0$.

II. **Prima derivată**. Funcția f este derivabilă pe $(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$ și

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+2x}+x+1}{\sqrt{x^2+2x}}.$$

Ecuația $f'(x)=0$ se reduce la $\sqrt{x^2+2x}+x+1=0$, care nu are soluții.

III. **Derivata a doua**. Plecând de la $f'(x)=1+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$ găsim

$f''(x)=\dfrac{-1}{\left(x^2+2x\right)\sqrt{x^2+2x}}$. Ecuația $f''(x)=0$ nu are soluții.

IV. **Asimptote**

1) **verticale** • nu există. 2) **oblică** • la ramura spre $+\infty$, are forma $y=mx+n$,

unde $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+2x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)}{x}=2$ și

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\infty}\left[x+\sqrt{x^2+2x}-2x\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=1.$$

Așadar $y=2x+1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ pentru f.

• dreapta $y=-1$, am văzut, reprezintă asimptotă orizontală la ramura de la $-\infty$.

V. **Tabelul de variație**

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	‖	‖	$+$	$+$	
$f(x)$	-1	↘	-2	‖	0	↗	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$-$	‖	‖	$-$	$-$	

VI. **Graficul** funcției este cel din Fig. 5.

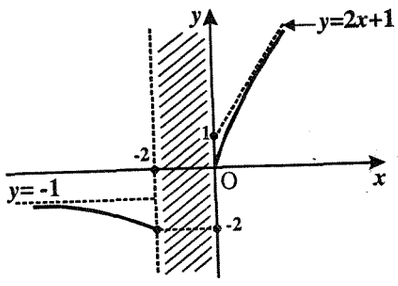


Fig.5

b) 1) Dacă $m\in(-\infty,-2)\cup(-1,0)$, ecuația nu are soluții.

2) Dacă $m\in[-2,-1)$, ecuația are o rădăcină: $x_1\le -2$.

3) Dacă $m\in[-1,0)$, ecuația nu are rădăcini.

4) Dacă $m\ge 0$, ecuația are o rădăcină: $x_1\ge 0$.

6) $\boxed{f:E\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{|\ln x|}{x}}$

a) Să se determine domeniul maxim de definiție și să se traseze graficul funcției f.

b) Să se discute ecuația $f(x)=m$, $m\in\mathbb{R}$.

R. a) Pentru determinarea domeniului maxim de definiție se impune condiția $x>0$.

I. **Domeniul maxim de definiție.** $E=(0,\infty)$.

Funcția f este continuă pe E (fiind cât de funcții continue).

Se explicitează funcția $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x}, & x\ge 1\\ -\dfrac{\ln x}{x}, & x\in(0,1)\end{cases}$

• $G_f\cap Ox: f(x)=0\Rightarrow x=1$.

• $G_f\cap Oy=\varnothing\ (x=0\notin E)$.

• $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{|\ln x|}{x}=\dfrac{\infty}{0_+}=\infty$, adică $x=0$ este asimptotă verticală la dreapta.

• $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$, ceea ce arată că $y=0$ reprezintă asimptota orizontală la ramura de la $+\infty$.

II. **Derivata întâi.** Funcția f este derivabilă pe $(0,\infty)-\{1\}$ și

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\ln x}{x^2}, & x>1\\ \dfrac{\ln x-1}{x^2}, & x\in(0,1)\end{cases}.$$

Studiem derivabilitatea funcției f în $x=1$, utilizând corolarul (consecința) teoremei lui Lagrange și avem: $f_s'(1)=\lim\limits_{x\nearrow 1} f'(x)=\lim\limits_{x\nearrow 1}\dfrac{\ln x-1}{x^2}=-1$ și

$f_d'(1)=\lim\limits_{x\searrow 1} f'(x)=\lim\limits_{x\searrow 1}\dfrac{1-\ln x}{x^2}=1$.

Cum $f_s'(1)\neq f_d'(1)$ şi $f_s'(1), f_d'(1)$ sunt finite deducem că f nu este derivabilă în $x=1$, iar punctul $x=1$ este punct unghiular al funcţiei.

Ecuaţia $f'(x)=0$ are soluţia $x=e\in E$.

III. **Derivata a doua**. Avem: $f''(x)=\begin{cases}\dfrac{2\ln x-3}{x^3}, & x>1\\ \dfrac{3-2\ln x}{x^3}, & x\in(0,1)\end{cases}$.

Ecuaţia $f''(x)=0$ conduce la ecuaţia $2\ln x-3=0$, care se constată că are soluţia $x_0''=e^{\frac{3}{2}}>e$.

IV. **Asimptote**

1) **verticale**: $x=0$.

2) **orizontale**: $y=0$ la ramura de la $+\infty$.

V. **Tabelul de variaţie**

x	0		1		e		x_0''		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	-1	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	e^{-1} (M)	$\searrow$		$\searrow$	0
$f''(x)$	$+$	$+$	$\|$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	

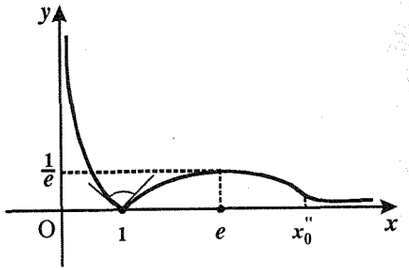


Fig. 6

VI. **Graficul** este redat în Fig. 6.

b) 1) Dacă $m<0$, ecuaţia nu are soluţii.

2) Dacă $m=0$, ecuaţia are soluţia $x=1$.

3) Dacă $m\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$, atunci ecuaţia are trei soluţii reale diferite: $x_1\in(0,1)$, $x_2\in(1,e)$, $x_3>e$.

4) Dacă $m=\dfrac{1}{e}$, ecuaţia are trei rădăcini reale: $x_1\in(0,1)$, $x_2=x_3=e$.

5) Dacă $x>\dfrac{1}{e}$, ecuaţia are o singură rădăcină reală: $x_1\in(0,1)$.

7) $\boxed{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=xe^x}$

Să se reprezinte grafic funcţia şi apoi să se discute ecuaţia $f(x)=m$, după valorile parametrului real m.

R. I. **Domeniul de definiţie**. $E=\mathbb{R}$.

- $G_f\cap Ox: f(x)=0\Rightarrow x=0$.
- $G_f\cap Oy: f(0)=0$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{-x}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}}=0$, ceea ce arată că $y=0$ este aimptotă orizontală spre $-\infty$ pentru f.
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

II. **Derivata întâi**. Funcţia f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ (fiind produs de funcţii derivabile) şi $f'(x)=(x+1)e^x$. Ecuaţia $f'(x)=0$ are soluţia $x=-1$, eventual punct de extrem ($x=-1$ este punct de minim deoarece pentru $x<-1$, $f'(x)<0$, iar dacă $x>-1$, $f'(x)>0$), când $f(-1)=-\dfrac{1}{e}$.

III. **Derivata a doua**. Avem: $f''(x)=(x+2)e^x$, iar ecuaţia $f''(x)=0$ are soluţia $x=-2$, care este punct de inflexiune pentru f deoarece dacă $x<-2$, $f''(x)<0$, iar pentru $x>-2$, $f''(x)>0$ (f fiind continuă în $x=-2$), $f(-2)=-\dfrac{2}{e^2}$.

IV. **Asimptote**

1) **verticale** – nu există (deoarece f este continuă pe $\mathbb{R}$).

2) **orizontală**: $y=0$ spre $-\infty$.

3) **oblică**: la ramura spre $+\infty$, are forma $y=mx+n$, unde $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty\notin\mathbb{R}$ şi deci nu avem asimptotă oblică.

V. **Tabelul de variaţie**

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{2}{e^2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$f''(x)$	$-$	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$

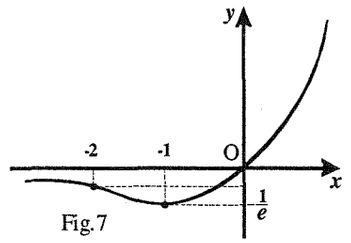


Fig.7

VI. **Graficul** este cel din Fig. 7.

Rezolvarea grafică a ecuației $f(x)=m, m\in\mathbb{R}$. Discuția ecuației este următoarea:

1) Dacă $m<-\frac{1}{e}$, ecuația n-are soluții.

2) Dacă $m=-\frac{1}{e}$, ecuația are rădăcina dublă $x=-1$.

3) Dacă $m\in\left(-\frac{1}{e},0\right)$ ecuația are două rădăcini reale distincte:

$x_1<-1, x_2\in(-1,0)$.

4) Dacă $m\geq 0$, ecuația are o rădăcină reală: $x_1\geq 0$.

8) $\boxed{f:E\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\cos x}{\cos 2x}}$

a) Să se determine domeniul maxim de definiție E și să se traseze graficul funcției.

b) Să se discute ecuația $2m\cos^2 x-\cos x-m=0$, după valorile parametrului real m.

R. a) Pentru a stabili domeniul de definiție se impune condiția $\cos 2x\neq 0$. Soluțiile ecuației $\cos 2x=0$ sunt $x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Deci $E=\mathbb{R}-\left\{\pm\frac{\pi}{4}+k\pi; k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Să observăm că funcția f este periodică, de perioadă principală $T_0=2\pi$ (deoarece funcția f se exprimă cu ajutorul funcției $\cos x$, $f(x)=\frac{\cos x}{2\cos^2 x-1}$).

Prin urmare este suficient să realizăm graficul funcției pe intervalul de studiu de lungimea unei perioade $T_0=2\pi$. Fie acest interval: $E_s=[-\pi,\pi]$. Să observăm de asemenea că f este o funcție pară $(f(-x)=f(x))$ ceea ce permite să restrângem intervalul de studiu la $[0,\pi]$ (graficul pe $[-\pi,0]$ este simetricul graficului realizat pe $[0,\pi]$ față de Oy).

Așadar vom lua ca interval de studiu $E_s'=[0,\pi]$.

I. **Domeniul de definiție.** $[0,\pi]-\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right\}$.

- $G_f\cap Ox: f(x)=0\Rightarrow\cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$.
- $G_f\cap Oy: f(0)=1$.
- $f(0)=1, f(\pi)=-1$.

II. **Derivata întâi.** Funcția este derivabilă pe $[0,\pi]-\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right\}$ și

$f'(x)=\frac{\sin x\left(2\cos^2 x+1\right)}{\cos^2 2x}$. Ecuația $f'(x)=0$ are soluțiile $x_1=0, x_2=\pi$, eventuale puncte de extrem pentru f.

III. **Derivata a doua.** Are forma: $f''(x)=\frac{7\cos x-6\cos^3 x}{\cos^3 2x}$, iar ecuația $f''(x)=0$ se reduce la rezolvarea ecuațiilor $\cos x=0$, $\cos^2 x=\frac{7}{6}$. Prima ecuație are soluția $x=\frac{\pi}{2}$, iar cealaltă este imposibilă $\left(\frac{7}{6}>1\right)$.

IV. **Asimptote**

1) **verticale.**

Să observăm că $\lim\limits_{x\nearrow\frac{\pi}{4}} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\searrow\frac{\pi}{4}} f(x)=-\infty$, ceea ce arată că $x=\frac{\pi}{4}$ este asimptotă verticală, iar $\lim\limits_{x\nearrow\frac{3\pi}{4}} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\searrow\frac{3\pi}{4}} f(x)=-\infty$ adică dreapta $x=\frac{3\pi}{4}$ este asimptotă verticală.

2) **oblice** – nu există, deoarece domeniul de studiu nu conține interval de forma $(-\infty,a)$ sau (a,∞).

V. **Tabelul de variație**

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$	0	$+$	$\nexists$	$+$	0	$+$	$\nexists$	$+$	0
$f(x)$	1 (m)	$\nearrow$	$+\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$\nearrow$	-1 (M)
$f''(x)$	$+$	$\cup$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	

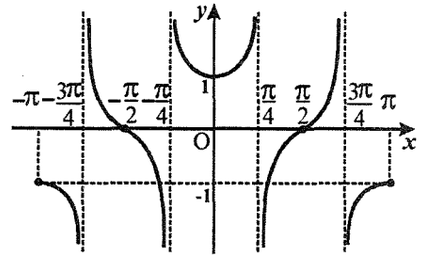


Fig.8

b) Se aduce ecuația la forma $m\cos 2x=\cos x$ sau pentru $\cos 2x\neq 0, m=f(x)$. Discuția ecuației temă.

VI. **Graficul** funcției este redat pe $[-\pi,\pi]-\left\{\pm\frac{\pi}{4},\pm\frac{3\pi}{4}\right\}$ în Fig. 8, iar pe domeniul maxim de definiție în Fig. 9 (de fapt am generat graficul pe încă două intervale de lungime 2π, $[\pi, 3\pi]$ și respectiv $[-3\pi,-\pi]$, aceasta realizându-se prin translatarea spre dreapta și respectiv spre stânga a graficului din intervalul $[-\pi, \pi]$).

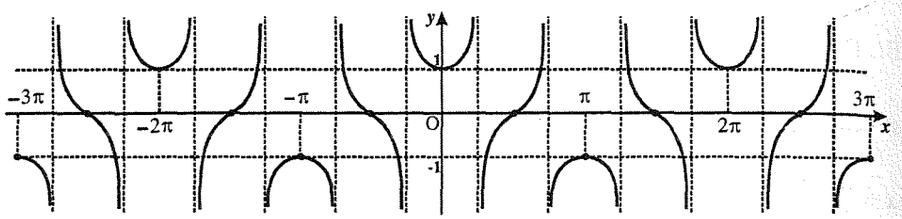


Fig.9

9) $\boxed{f:E\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x}{2}+\operatorname{arctg} x}$

a) Să se determine domeniul maxim de definiție și să se traseze graficul funcției f.

b) Să se discute ecuația $f(x)=m$, după valorile parametrului real m.

R. a) Cum funcția arctg este definită pe $\mathbb{R}$, deducem $E=\mathbb{R}$.

I. **Domeniul de definiție.** $E=\mathbb{R}$. Să observăm că funcția f este impară:

$$f(-x)=-\frac{x}{2}+\operatorname{arctg}(-x)=-\left(\frac{x}{2}+\operatorname{arctg} x\right)=-f(x),\ \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

Deci este suficient să studiem funcția pe intervalul $E_s=[0,\infty)$. Graficul funcției este simetric în raport cu originea O a reperului cartezian xOy.

- $G_f\cap Ox: f(x)=0\Rightarrow\frac{x}{2}+\operatorname{arctg} x=0$.

Să observăm că $x=0\in E_s$ este soluție a ecuației. Cum $f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{1+x^2}>0$ rezultă că f este strict crescătoare și deci injectivă. Prin urmare $x=0$ este unica soluție a ecuației.

- $G_f\cap Oy: f(0)=0$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ (deci nu avem asimptotă orizontală spre $+\infty$).

II. **Derivata întâi.** Funcția este derivabilă pe $[0,\infty)$ și

$$f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2+3}{2\left(1+x^2\right)}.$$

Ecuația $f'(x)=0$ se reduce la $x^2+3=0$ care nu are soluții reale.

III. **Derivata a doua.** Are expresia: $f''(x)=-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$.

Ecuația $f''(x)=0$ conduce la $x=0\in E_s$. Cum pentru $x<0$, $f''(x)>0$, iar pentru $x>0$, $f''(x)<0$, rezultă că $x=0$ este punct de inflexiune pentru f.

IV. **Asimptote**

1) **verticale** • nu există (f fiind continuă pe intervalul de studiu E_s).

2) **oblică** • la ramura spre $+\infty$, are forma $y=mx+n$, unde

$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)=\frac{1}{2}$, deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\frac{\frac{\pi}{2}}{\infty}=0$ și

$n=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim\limits_{x\to\infty}(\operatorname{arctg} x)=\frac{\pi}{2}$.

Așadar $y=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}$ reprezintă asimptota oblică la ramura de la $+\infty$.

• la ramura de la $-\infty$, are forma $y=m'x+n'$, unde $m'=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}$ și

$n'=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-m'x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg} x=-\frac{\pi}{2}$. Prin urmare $y=\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}$ este asimptotă oblică la ramura de la $-\infty$.

V. **Tabelul de variație**

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	+ + + + + + +		
$f(x)$	0	↗	$+\infty$
$f''(x)$	0	− − − − − −	

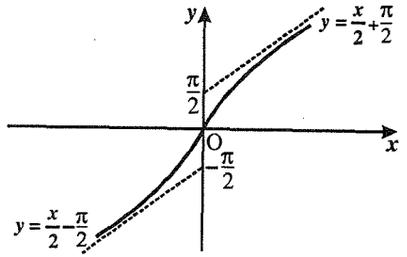


Fig.10

VI. **Graficul** (Fig. 10)

b) Avem cazurile:

1) Dacă $m<0$, ecuația are o singură rădăcină reală: $x_1<0$.

2) Dacă $m=0$, ecuația are o singură rădăcină reală: $x_1=0$.

3) Dacă $m>0$, ecuația are o singură rădăcină reală: $x_1>0$.

6.2. REPREZENTAREA GRAFICĂ A CONICELOR

Cercul. Definiție. Ecuație. Cercul $(\mathcal{C})$ de centru $C(a,b)$ și rază $R>0$, **este locul geometric al punctelor** $M(x,y)$ din planul xOy cu proprietatea $MC=R$. Pentru a găsi ecuația carteziană(implicită) a acestui cerc, traducem analitic relația metrică, $MC=R$, și avem(după ridicarea la pătrat) $(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0$, numită **ecuția cercului cu pătrate strânse**. Ridicând la pătrat binoamele se ajunge la ecuația $x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0$, unde notând $m=-a, n=-b$, $p=a^2+b^2-R^2$ obținem ecuația $x^2+y^2+2mx+2ny+p=0$, numită **ecuația normală cercului**. Din această ultimă ecuație deducem coordonatele centrului cercului $a=-m, b=-n$ (jumătățile coeficienților lui x și respectiv y luate cu semnul minus $(x+m)^2+(y+n)^2+p-m^2-n^2=0$), iar $R^2=m^2+n^2-p>0$. Ecuația implicită a cercului cu centrul în originea $O(0,0)$ a reperului cartezian xOy și rază R este $x^2+y^2-R^2=0$. De aici se obține forma explicită pentru ecuația cercului $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$, dacă $x\in[-R,R]$. Forma $y=\sqrt{R^2-x^2}\geq 0$, arată că punctele cercului sunt situate în semiplanul superior în raport cu Ox (punctele de pe cerc situate în cadranele I și II). Forma $y=-\sqrt{R^2-x^2}\leq 0$ arată că punctele cercului sunt situate în semiplanul inferior față de Ox (punctele de pe cerc situate în cadranele III și IV). Această porțiune este simetrică primeia în raport cu Ox.

Pentru prima formă, considerând funcția $f:[-R,R]\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$ și observând că $f(-x)=f(x), \forall x\in[-R,R]$, se deduce că graficul lui f este simetric în raport cu Oy. Deci este suficient să trasăm graficul funcției pe $[0,R]$. Nu se pune problema existenței asimptotelor verticale(funcția este definită pe $[0,R]$) și nici a celor oblice la $\pm\infty$. Tabelul de variație este:

x	0		R
$f'(x)$	0	$-$	$-$
$f(x)$	R	$\searrow$	0
$f''(x)$		$-$	$-$

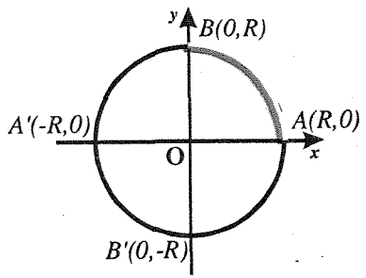


Fig.11

iar graficul funcției f este redat în Fig.11(arcul $\overset{\frown}{AB}$, colorat în roșu). Prin simetrie în raport cu Oy se obține graficul funcției $y=\sqrt{R^2-x^2}$ (semicercul $\overset{\frown}{ABA'}$), iar prin simetria acestui grafic în raport cu Ox se obține graficul funcției $y=-\sqrt{R^2-x^2}$. Reuniunea celor două semicercuri $\overset{\frown}{ABA'}, \overset{\frown}{A'B'A}$, dau graficul cercului de ecuație $x^2+y^2-R^2=0$.

Observații. 1) Dacă cercul este cu centrul în $C(a,b)$ și rază R, atunci ecuația sa este $(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0$. Punând $x'=x-a, y'=y-b$ se obține ecuația $x'^2+y'^2-R^2=0$. Pentru acest cerc se trasează graficul (cercul cu centrul în O și de rază R) care apoi se translatează după translația de ecuații $x=x'+a, y=y'+b$, obținându-se cercul cu centrul în $C(a,b)$ și rază R.

2) Dacă $M_0(x_0,y_0)$ aparține cercului de ecuație $\mathcal{C}: x^2+y^2-R^2=0$, atunci $x_0^2+y_0^2-R^2=0$. Ecuația tangentei în M la cerc este $y-y_0=m(x-x_0)$, unde $m=f'(x_0)$. Derivând ecuația cercului în raport cu x rezultă $2x+2y\cdot y'=0$, iar de aici $y'=\frac{-x}{y}$. Deci $m=y'(x_0)=-\frac{x_0}{y_0}$. Ecuația tangentei este

$y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$ sau $xx_0+yy_0-\left(x_0^2+y_0^2\right)=0$. Cum $x_0^2+y_0^2=R^2$, avem forma finală a ecuației tangentei într-un punct la cercul $C: xx_0+yy_0-R^2=0$, obținută din ecuația cercului prin **dedublare**(sau prin **polarizare**) ($x\cdot x+y\cdot y-R^2=0$). Mai general avem:

> Dacă cercul are ecuația $(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0$, iar $M_0(x_0,y_0)$ **este un punct de pe cerc**, atunci **ecuția tangentei în** M_0 **la cerc este** $(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)-R^2=0$.

Exemplu. Fie cercul $(\mathcal{C}): x^2+y^2-25=0$. Atunci $M_0(3,4)$ este un punct al cercului deoarece $3^2+4^2-25=0$. Ecuația tangntei în M_0 la cerc este $3x+4y-25=0$.

Elipsa. Definiție. Ecuație. Elipsa (E) **este locul geometric al punctelor** $M(x,y)$ din plan a căror sumă la două puncte fixe F_1, F_2, numite **focare**, este constantă, $MF_1 + MF_2 = 2a$, a constantă pozitivă. Se pune $F_1F_2 = 2c, c > 0$ (F_1F_2 = **distanța focală**), unde $F_1(-c,0), F_2(c,0)$. Se exprimă relația metrică analitic și se obține forma rațională a ecuației elipsei $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, unde $a^2 - c^2 = b^2$. Elipsa (E) taie axa Ox în $A'(-a,0), A(a,0)$, iar axa Oy în $B'(0,-b), B(0,b)$. Aceste patru puncte se numesc **vârfurile elipsei**. Segmentul $[A'A]$ se numește **axa mare a elipsei** $A'A = 2a$, iar segmentul $[B'B]$ se numește **axa mică a elipsei**, $B'B = 2b$.

Ecuația implicită a elipsei, raportată la axele sale, este $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. De aici se obține forma explicită a ecuației elipsei $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ dacă $x \in [-a,a]$.

Forma $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \geq 0$, arată că punctele de pe elipsă sunt situate în semiplanul superior în raport cu axa Ox (punctele de pe elipsă situate în cadranale I și II). Forma $= -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \leq 0$, arată că punctele de pe elipsă sunt situate în semiplanul inferior față de axa Ox (punctele de pe elipsă situate în cadranele III și IV). Această porțiune a elipsei este simetrică în raport cu Ox. Pentru prima formă, având în vedere simetria elipsei în raport cu axa Oy, este suficientă trasarea elipsei în primul cadran, $x \in [0,a], f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Ca și în cazul cercului nu se pune problema existenței asimptotelor verticale sau oblice. Tabelul de variație corespunzător este:

x	0			a
$f'(x)$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	b	↘	↘	0
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$

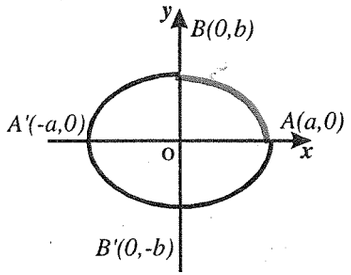


Fig.12

Graficul lui f este arcul $\overset{\frown}{AB}$, colorat în roșu (Fig.12). Graficul lui $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ este arcul $\overset{\frown}{ABA'}$, iar graficul lui $y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ este arcul $\overset{\frown}{A'B'A}$. Graficul elipsei (E) este reuniunea arcelor $\overset{\frown}{ABA'}$ și $\overset{\frown}{A'B'A}$.

Observație. Ecuația tangentei într-un punct $M_0(x_0,y_0)$ al elipsei (E) la elipsă, se obține printr-un procedeu asemănător celui de la cerc. Panta $m = f'(x_0)$ a tangentei se deduce derivând ecuația elipsei (în raport cu x) și punând în aceasta $x = x_0$. Avem: $y' = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}$ și deci $y'(x_0) = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}$. Ecuația tangentei în M_0 la elipsa (E) are ecuația $y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$ sau

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right) = 0.$$

Cum punctul $M_0 \in (E)$, rezultă relația $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0$. Cu aceasta ecuația tangentei în M_0 la elipsa (E) are forma: $\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} - 1 = 0$, obținută prin dedublare.

Dacă $M_0(x_0,y_0)$ **aparține elipsei** $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, **atunci ecuația tangentei în** M_0 **la elipsă este:** $\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} - 1 = 0$.

Exemplu. Se consideră elipsa $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$. Punctul $M_0\left(4, -\frac{9}{5}\right)$ aparține elipsei deoarece $\frac{16}{25} + \frac{9}{25} - 1 = 0$. Ecuația tangentei în M_0 la elipsă este $\frac{4x}{25} - \frac{y}{5} - 1 = 0$.

Hiperbola. Definiție. Ecuație. Hiperbola (H) **este locul geometric al punctelor** $M(x,y)$ din plan a căror diferență a distanțelor la două puncte fixe, F_1, F_2 numite focare, este constantă, $|MF_1 - MF_2| = 2a, a =$ constantă pozitivă. Punem $F_1F_2 = 2c, c > 0$ cu $F_1(-c,0), F_2(c,0)$ și transcriem analitic relația metrică din

definiție. Obținem forma rațională a ecuației hiperbolei $(H):\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$, unde $c^2-b^2=a^2$. Hiperbola taie axa Ox în $A'(-a,0)$ și $A(a,0)$, numite **vârfurile hiperbolei.** Hiperbola (H) nu taie axa Oy.

Ecuația implicită a hiperbolei este $(H):\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$. De aici avem forma explicită pentru ecuația hiperbolei $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, dacă $x\in(-\infty,-a]\cup[a,\infty)$.

Ținând seamă că axele Ox și Oy sunt axe de simetrie, este suficient să trasăm ramura de curbă situată în primul cadran al axelor sale, după aceea trasăm simetricele acestei părți față de Ox și Oy.

Fie funcția $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$.

Asimptota la $+\infty$ pentru graficul funcției are ecuația $y=mx+n$, unde $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{b}{a}$ și $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=0$. Deci $y=\frac{b}{a}x$ este asimptotă oblică la $+\infty$ pentru graficul lui f. Luând simetricul acestei semidrepte în raport cu axele Ox și Oy găsim că $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$ sunt asimptote la $+\infty$ și respectiv $-\infty$ pentru hiperbolă. Tabelul de variație al funcției f este:

x	a			$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	↗	↗	$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$

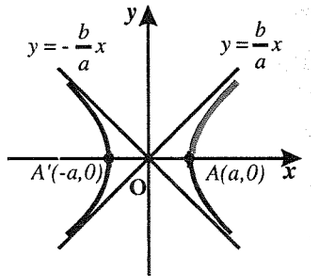


Fig.13

Graficul funcției f este redat în Fig.13 (ramura colorată în roșu).

Dacă $M_0(x_0,y_0)$ **este un punct al hiperbolei** (H), atunci **ecuația tangentei în** M_0 **la hiperbola** (H) este: $\frac{x\cdot x_0}{a^2}-\frac{y\cdot y_0}{b^2}-1=0$.

Exemplu. Fie hiperbola $(H):\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}-1=0$ și punctul $M_0(4,1)$. Să observăm că M_0 aparține hiperbolei deoarece $\frac{16}{12}-\frac{1}{3}-1=0$. Ecuația tangentei în M_0 la hiperbolă este $\frac{4x}{12}-\frac{y}{3}-1=0$ sau $x-y-3=0$.

Parabola. Definiție. Ecuație. Parbola (P) **este locul geometric** al punctelor $M(x,y)$ din plan care sunt egal depărtate de un punct fix F, numit **focar** și o dreaptă fixă, numită **directoare.** Se ia distanța de la F la directoare egală cu p (numit **parametrul parabolei**), iar ca axă Oy, mediatoarea segmentului $[FA]$, unde A este proiecția lui F pe directoare, iar ca axă Ox dreapta AF.
Ecuația implicită a parabolei raportată la axă și tangenta ei din vârf este $(P):y^2=2px, p>0$. Forma explicită a ecuației parabolei este $y=\pm\sqrt{2px}, x>0$.
Cum ea este simetrică în raport cu Ox (dacă punctul (x_0,y_0) aparține parabolei (P), atunci și simetricul său în raport cu $Ox, (x_0,-y_0)$ este situat pe parabola (P)), este suficient de trasat graficul funcției $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{2px}$, după care acesta se simetrizează în raport cu axa Ox.
Observăm că nu avem nici un fel de asimptote. Tabelul de variație al funcției este:

x	0			$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	↗	↗	$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$

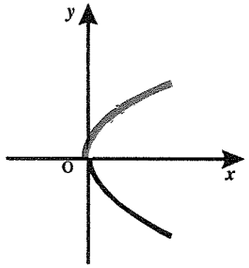


Fig.14

Graficul funcției este redat în Fig.14 (ramura colorată în roșu).

Dacă $M_0(x_0,y_0)$ **este punct al parabolei** $(P):y^2=2px$, atunci **ecuația tangentei în** M_0 **la parabolă este:** $y\cdot y_0=p(x+x_0)$ (obținută din ecuația parabolei prin dedublare)

Exemplu. Fie parabola $(P):y^2=8x$. Punctul $M_0(2,4)$ este situat pe parabola (P) deoarece $4^2=8\cdot 2$. Ecuația tangentei în M_0 la parabolă este $4y=4(x+2)$ sau $x-y+2=0$.

REZUMATUL CAPITOLULUI

<table>
<tr><th>Noțiunea</th><th>Etape</th></tr>
<tr><td>Reprezentarea grafică a funcțiilor</td><td>
I. Precizarea domeniului E de definiție al funcției
• $Gf \cap Ox : f(x)=0 \Rightarrow (x_1,0),(x_2,0),...$
• $Gf \cap Oy$: Se calculează $f(0)$, dacă $0 \in E$
• Se calculează valorile sau limitele lui f la capetele intervalelor
II. Derivata întâi
• Se determină $E_{f'}$ (domeniul de derivabilitate)
• Se rezolvă ecuația $f'(x)=0 \Rightarrow x_1', x_2',...$
• Se calculează $f(x_1'), f(x_2'),...$
III. Derivata a doua
• Se calculează $f''(x)$
• Se rezolvă ecuația $f''(x)=0 \Rightarrow x_1'', x_2'',...$
• Se calculează $f(x_1''), f(x_2''),...$
IV. Asimptote
1) verticale : $x=a$, dacă cel puțin una din limitele laterale
$\lim\limits_{x \nearrow a} f(x), \lim\limits_{x \searrow a} f(x)$ este infinită
2) oblice • la ramura de la $+\infty, y=mx+n$, unde
$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\in\mathbb{R}, n=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]\in\mathbb{R}$
• la ramura de la $-\infty, y=m'x+n'$, unde
$m'=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}\in\mathbb{R}, n'=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-m'x\right]\in\mathbb{R}$
V. Tabelul de variație-Se completează cu elementele găsite în etapele I-IV, determinându-se semnele pentru f' și f'', iar pentru f se marchează monotonia prin săgeți ↗ sau ↘
<table>
<tr><td>x</td><td></td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td></td></tr>
<tr><td>$f''(x)$</td><td></td></tr>
</table>
VI. Trasarea Graficului
• Se trasează punctat asimptotele la graficul funcției în reperul xOy
• Se marchează în reper, din tabel, punctele determinate în celelalte etape
• Se unesc aceste puncte print-o linie continuă, ținând seama de forma graficului
</td></tr>
</table>

Probleme propuse

1 . Să se determine domeniul maxim de definiție și apoi să se traseze graficele următoarelor funcții (discutând cu ajutorul graficului ecuația $f(x)=m, m\in\mathbb{R}$):

I. 1) $f(x)=x^3-3x+2$; 2) $f(x)=x^3-x^2$; 3) $f(x)=4x^3-3x+1$; 4) $f(x)=(x+1)(x-2)^2$;

5) $f(x)=x^4-4x^3+4x^2$; 6) $f(x)=\frac{5x^4}{81}-\frac{10x^2}{9}+2$.

II. 1) $f(x)=\frac{x^2+2}{2x}$; 2) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$; 3) $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$; 4) $f(x)=\frac{1}{x(x-1)}$; 5) $f(x)=\frac{1}{x^2-4x+3}$;

6) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$; 7) $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{(x+1)^2}$; 8) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+1}$; 9) $f(x)=\frac{x+3}{x^2+x-2}$;

10) $f(x)=\frac{8(x-1)}{x^2+6x+18}$; 11) $f(x)=\frac{x^3}{1-x^2}$; 12) $f(x)=\frac{2x^3+x^2-1}{x^2-1}$; 13) $f(x)=\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}$;

14) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{x-1}, & x<1\\ x, & x\geq 1\end{cases}$; 15) $f(x)=\left|\frac{5}{x-1}\right|$; 16) $f(x)=\left|\frac{3x}{2-x}\right|$; 17) $f(x)=\left|\frac{x-1}{3-x}\right|$;

18) $f(x)=x\left|\frac{x}{x+1}\right|$.

III. 1) $f(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x}}$; 2) $f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$; 3) $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x}}$; 4) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;

5) $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$; 6) $f(x)=\sqrt{\frac{x-3}{x^2-x-2}}$; 7) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$; 8) $f(x)=2x+\sqrt{1+x^2}$;

9) $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$;10) $f(x)=\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x}$; 11) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$;

12) $f(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$;13) $f(x)=\frac{\sqrt{|1-x^2|}}{x}$; 14) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{|1-x^2|}}$;

15) $f(x)=\frac{|x|}{\sqrt{|1-x^2|}}$.

IV. 1) $f(x)=x\ln x$; 2) $f(x)=x-\ln x$; 3) $f(x)=x^2\ln x$; 4) $f(x)=\ln(x^2+1)$;

5) $f(x)=x+\ln(x^2-1)$; 6) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$; 7) $f(x)=\frac{\ln x}{1+\ln x}$; 8) $f(x)=\ln x^2-\frac{x-4}{x-2}$;

9) $f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$; 10) $f(x)=\ln\frac{x-1}{x+2}$; 11) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$; 12) $f(x)=\left|\ln|x|\right|$.

V. 1) $f(x)=xe^{-x}$; 2) $f(x)=\frac{e^x}{x}$; 3) $f(x)=\frac{e^x}{x+1}$; 4) $f(x)=x^2e^{-x}$; 5) $f(x)=x^2e^x$;

6) $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$; 7) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$; 8) $f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$; 9) $f(x)=e^{\frac{x-1}{x^2}}$; 10) $f(x)=e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$;

11) $f(x)=\frac{1}{e^x-1}$; 12) $f(x)=|x|e^{-|x-1|}$.

VI. 1) $f(x)=\sin x+\cos x$; 2) $f(x)=\sin x+\sin x\cos x$; 3) $f(x)=\sin 2x+2\cos x$;

4) $f(x)=\sin 2x-2\sin x$; 5) $f(x)=\frac{\cos x}{2+\cos x}$; 6) $f(x)=\frac{\sin x}{1+\sin x}$; 7) $f(x)=\sqrt{\sin x}$;

8) $f(x)=\sin x^2$; 9) $f(x)=\ln|\sin x|$; 10) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$.

VII. 1) $f(x)=\operatorname{arctg} x^2$; 2) $f(x)=x\operatorname{arctg} x$; 3) $f(x)=\ln x-\operatorname{arctg} x$; 4) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$;

5) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{x}{x-1}$; 6) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2-1}$; 7) $f(x)=\arccos\frac{4-3x^2}{x^3}$; 8) $f(x)=\arcsin\frac{(x+1)^2}{2(1+x^2)}$;

9) $f(x)=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$; 10) $f(x)=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$; 11) $f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$; 12) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

VIII. 1) $f(x)=x^x$; 2) $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$; 3) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$; 4) $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$; 5) $f(x)=\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{1+x}$.

IX 1) Indicați natura curbelor definite prin ecuațiile de mai jos și construiți-le:

i) a) $y=\sqrt{9-x^2}$; b) $y=-\sqrt{25-x^2}$; c) $x=\sqrt{16-y^2}$; d) $y=15+\sqrt{64-x^2}$.

ii) a) $y=\frac{8}{9}\sqrt{81-x^2}$; b) $y=-\frac{8}{9}\sqrt{81-x^2}$; c) $x=-\frac{9}{8}\sqrt{64-y^2}$; d) $x=\frac{9}{8}\sqrt{64-y^2}$;

iii) a) $y=-\frac{4}{3}\sqrt{x^2-9}$; b) $y=\frac{2}{5}\sqrt{x^2+25}$; c) $x=-\frac{1}{2}\sqrt{y^2+4}$; d) $x=\frac{1}{2}\sqrt{y^2+4}$;

iv) a) $y=3\sqrt{x}$; b) $y=\sqrt{-2x}$; c) $y=-\sqrt{-x}$; d) $y=-3\sqrt{x}$; e) $x=-2\sqrt{-y}$; f) $x=-\sqrt{y}$;

g) $x=2\sqrt{-3y}$.

2) Se dă o conică și un punct. După ce ați verificat că punctul aparține conicei, găsiți ecuația tangentei în M la conică în cazurile :

1) $(\mathcal{C}): x^2+y^2-5=0,\ M(-1,-2)$; 2) $(x-1)^2+(y-2)^2-13=0, M(3,-1)$;

3) $x^2+y^2-4x+8y-6=0, M(3,1)$; 4) $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}-1=0, M\left(3,\frac{8}{5}\right)$;

5) $(H):\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}-1=0, M(6,-1)$; 6) $(H): x^2-y^2-16=0, M(5,-3)$;

7) $(P): y^2-8x=0, M(2,-4)$; 8) $(P): y^2-6x=0, M(6,-6)$.

2. Fie $f_m(x)=\frac{mx^2+(m-1)x}{x+1}, x\neq -1$.

a) Să se arate că asimptotele oblice ale familiei $(f_m(x))$ trec printr-un punct fix.

b) Să se determine m astfel încât f_m să aibă un extrem în $x=-2$.

c) Pentru m determinat la b) să se traseze graficul lui f_m.

3. Fie funcția $f(x)=\frac{mx^2-1}{(x-1)(x-2)}, x\neq 1, x\neq 2, m\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine m astfel încât f să admită puncte de extrem.

b) Pentru $m=-2$ să se traseze graficul funcției.

4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{ax+a-2}{x^2+1}, a\in\mathbb{R}$.

1) Să se determine a astfel încât f să aibă un extrem egal cu 1, în $x=1$.

2) Pentru a determinat la 1) să se traseze graficul funcției.

5. Fie $f(x)=\frac{x^3}{x^2+ax+a}, a\in\mathbb{R}$.

Să se determine parametrul a pentru care graficul funcției admite o singură asimptotă verticală. Pentru $a=4$ trasați graficul funcției.

6. Se consideră $f(x)=\frac{x^3-3x^2+m}{x-1}, x\neq 1, m\in\mathbb{R}$.

Să se determine m astfel încât graficul funcției să fie tangent axei Ox. Pentru $m=0$ să se traseze graficul funcției.

7. Să se determine parametrul real m pentru care graficul funcției $f(x)=\frac{x^2-2x+m}{x^2-6x+8}$ este tangent axei Ox.

Pentru m astfel determinat să se traseze graficul funcției.

8. Să se determine parametrul real a pentru care funcția $f(x)=\frac{x^2+ax+5}{\sqrt{x^2+1}}$ are trei puncte de extrem diferite. Pentru $a=0$ să se traseze graficul lui f.

9. Fie $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{2x^2-2x+a}, x\neq 0, x\neq 1, a\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine a pentru care graficul lui f admite asimptote verticale.

b) Pentru $a=0$, trasați graficul funcției.

10. Să se determine parametrii reali a,b pentru care funcția $f:E\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-2x+a}{x^2+2ax+b}$ să aibă o singură asimptotă verticală, dreapta $x=1$. Pentru a,b astfel determinați să se traseze graficul lui f.

11. Fie $f(x)=\frac{x^2+ax+b}{\sqrt{x^2-1}}, a,b\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine parametrii reali a,b pentru care $y=x+1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ pentru f, iar $x=2$ este punct de extrem.

b) Pentru $a=1, b=5\sqrt{2}$ să se traseze graficul funcției.

12. Să se determine parametrii reali $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care funcția $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{ax^2+b}{x-1}$, are tangenta la grafic în $x=2$ dreapta $y=-2x+13$. Pentru a,b determinați, trasați graficul funcției.

13. Fie $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2+ax+b}{2(x+1)}, a,b\in\mathbb{R}$.

Să se determine a,b astfel încât graficul funcției să treacă prin punctul $A(0,-1)$, iar $x=1$ să fie punct de extrem pentru f. Cu a,b astfel determinați să se traseze graficul lui f.

14. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax(x-b)(x-c), a\neq 0, a,b,c\in\mathbb{R}$.

Să se determine a,b,c astfel încât $x=\frac{4}{3}$ să fie punct de minim, iar pentru $x=6$, f să ia valoarea minimă 6.

15. Fie $f(x)=\frac{|ax^2+bx+c|}{x-2}, a>0, a,b,c\in\mathbb{R}, c<0, x\neq 2$.

a) Să se determine a,b,c pentru care $y=x+3$ este asimptotă oblică și $f(0)=1$.

b) Pentru $a=1, b=2, c=-3$ trasați graficul lui f.

16. Să se determine parametrii a,b,c astfel încât graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+cx-2}$ să treacă prin $O(0,0)$, să fie tangent axei Ox în O, iar $x=1$ să fie asimptotă verticală. Pentru valorile găsite trasați graficul lui f.

17. Se consideră $f:E\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+cx+d}, a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Să se determine a,b,c,d astfel încât graficul funcției să intersecteze axa Oy în punctul de ordonată $y=-3$ și să nu intersecteze dreapta $y=1$ și $x=1$ este unica asimptotă verticală. Pentru valorile obținute trasați graficul funcției.

18. Fie $f:E\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+d}, a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Să se determine a,b,c,d dacă $x=3, y=x+2$ sunt asimptote pentru grafic și $f(1)=1$.

Trasați graficul funcției pentru valorile lui a,b,c,d astfel determinate.

19. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{ax+b}{\sqrt{x^2+x+1}}, a,b\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine a și b astfel încât f să fie strict crescătoare pe $\mathbb{R}$;
b) Pentru $b=1$ să se reprezinte grafic f.

Teste de evaluare

Testul 1 (1 punct din oficiu)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-x^3$. a) Să se arate că există un punct $c\in(-2,1)$ în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu coarda care unește punctele $A(-2,6)$ și $B(1,0)$ și să se determine coordonatele acelui punct. b) Să se traseze graficul funcției f. (2 puncte)

2. Fie $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+m}{x-1}$.

a) Să se determine parametrul real m astfel încât graficul funcției să fie tangent la axa Ox.
b) Pentru $m=4$ să se studieze variația funcției și să se reprezinte grafic. (2 puncte)

3. Se consideră $f:D\to\mathbb{R}, f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x^n\left(x^2+4\right)}{x\left(x^n+1\right)}$, unde D este domeniul maxim de definiție.

a) Să se determine D și forma explicită a lui f.
b) Să se traseze graficul funcției f. (2 puncte)

4. a) Să se reprezinte grafic funcția $f:D\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{|\ln x|}{\sqrt{x}}$, D este domeniul maxim de definiție al funcției f.

b) Să se discute numărul rădăcinilor reale ale ecuației $f(x)=m, m\in\mathbb{R}$.

c) Să se arate că $3^{\sqrt{5}}<5^{\sqrt{3}}$. (2 puncte)

Testul 2 (1 punct din oficiu)

1. Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2-ax}{\sqrt{x^2+1}}, a\in\mathbb{R}$. Pentru ce valori ale lui a funcția f admite un

extrem local situat la distanța 1 față de Oy? Pentru $a=3$, să se reprezinte grafic funcția f. (2 puncte)

2. Fie funcția $f(x)=\dfrac{x^2+2ax+b}{x^2+1}, a\neq 0, b\in\mathbb{R}, \forall x\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că există două puncte ale graficului lui f în care tangenta este paralelă cu axa Ox și produsul absciselor acestor două puncte este -1.
b) Să se determine a,b astfel încât $f(1)=2$ și $f'(2)=0$.
c) Să se reprezinte grafic funcția astfel determinată. (2 puncte)

3. Fie $f:\mathbb{R}-\{\pm\sqrt{3}\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-3}$.

a) Să se reprezinte grafic funcția f; b) Să se discute numărul de rădăcini reale ale ecuației $x^3-mx^2+3m=0$, unde $m\in\mathbb{R}$. (2 puncte)

4. Să se traseze graficele funcțiilor definite pe domeniul maxim de definiție:

a) $f(x)=\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}x}$; b) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2-1}$. (2 puncte)

Testul 3 (1 punct din oficiu)

1. a) Să se reprezinte grafic funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{|x^2-1|}-x$.

b) Să se determine numărul de rădăcini reale ale ecuației $\sqrt{|x^2-1|}=x+m$, după valorile parametrului real m. (2 puncte)

2. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x^5+15x^4-10x^3-90x^2+mx+n$ are puncte de inflexiune coliniare $\forall m,n\in\mathbb{R}$. (2 puncte)

3. Se consideră funcția $f:D\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^3-3x+a}{x^2+4x+b}, a,b$ parametri reali, iar D este domeniul maxim de definiție al funcției.

a) Să se determine a și b astfel ca funcția să aibă extreme pentru $x=1$ și $x=-5$. b) Să se determine D; c) Să se studieze variația funcției și să se reprezinte grafic funcția. (2 puncte)

4. Să se traseze graficele funcțiilor definite pe domeniile maxime de definiție: a) $f(x)=\ln\left(\dfrac{2|x|-1}{x+2}\right)^2$;

b) $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{4x^2-1}}$. (2 puncte)

7. TESTE DE RECAPITULARE FINALĂ

Testul 1

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ şi $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$.

a) Să se determine matricele A^2 şi A^3.

b) Să se determine matricea $B=6A^5-3A^2+6I_3$.

c) Să se calculeze determinantul matricei B.

(Bacalaureat, variantă, iunie, 2000)

2. I. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $a_n=\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}, n\geq 1$.

a) Să se arate că $a_n<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}, \forall n\geq 1$.

b) Să se stabilească o relaţie de recurenţă între doi termeni consecutivi şi să se studieze monotonia şirului (a_n).

c) Să se stabilească convergenţa şirului (a_n) şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

II. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\ldots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}}\right)$.

3. Se consideră cercul $x^2+y^2-4x+2y=0$.

a) Să se verifice că dreapta $2x-y-10=0$ este tangentă cercului şi să se afle coordonatele punctului A de contact.

b) Prin A se duce o paralelă la prima bisectoare. Să se afle punctul B, în care această dreaptă intersectează din nou cercul.

c) D fiind punctul de intersecţie al tangentelor duse la cerc în punctul în care axa Ox taie cercul, să se scrie ecuaţia coardei comune a cercului dat şi a cercului de diametru $[OD]$ (O este originea axelor de coordonate. (Bacalaureat, august, 1970)

4. Să se rezolve ecuaţia $\begin{vmatrix}1-x&2&3&4\\2&3-x&4&1\\3&4&1-x&2\\4&1&2&3-x\end{vmatrix}=0$.

5. I. Fie funcţia $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{4x-2}{x+1}$.

a) Să se traseze graficul lui f. b) Fie şirul $(x_n)n\geq 0$ cu $x_0=3, x_{n+1}=f(x_n), n\geq 0$. Să se arate că:

1°) $x_n>1, \forall n\geq 0$;

2°) dacă $y_n=\dfrac{x_n-2}{x_n-1}, n\geq 0$, atunci şirul $(y_n)_{n\geq 0}$ este o progresie geometrică;

3°) Să se arate că (y_n) este un şir convergent şi să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} x_n$;

c) Să se aplice teorema lui Lagrange funcţiei f pe $[0,3]$.

d) Să se calculeze $f^{(n)}(0), n\geq 1$.

II. Să se calculeze limitele: a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+x}}{5x+1}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$; c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

Testul 2

1. I. Să se determine $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases}\alpha x+y+z=4\\x+\beta y+z=3\\x+2\beta y+z=4\end{cases}$ să fie simplu nedeterminat.

II. Se consideră matricele $A,B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), A=\begin{pmatrix}x&0&1\\1&y&0\\0&1&z\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}z&0&1\\1&z&0\\0&1&z\end{pmatrix}$. Să se determine x,y,z astfel încât $AB=BA$.

2. I. Se consideră şirurile $(a_n),(b_n)$ definite prin relaţiile:

$a_n=a_{n-1}+15n^2-n, n\geq 1, a_0=0, b_n=b_{n-1}+3n^2-n, n\geq 1, b_0=0$.

a) Să se determine a_n, b_n în funcţie de n;

b) Să se determine $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k, v_n=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$ precum şi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}$.

II. Să se calculeze limitele: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3^n+5^n}{2^n+5^n}\right)^{n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}-\sqrt{n+\sqrt{n}}\right)\sqrt{n}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+\ln 3n}{6n+\ln 6n}$.

3. I. Fie punctul $M(3,3)$ şi triunghiul ABC determinat de dreptele $(AB): x+2y-4=0$, $(BC): 3x+y-2=0$, $(AC): x-3y-4=0$.

a) Să se calculeze aria triunghiului ABC.

b) Fie P,Q,R proiecţiile punctului M pe OA, OB şi AB. Să se demonstreze că punctele P,Q,R sunt coliniare. (ADMITERE, MATEMATICĂ-INFORMATICĂ, UNIV., ORADEA, 1996)

II. Se consideră cercul de ecuaţie $x^2+y^2-6x-4y+8=0$. Să se determine: a) centrul şi raza cercului;

b) ecuaţia tangentei la cerc în punctul $A(2,0)$; c) ecuaţiile tangentelor duse din $B(8,7)$ la cerc. (ADMITERE, MATEMATICĂ, UNIV., CRAIOVA, 1996)

4. I. Fie $\varepsilon\neq 1$ astfel încât $\varepsilon^3=1, A=\begin{pmatrix}1&\varepsilon\\0&\varepsilon^2\end{pmatrix}$ şi $G=\{A^n\,|\,n\in\mathbb{N}^*\}$.

Să se determine numărul de elemente ale lui G.

II. Să se rezolve ecuaţia matricială: $X\begin{pmatrix}3&0&1\\1&0&1\\2&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&2&1\end{pmatrix}$.

5. I. Fie $f:(-\infty,6]\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{6-x}$.

a) Să se traseze graficul lui f. b) Să se determine punctele de intersecţie ale graficului cu $y=x$ (prima bisectoare). c) Fie şirul (x_n) definit prin $x_0=0, x_{n+1}=\sqrt{6-x_n}, n\geq 0$. 1°) Să se studieze

convergența șirului. 2°) Dacă $y_n = x_n - 2, n \geq 0$ atunci $|y_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|y_n|, \forall n \geq 0$, iar de aici să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ și $\lim\limits_{x\to\infty} x_n$.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-f(x-1)\right]\sqrt{-x}$. e) Să se determine constantele $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $F:(-\infty,6]\to\mathbb{R}, F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\sqrt{6-x}$ să aibă proprietatea $F'(x)=x\sqrt{6-x}, \forall x\leq 6$.

f) Să se arate că $2\leq(f\circ f)(x)\leq\sqrt{5}, \forall x\in[2,5]$.

II. Să se calculeze limitele: a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\ln\left(1+e^x\right)}{x-\ln\left(2+e^x\right)}$; b) $\lim\limits_{x\to e}\left(\dfrac{1+2^{\ln x}}{3}\right)^{\frac{1}{1-\ln x}}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\left(\sqrt{1+x}-1\right)}$.

Testul 3

1. I. Se consideră matricele $A,B,C\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}m&3\\2&0\end{pmatrix}, m\neq\frac{5}{4}$. Să se demonstreze: pentru $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$ matricea $x_1A+x_2B+x_3C=O_2$ dacă și numai dacă $x_1=x_2=x_3=0$. (Bacalaureat, variantă, clase profil matematică, informatică, metrologie, iunie, 1998)

II. Să se determine constantele reale a și b dacă matricea $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ satisface condiția $A^3=aA^2+bA$.

III. Să se rezolve sistemul $\begin{cases}3X+4Y=\begin{pmatrix}5&2\\-12&9\end{pmatrix}\\-2X+3Y=\begin{pmatrix}8&-7\\-9&-6\end{pmatrix}\end{cases}$.

2. I. Fie șirurile $(a_n),(b_n)$ cu termenii generali $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)$,

$b_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n, n\geq 1$.

a) Să se arate că $a_n<a_{n+1}<b_{n+1}<b_n, \forall n\geq 1$.

b) Să se arate că șirurile $(a_n),(b_n)$ sunt convergente și au aceeași limită.

c) Să se arate că $a_n\in(0,1), \forall n\geq 2$.

d) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}\right)$.

II. Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\dfrac{2n}{2n+3}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\log_{\frac{1}{3}}\left(1-\dfrac{2}{k(k+1)}\right)\right]$.

3. I. Într-un triunghi ABC se notează cu D și E mijloacele laturilor $[BC]$, respectiv $[CA]$. Cunoscând $A(-1,1), D(1,2)$ și $E(2,0)$, se cere:

a) să se scrie ecuațiile laturilor triunghiului ABC;

b) să se scrie ecuația cercului circumscris triunghiului ABC.

(ADMITERE, MATEMATICĂ, UNIV., PITEȘTI, 1995)

II. Dreapta $(d): x+y-4=0$ este tangentă la elipsa $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, 0<b<3$, în punctul T.

Să se determine: a) semiaxa mică b a elipsei (E); b) coordonatele punctului de tangență T.

(ADMITERE, MATEMATICĂ, UNIV., TIMIȘOARA, 1997)

4. I. Să se rezolve ecuația $\begin{vmatrix}a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1\\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2\\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3\end{vmatrix}=0$.

II. Să se determine α și β parametri reali astfel încât rangul matricei $A=\begin{pmatrix}2&-3&4&-5\\1&2&\alpha&0\\5&-4&7&\beta\end{pmatrix}$ să fie egal cu doi.

5. I. Fie $f_m(x)=\dfrac{mx^2+(m-1)x}{x+1}, x\neq -1, m\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că asimptotele oblice ale familiei $(f_m(x))$ trec printr-un punct fix.

b) Să se determine m astfel încât f_m să aibă două puncte de extrem situate de o parte și de alta a valorii -1.

c) Să se determine m astfel încât f_m să aibă un extrem în $x=-2$.

d) Pentru m determinat la punctul c) trasați graficul funcției f_m.

II. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{\left|x^2-1\right|}$.

a) Să se determine punctele de pe graficul funcției ale căror coordonate sunt numere întregi.

b) Să se determine punctele de întoarcere ale graficului funcției f.

c) Să se aplice teorema lui Rolle funcției f pe $[-1,1]$.

Testul 4

1. I. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze A^2, A^3. b) Să se determine $A^n, n\in\mathbb{N}^*$.

II. Să se arate că $\begin{vmatrix}a&b&a+b\\b&a+b&a\\a+b&a&b\end{vmatrix}=-2\left(a^3+b^3\right)$.

III. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&x\\y&0\end{pmatrix}, x,y\in\mathbb{R}$.

a) Să se calculeze AB, BA.

b) Să se determine x,y astfel încât $AB=BA$.

2. I. Se consideră funcțiile $f,F:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x^b}$ și $F(x)=\dfrac{1}{1-b}x^{1-b}, b\in\mathbb{R}, b>1$. Pentru $n\in\mathbb{N}, n\geq 1$, definim șirul $a_n=f(1)+f(2)+\ldots+f(n)$.

a) Să se arate că $F'(x)=f(x), \forall x>0$. (F este o primitivă a lui f pe $(0,\infty)$).

b) Utilizând teorema lui Lagrange să se arate că pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$ există $c_k\in(k,k+1)$ astfel încât $F(k+1)-F(k)=f(c_k)$.

c) Să se arate că pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$, au loc inegalitățile: $\frac{1}{(k+1)^b}<F(k+1)-F(k)<\frac{1}{k^b}$.

d) Să se arate că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este crescător.

e) Utilizând rezultatul de la punctul c) să se demonstreze că $a_n<\frac{b}{b-1},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

f) Deduceți că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent. (Bacalaureat, variantă, matematică, informatică, metrologie, iunie, 2000)

II. Să se calculeze limitele: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^4+2n^2+1}{n^4+n^2+n}\right)^{\frac{n^3+5}{2n+1}}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$.

3. I. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(0,4),B(-2,0),C(3,0)$.

a) Să se reprezinte punctele și să se calculeze distanțele BC și AC.

b) Să se scrie ecuațiile madiatoarelor segmentelor $[AB]$ și $[BC]$.

Să se determine centrul și raza cercului circumscris triunghiului ABC.

(Bacalaureat, variantă, matematică-fizică, informatică, metrologie, august, 2000)

II. a) Să se scrie ecuația parabolei raportată la axa $x'x$ ca axă de simetrie, axa $y'y$ ca tangentă de la vârf și cu focarul $F(3,0)$; pe această parabolă se consideră un punct mobil P. Să se arate că punctul de intersecție N al perpendicularei duse din O pe tangenta în P la parabolă, cu dreapta FP, se deplasează pe dreapta de ecuație $x+y+6\sqrt{3}=0$.

b) Cercul $x^2+y^2-6x=0$ se intersectează respectiv cu axa Ox și bisectoarea unghiului xOy în punctele R și S (diferite de origine). Se cere aria triunghiului ORS.

4. Se consideră sistemul $(S):\begin{cases}2x-y+5z+7t=0\\4x-2y+7z+5t=0\\2x-y+z-5t=0\end{cases}$.

a) Sistemul admite soluțiile $x=-8,y=8,z=-3,t=1$ respectiv $x=4,y=8,z=0,t=0$? Justificați răspunsul;

b) Să se rezolve sistemul. (Bacalaureat, variantă, economic, fizică-chimie, chimie-biologie, iunie, 1999)

5. Se consideră funcția $f:[-3,\infty)\to\mathbb{R},f(x)=\sqrt{8+x}-\sqrt{3+x}$.

a) Să se arate că f este strict descrescătoare. b) Să se arate că $f(x)\leq\sqrt{5},\forall x\geq -3$.

c) Să se rezolve inecuația $f(x)\leq 1$; d) $\overline{f}:[-3,\infty)\to\left(0,\sqrt{5}\right],\overline{f}(x)=f(x),\forall x\geq -3$ este inversabilă și să se calculeze $\left(\overline{f}^{-1}\right)'(1)$. e) Fie șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin recurența $x_0\in[-3,\infty)$, fixat și $x_{n+1}=f(x_n),\forall n\geq 0$. Să se arate că: 1°) subșirurile $(x_{2n}),(x_{2n+1})$ sunt monotone; 2°) șirul (x_n) nu este monoton; 3°) șirul (x_n) este convergent și să se calculeze limita sa.

f) Fie funcția $F:[-3,\infty)\to\mathbb{R},F(x)=\frac{2}{3}(8+x)\sqrt{8+x}-\frac{2}{3}(3+x)\sqrt{3+x}$. Să se arate că: 1°) $F'(x)=f(x),\forall x>-3$; 2°) F este strict crescătoare; 3°) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{F(x)}{\sqrt{x}}=5$.

Testul 5

1. I. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze AB,BA.

b) Să se arate că $(A+B)^{2007}=A^{2007}+B^{2007}$.

II. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât matricea $A=\begin{pmatrix}2&x&3\\x&-1&x\\1&2&m\end{pmatrix}$ să fie inversabilă $\forall x\in\mathbb{R}$.

III. Să se rezolve și discute sistemul: $\begin{cases}(2m+3)x-4y+z=0\\x+my-z=0\\3x-12y-(2m-9)z=0\end{cases},m\in\mathbb{R}$.

2. I. Se consideră funcțiile $F,f:(1,\infty)\to\mathbb{R},F(x)=\ln(1+\ln x)$ și $f(x)=\frac{1}{x(1+\ln x)}$. Pentru $n\in\mathbb{N},n\geq 2$, se definește șirul $a_n=f(2)+f(3)+...+f(n)$.

a) Să se arate că $F'(x)=f(x),\forall x>1$ (F este o primitivă a lui f pe $(1,\infty)$). b) Utilizând teorema lui Lagrange să se arate că pentru orice $k\in\mathbb{N},k\geq 2$ există $c_k\in(k,k+1)$ astfel încât $F(k+1)-F(k)=f(c_k)$. c) Să se arate că pentru orice $k\in\mathbb{N},k\geq 2$, au loc inegalitățile:

$\frac{1}{(k+1)(1+\ln(k+1))}<F(k+1)-F(k)<\frac{1}{k(1+\ln k)}$. d) Să se arate că șirul $(a_n)_{n\geq 2}$ este crescător.

e) Utilizând rezultatul de la punctul c) să se demonstreze că: $a_n\geq F(n+2)-F(2),\forall n\in\mathbb{N},n\geq 2$.

f) Deduceți că limita șirului $(a_n)_{n\geq 2}$ este $+\infty$. (Bacalaureat, variantă, matematică-fizică, informatică, metrologie, iunie, 2000)

II. Să se calculeze limitele: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+...+\frac{1}{(2n)^2}\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, unde x_n este unica soluție nenulă a ecuației $e^{nx}=nex+1$.

3. I. În triunghiul ABC se cunosc: 1) ecuația dreptei $AB:3x+2y-12=0$; 2) ecuația înălțimii $BM:x+2y-4=0$ și 3) ecuația înălțimii $AM:4x+y-6=0$, unde M este punctul de intersecție al înălțimilor. Să se scrie ecuațiile dreptelor AC,BC și înălțimii CM.

II. Punctul M împarte segmentul determinat de focarele hiperbolei $9x^2-16y^2=144$ în raportul $\frac{F_1M}{MF_2}=\frac{2}{3}$, unde F_1 este focarul situat pe semiaxa negativă Ox'. Prin punctul M se duce o dreaptă care face cu axa Ox unghiul de 135°. Să se determine punctele de intersecție ale acestei drepte cu asimptotele hiperbolei.

4. Se consideră ecuația $\begin{vmatrix}1&2&3&4\\-2&2-x&1&7\\3&6&x+4&12\\-4&x-14&2&3\end{vmatrix}=0$.

Să se determine produsul rădăcinilor ecuației.

5. Fie $f:\mathbb{R}-\{-2\}\to\mathbb{R},f(x)=\frac{3+2x}{2+x}$.

a) Să se traseze graficul funcției. b) Să se determine punctele de intersecție ale graficului lui f cu prima bisectoare. c) Fie șirul $(x_n),x_0=-1,x_{n+1}=f(x_n),n\geq 0$. 1°) Să se studieze convergența șirului. 2°) Dacă $y_n=\frac{x_n-\sqrt{3}}{x_n+\sqrt{3}},n\geq 1$, atunci șirul (y_n) este o progresie geometrică pentru care se

cer primul termen și rația. Să se determine apoi $\lim_{y\to\infty} y_n$ și $\lim_{x\to\infty} x_n$. d) Să se arate că $\frac{3}{2}\le f(x)\le\frac{5}{2}, \forall x\in[0,1]$.

e) Se consideră $F:(-2,\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=ax+b\ln(x+2)$. Să se determine a,b astfel încât $F'(x)=f(x), \forall x>-2$.

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

Capitolul 0. Permutări

1. $i=5, j=6, k=3, l=2, m=4$; 4. 1) $\sigma^3=e$; 2) $\sigma^3=e$; 3) $\sigma^5=e$; 5. 1) $\sigma^3=e, \sigma^{100}=\sigma, \sigma^{2001}=e$, $\sigma^{302}=\sigma^2, \sigma^{403}=\sigma, \sigma^{504}=e$; 6. Pe fiecare linie și pe fiecare coloană a tablei sunt toate elementele din G; 7. $C_n^2=55\Leftrightarrow n^2-n-110=0\Rightarrow n=11$; 9. 1) $\sigma=(13)(12)$; 2) $\tau=(13)(24)$; 3) $\varphi=(15)(23)(24)$; 10. $(ij)=(1j)(1i)(1j)$; 11. 1) 2;1; 2) 4;1; 3) 9;−1; 4) 13;−1; 5) $k-1;(-1)^{k-1}$; 6) $\frac{n(n+1)}{2};(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$; 12. a) Prin inducție după $k=\overline{1,n}$; 13. $\{i,j,k\}=\{2,3,6\}$ și cum $4=\sigma(1), 5=\sigma(10)$, numărul de inversiuni determinate de i,j,k și numerele $4,7,9,8,10,1,5$ este același . Maximul se atinge pentru $i=6, j=3, k=2$;

15. 1) a) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}$, $\varepsilon(\sigma)=(-1)^4=1$; b) $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}, \varepsilon(\tau)=(-1)^5=-1$;

c) $\varphi=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}, \varepsilon(\varphi)=(-1)^2=1$; 16. 1) 6; 2) −6; 3) −18; 4) 0; 17. $\varepsilon(\sigma^2)=\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma)=1$, iar $\varepsilon\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}=(-1)^3=-1$; 18. $\sigma x=\tau\Leftrightarrow x=\sigma^{-1}\tau; x\sigma=\tau\Leftrightarrow x=\tau\sigma^{-1}$;

1) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$; 19. $\sigma x\tau=\varphi\Leftrightarrow x=\sigma^{-1}\varphi\tau^{-1}$; 1) $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}$;

20. 1) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$; 21. Șase soluții;

22. 1) $\sigma=e;\{S_\sigma;\sigma\in S_n\}$ este o mulțime finită și deci admite maxim. Fie $\sigma\in S_n$ pentru care S_n este maximă. Pentru orice $i<j$ avem $S_{\sigma(ij)}\le S_\sigma$

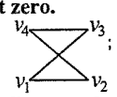
$\Leftrightarrow\frac{a_i}{a_{\sigma(j)}}+\frac{a_j}{a_{\sigma(i)}}\le\frac{a_i}{a_{\sigma(i)}}+\frac{a_j}{a_{\sigma(j)}}\Leftrightarrow(a_i-a_j)\left(\frac{1}{a_{\sigma(i)}}-\frac{1}{a_{\sigma(j)}}\right)\le 0\Leftrightarrow a_{\sigma(j)}>a_{\sigma(i)}$ (pentru că $a_i<a_j$).

Deci $\sigma(j)>\sigma(i), \forall i<j$. Din problema 12. a) $\Rightarrow\sigma=e$; ca la a), via problema 12.b);

24. $\sigma(2)-\sigma(1)+1=\sigma(3)-\sigma(2)+1=\ldots=\sigma(n)-\sigma(n-1)+1=k$. Pentru $k\ge 0\Rightarrow\sigma(1)\le\sigma(2)\le\ldots\le\sigma(n)\Rightarrow\sigma=e$. Pentru $k\le 0\Rightarrow\sigma(1)\ge\sigma(2)\ge\ldots\ge\sigma(n-1)\ge\sigma(n)\Rightarrow$ $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&\ldots&n\\n&n-1&\ldots&1\end{pmatrix}$; 25. $\sigma=(1,6,8)\cdot(2,7,3)\cdot(5,9)$. Prin inducție după $n:(1,2,\ldots,n+1)$ $=(1,n+1)$. $(1,2,\ldots n);(1234);(1,2,3,4,5)$.

Capitolul 1. Matrice

Tabele de tip matricial. Matrice 3. a) $(3,4)$; b) $\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}$; c) $(35-34)$; d) 1;

4. $R=\{(a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_1),(a_3,b_2)\}$; 6. a) $a_{12}=a_{14}=a_{15}=a_{21}=a_{23}=a_{25}=$
$=a_{32}=a_{34}=a_{35}=a_{41}=a_{43}=a_{45}=a_{51}=a_{52}=a_{53}=a_{54}=1$ în rest zero.
b) $a_{12}=a_{13}=a_{14}=a_{21}=a_{31}=a_{34}=a_{41}=a_{43}=1$, în rest zero . 7. 

;

9. a) $2^3=8$; b) $3^{2\cdot2}=81$;c) $2^{3\cdot4}=4096$; Operații cu matrice . Egalitatea a două matrice.

1. a) $x=y=t=0,z=1$; b) $x=0,y=\frac{1}{2},z=-3,t=5$; c) $x=-1,y=2,t\in\{-u,u\},z=3$;

d) $x=2,y=1$; e) $x_1=-1,y_1=4;x_2=5,y_2=10$; f) $x_1=27,y_1=1;x_2=1,y_2=27$.

Transpusa unei matrice. 3. Pentru $n=2$ avem $2^3=8$,iar pentru $n=3$ avem $2^6=64$.
Adunarea matricelor. 3. $x=-2,y=-4,z=1$; 4. a) $X=B-A$; b) $X=A-B$;

5. $A=\begin{pmatrix}2&-1\\2&3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&2\\-4&2\end{pmatrix}$; 6. a) $B+{}^tA={}^t(A+{}^tB)$; b) ${}^tA+{}^tB={}^t(A+B)$; 7. a) A și B simetrice

$\Rightarrow {}^tA=A,{}^tB=B\Rightarrow {}^t(A+B)={}^tA+{}^tB=A+B\Rightarrow A+B$ simetrică ;

8. a) ${}^t(M+{}^tM)={}^tM+{}^t({}^tM)={}^tM+M\Rightarrow M+{}^tM$ simetrică ;

b) ${}^t(M-{}^tM)={}^tM-M=-(M-{}^tM)\Rightarrow M-{}^tM$ antisimetrică ; Aplicații.

1) $S_M=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&5\end{pmatrix},A_M\begin{pmatrix}0&\frac{-5}{2}\\\frac{5}{2}&0\end{pmatrix}$; 9. $a_{11}=\frac{n(n+1)}{2},a_{12}=n^2,a_{21}=2^{n+1}-2-n,\ a_{22}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$

pentru S_n ; 10. $\omega^3=1$. Avem $S_{3p}=\begin{pmatrix}3p&0\\0&3p\end{pmatrix},S_{3p+1}=\begin{pmatrix}3p+1&\omega\\\omega^2&3p+2\end{pmatrix}$ și

$S_{3p+2}=\begin{pmatrix}3p+2&-1\\-1&3p+2\end{pmatrix}$; 11. $A=\begin{pmatrix}2&\lambda\\-6-\lambda&-2\end{pmatrix},\lambda\in C$; 12. $A(f)=\begin{pmatrix}2&3\\-1&5\end{pmatrix}$,

$A(g)=\begin{pmatrix}-3&1\\1&-2\end{pmatrix}\Rightarrow A(f+g)=\begin{pmatrix}-1&4\\0&3\end{pmatrix}$; 13. c_{23} = tricouri roșii mărimea M, c_{32} = tricouri albe

mărimea XXL, c_{43} = tricouri verzi mărimea M. 14. $S=\begin{pmatrix}3&2&4&5\\1&5&3&6\end{pmatrix}$ și $A'B'C'D'$ se obține din

$ABCD$ prin translația de vector $\vec{v}=(-2,3)$; 15. a) 13 24 33 15 22 11 33 14 15 43 44 15 35 45 44 24
33 43 15 24 33 43 15 11 31 11 32 45 31 44. b) Modestia, sentimentul moderat al valorii proprii.
Înmulțirea matricelor cu un scalar. 1. a) $A=(0{,}93\ 0{,}95\ 0{,}85)$; b) $B=0{,}97A$; c) $C=1{,}02A$; 3.

$T=\begin{pmatrix}0&3&3&0\\0&0&3&3\end{pmatrix},3T=\begin{pmatrix}0&9&9&0\\0&0&9&9\end{pmatrix},\frac{1}{3}T=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$; 5. a) $x=6,y=-1$;

b) $x=3,y=-1,z=2$; c) Se obține $x+yt=1,2x+2y=1,x+3=-1$ și $z=1$, de unde

$x=\frac{3}{4},y=-\frac{1}{4},z=1,t=-1$; d) $x=2,y=4,z=1,t=3$; 7. a) Se obține sistemul

$\alpha+\beta+\gamma=0,2\beta+2\gamma=0,3\gamma=0$, de unde $\alpha=\beta=\gamma=0$; b) $a=2,b=0,c=3$; 8. a) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2&-6\\12&12\end{pmatrix}$;

c) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2-i&-1&1+2i\\1-2i&-4i&-2-i\end{pmatrix}$; 9. a) $X=\begin{pmatrix}4&2\\0&1\end{pmatrix},Y=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$; b) $X=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-1&0&1\end{pmatrix},Y=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&-2&1\end{pmatrix}$.

Înmulțirea matricelor. 1. 1) $AB=(-10)$; 2) $AB=(-4)$; 3) $AB=(46)$; 4)-5) nu are sens;

8) $AB=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta)&-\sin(\alpha+\beta)\\\sin(\alpha+\beta)&\cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$; 9) $AB=\begin{pmatrix}7&17&3&10\\10&35&9&24\end{pmatrix}$; 11) $AB=\begin{pmatrix}i&-2i\\2&-6\end{pmatrix}$;

2. $x=2,y=4$; 4. $Tr(AB-BA)=0\neq3=Tr(I_3)$; 5. Prin calcul direct $ABC=\begin{pmatrix}3&19\\-4&-28\end{pmatrix}$;

6. $X=\begin{pmatrix}x&y&z\\0&x&y\\0&0&x\end{pmatrix},x,y\in\mathbb{R}$; 8. Se folosește AX=XA pentru $A=\left\{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right\}$

9. 1) $X=\begin{pmatrix}-9&11\\13&-13\end{pmatrix}$; 2) $X=\begin{pmatrix}1{,}4&-0{,}2\\-0{,}6&-0{,}2\end{pmatrix}$; 3) $X=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&2&-1\end{pmatrix}$; 15. a) Produsul este74, iar cifra de control 80-74=6 ; b) Produsul este 79, iar cifra de control 80-79=1; 16. 1) Se obține $180+10C\equiv0(\mathrm{mod}\,11)$ sau $11\cdot16+4+10\,C\equiv0(\mathrm{mod}\,11)$ sau $4+10\,C\equiv0(\mathrm{mod}\,11)$ .De aici C=4. Deci, cifra este corectă. 17. AP= punctele obținute acasă ; DP=punctele obținute în deplasare; AP+DP= punctele obținute în total. Ordinea este :Dinamo, Steaua, Rapid; 18. M=PAQ=$\frac{8}{9}$;

19. a) $A=\begin{pmatrix}0{,}45&0{,}55\\0{,}7&0{,}3\end{pmatrix}$; b) $M_1=(0{,}5\ 0{,}5),M_2=M_1A=(0{,}575\ 0{,}425)$,

$M_3=M_2A=(0{,}556\ 0{,}444)$; c) $X=(0{,}56\ 0{,}44)$; 20. 1) $\begin{pmatrix}k&0\\0&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, 22. P' aparține

dreptei $\Rightarrow y'=2x'$ și $PP'\perp$ dreaptă $\Rightarrow\frac{x'-x}{2}=\frac{2x'-y}{-1}\Rightarrow x'=\frac{1}{5}(x+2y)\Rightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{2}{5}&\frac{4}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Ridicarea la putere a unei matrice. 2. $A^2=-I_2,A^3=-A,A^4=I_2\Rightarrow n=4$;

3) $Tr(A)=1+4=5$, $\det(A)=1\cdot4-2\cdot3=-2\Rightarrow A^2=5A+2I_2\Rightarrow A^3=5A^2+2A=$
$=27A+10I_2\Rightarrow a=27,b=10$; 2) $A^2=7I_2\Rightarrow A^3=7A\Rightarrow a=7,b=0$; 3) $a=3,b=-2$; 4. a)
$A^2=2A,A^3=4A,...,A^n=2^{n-1}A$; b) $A^2+A^3+...+A^n=\left(2+2^2+...+2^{n-1}\right)A=\left(2^n-2\right)A$; 6. a)

$A^2=A$; b) inducție; c) $(1+2+3+...+n)A=\frac{n(n+1)}{2}A$; 7. I.1) $A^n=\begin{pmatrix}1&3n\\0&1\end{pmatrix},S_n=\begin{pmatrix}n&\frac{3}{2}n(n+1)\\0&n\end{pmatrix}$;

3) $A^2=I_2\Rightarrow A^{2k}=I_2$,$A^{2k+1}=A$, $S_{2k}=k(A+I_2),S_{2p+1}=(k+1)A+kI_2$; II. 1)

$A^n=(I_3+B)^n=I_3+nB,B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$; 2) $a_{11}^{(n)}=a_{13}^{(n)}=a_{31}^{(n)}=a_{33}^{(n)}=2^{n-1}$,în rest sunt zero;

12. $\frac{1}{2^n}\cos\frac{n\pi}{4}\to0,\frac{1}{2^n}\sin\frac{n\pi}{4}\to0$ (produsul dintr-un șir convergent la zero și altul mărginit);

13. Prin inducție; 15,16,17. Se determină matricea de trecere și distribuția inițială X_0.

Teste de evaluare Testul 1. 1a) Se obține sistemul $\beta+\gamma+\delta=0,\alpha+\gamma+\delta=0,\ \alpha+\beta+\delta=0,$
$\alpha+\beta+\gamma=0$ cu soluția banală; b) $\alpha=6,\beta=0,\gamma=-1,\delta=-2$; 2. $x=1,y=-2$; 3. $x=y=0$;

4. $X=\begin{pmatrix}2&3\\0&2\end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix}-1&-2\\0&-1\end{pmatrix}$; 5a) Prin inducție după $n\in\mathbb{N}^*, a_1=2, b_1=1$; b) Utilizați egalitatea $A^{n+1}=A^n\cdot A$; c) Inducție după n plus relațiile de la b); 7. 2) $AS_0=S_1=\begin{pmatrix}b\\a\\c\end{pmatrix}$; 3) $B=\begin{array}{c}\\a\\b\\c\end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix}a&b&c\end{matrix}\\\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\end{array}$;

5) $M^2S_0=\begin{pmatrix}c\\a\\b\end{pmatrix}$; 6) $M_3=I_3$ și ordinea este : $S_6=S_0=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Testul 2. 1. b); 2. e); 3. b); 4. Din $A^{n+1}=A^n\cdot A\Rightarrow a$); 5. 1) Se arată prin inducție că $A^n=\begin{pmatrix}2^n&2^n-1\\0&1\end{pmatrix}$; c); 2) $\alpha=Tr(A)=2+1=3, \beta=\det(A)=2$; a); 6. Prin inducție $A^n=2^{n-1}A$; b); 7. Se scrie matricea de trecere T și distribuția inițială $X_0=(001)$. Atunci $X_3=X_0T^3=\left(\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{2}\right)$; c).

Capitolul 2. Determinanți

Determinanți de ordin 2. 1. 1)5; 2)1; 3) –24; 4) 1; 4. 1) Falsă. Se iau $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$; 2) Adevărată. Prin calcul direct; 3) Adevărată pentru $\det AB=\det(A)\det(B)=\det(B)\det(A)=\det(BA)$; 6. $\det(AB)=\det(A)\det(B)=12$; $\det(A^3)=(\det(A))^3=27$; $\det(2A)=2^2\det(A)=12$.

Determinanți de ordin 3. 1. I. 1) -21;2) -72; 3) -8; 4) 11; II. 1) 0; 2) $abc(b-a)(c-a)(c-b)$; 5. $x=\frac{1}{3}, y=\frac{10}{3}, z=-\frac{13}{3}$.

Proprietăți ale determinanților. 2. Determinantul are 16 elemente, din care cel puțin 13 sunt egale cu zero. Deci există cel puțin o linie(sau o coloană) formată numai din zerouri. Deci determinantul este nul. În general un determinant de ordin n care are cel puțin n^2-n+1 elemente egale cu zero este nul. 3. 1) $L_1\leftrightarrow L_2$; 4) $C_3=2C_1$; 6) sumă de doi determinanți, fiecare egal cu zero; 7) $C_3=C_1+C_2$; 8) L_1+L_2; 4. $D_2=-D_1, D_3=D_1$, $D_4=D_1$. 7. AE_1 este matricea obținută din A, interschimbând coloanele 1, 2; E_1A este matricea obținută din A, interschimbând liniile 1, 2; $\det(AE_1)=\det(E_1A)=\det(E_1)\det(A)=-\det(A)$; 8. $\det(E_1A)=-5, \det(E_2A)=15, \det(E_3A)=5$;

9. 1) C_1-2C_2, C_3+C_2; 2) C_2-C_1, C_3-C_1; 3) L_1-L_3, L_2-L_3; 4) C_3-C_1, C_2-C_3;

10. 1) C_1+C_3 și avem primele două coloane proporționale; 2) $L_1+L_2+L_3$ și rezultă elementele primei linii egale cu zero; 3) $C_2-C_1, C_3-\lambda C_2\Rightarrow$ un determinant în care $C_1=C_3$; 4) C_2-C_1, C_3-C_1 și forțați factor comun în C_2 pe $b-a$ și în C_3 pe $c-a$;

11. 1) Se scot factori comuni pe linii a, b și respectiv c; $abc(b-a)(c-a)(c-b)$;

2) $abc(b-a)(c-a)(c-b)$; 3) $(y-2x)(3z-2x)(3z-y)$, 4) $(a+b+c)$ $(b-a)(c-a)(c-b)$; 5) Se scrie ca sumă de determinanți; $(y-x)(z-x)(z-y)xyz$;

12. 1) $\cos 2x=2\cos^2 x-1$; 2) $\sin 2x=2\sin x\cos x, \sin 3x=\sin x(3-4\sin^2 x)$; 3) C_2+C_1, L_2-L_1, L_3-L_1; $\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-b)$; 13. 1) $L_3+L_2+L_1, C_2-C_1, C_3-C_1$; $(x+y+z-1)^2$; 2) C_2-C_1, C_3-C_1; $2xyz(x+y+z)^3$; 3) $L_2+L_1, C_2-C_1, C_3-C_1$; 4) Sumă de determinanți prin scrierea $-2a=-a-a$; 14. 1) $L_1+L_2+L_3$; $x_1=-4, x_2=x_3=2$; 2) $L_1+L_2+L_3$; $x_1=-3, x_{2,3}=\frac{3\pm i\sqrt{3}}{2}$; 5) $x_1=0, x_2=3$;

Inversa unei matrice. 1. Se arată că $A\cdot A^{-1}=I$; 2. I. 1) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$; 2) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$; 3) nu există $(\det A=0)$; II. 1) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$; 2) nu există; 3. A este nesingulară dacă $\det(A)\neq 0$; I. 1) $m\in\mathbb{R}-\{\pm 2\}$; II. 1) $m^3-3m+2\neq 0\Rightarrow m\in\mathbb{R}-\{-2,1\}$;

III. 1) Trebuie ca $\det(A)\neq 0, \forall x$, adică $(1-m)x^2+2x+3-2m\neq 0, \forall x\Leftrightarrow(\Delta<0, m\neq 1)$. De aici $m\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup(2,\infty)$; 5. 1) a) $X=\begin{pmatrix}-5&5\\-7&7\end{pmatrix}$; b) $X=\begin{pmatrix}7&-5\\7&-5\end{pmatrix}$; c) $X=\begin{pmatrix}-35&25\\-49&35\end{pmatrix}$;

6. $AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B$; 1) $A=\begin{pmatrix}2&5\\1&-3\end{pmatrix}; A^{-1}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}3&5\\1&-2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow x=\frac{19}{11}, y=-\frac{1}{11}$; 7. $A=\begin{pmatrix}1&5&18&16&19\\19&16&1&21&0\\20&20&19&14&0\end{pmatrix}$. Din $B\cdot A$ rezultă mesajul codificat 1 20 40 5 21 41 18 19 38 16 37 51 19 19 19.

Ecuația unei drepte. Coliniaritatea a trei puncte. 1. 1) $3x+2y-6=0$; 2) $6x+5y-7=0$; 2. 1) $C, E\in AB$; 3. 1) $m\in\{0,1\}$; 6. Se determină coordonatele punctelor și apoi se probează coliniaritatea lor.

Aria unui triunghi. 1. 6; 2. 4; 3. 3; 4. 49; 5. $7x+24y-134=0, x-2=0$; 6. $3x+4y-13=0$; 7. $3x-4y-25=0, 3x-4y+5=0$; 10. $4x-y+11=0, y-3=0$; 11. $3x-y+2=0$; 12. $M=G\left(0,\frac{5}{3}\right)$.

Teste de evaluare. Testul 1. 1. a) $L_1=-L_3$; b) $C_1+C_2+C_3$ și se dă factor comun 2 de pe C_1; C_2-C_1, C_3-C_1 și se scrie determinantul obținut ca sumă de determinanți.

2. a) $D\left(-\frac{3}{2}\right)=0$; b) $x_1=-\frac{3}{2}, x_2=x_3=3$; 3. b) $x=y=1, z=2$; 4. a) $x\in\{-3,1\}$;

b) $M(3,2), N\left(\frac{5}{2},0\right), P\left(\frac{115}{33},\frac{130}{33}\right)$ sunt mijloacele diagonalelor $[AC],[BD],[EF]$, care sunt puncte coliniare; 5. Fie $M_1=\begin{pmatrix}301 & 378 & 367 & 238 & 345\\ 135 & 173 & 168 & 107 & 156\end{pmatrix}$. Avem $\det(A)=1\neq 0$ și deci A este inversabilă. Se calculează matricea $M=A^{-1}M_1=\begin{pmatrix}31 & 32 & 31 & 24 & 33\\ 11 & 45 & 44 & 11 & 24\end{pmatrix}$. Deci, mesajul cifrat cu pătratul lui Polybe este 31 11 32 45 31 44 24 11 32 24, a cărui decodificare conduce la mesajul „ la mulți ani".
Testul 2(grilă) 1.1) *i*) c); *ii*) a); 2) *i*)b); *ii*) c); 2. b); 3. d); 4. a); 5. *i*)b; *ii*) a); *iii*) b); 6. a).

Capitolul 3. Sisteme de ecuații liniare

1.1) $\begin{pmatrix}2 & -4\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 4\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$.

2.1) $\begin{cases}3x_1+x_2=0\\ -2x_1+5x_2=1\end{cases}$; 2) $\begin{cases}-4x_1+3x_2=-2\\ 2x_1-x_2=5\end{cases}$; 3) $\begin{cases}3x_2+2x_3=1\\ -x_1+x_2=2\\ -2x_1+3x_3=3\end{cases}$;

4.1) $x_1=2,x_2=0$; 2) $x_1=-1,x_2=2,x_3=-2$; 3) $x_1=5,x_2=2,x_3=-2$;

5.1) a) $\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}4 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

Deci $x=1,y=1$; b) $x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{3}$; c) $x=\frac{2}{11},y=\frac{3}{11}$; d) $x=2,y=3,z=-1$;

e) $x=1,\ y=2,z=-2$, f) $x=1,y=-\frac{1}{2},z=\frac{1}{2}$. 2. a) $A=\begin{pmatrix}m & 2\\ 2 & m\end{pmatrix}$, $\det(A)=m^2-4$. Dacă $m^2-4\neq 0$, adică $m\in\mathbb{R}-\{\pm 2\}$, sistmul este compatibil determinat (s.c.d) cu soluția $x=y=-\frac{1}{m+2}$; dacă $m=-2$ sistemul devine $-2x+2y=-1, 2x-2y=-1$, imposibil (deoarece prin adunare rezultă $0=2$!) Deci sistemul este incompatibil; dacă $m=2$ sistemul se reduce la o ecuație $2x+2y=-1$ și dacă $y=\alpha$, atunci $x=\frac{-1-2\alpha}{2},\alpha\in\mathbb{R}$. Sistemul este compatibil simplu nedeterminat.

b) Dacă $m\in\mathbb{R}-\{\pm 1\}$, atunci avem s.c.d. cu soluția $x=\frac{m^2-3m-2}{m^2-1},y=\frac{m^2+m+2}{m^2-1}$; dacă $m=-1$, prima ecuație devine $0\cdot x+0\cdot y=-2$, imposibil și sistemul este incompatibil dacă $m=1$ sistemul devine: $2x+2y=2, x+y=3$, iar de aici $1=3$, fals. Deci sistemul este incompatibil. (s.i.). c) $m\in\mathbb{R}-\{-2,1\}\Rightarrow$ s.c.d. $m=-2\Rightarrow$ s.i., $m=1\Rightarrow$ s.i.,

d) $m\in\mathbb{R}-\{0,\pm 1\}\Rightarrow$ s.c.d. $\left(x=\frac{1}{m},y=-\frac{1}{m},z=\frac{1}{m}\right)$; $m=0\Rightarrow$ s.i., $m=1\Rightarrow$ s.c.n. $(x=1,y=-\alpha,z=\alpha,\alpha\in\mathbb{R})$; $m=-1\Rightarrow$ s.c.n. $(x=\alpha,y=1,z=\alpha,\alpha\in\mathbb{R})$;

6. I.1. a) $\left(-\frac{1}{11},\frac{19}{11}\right)$; b) $\left(\frac{13}{9},-\frac{1}{9}\right)$; d) $(1,1,-2)$; e) $\left(1,4,\frac{1}{2}\right)$; 7. a) $y=\frac{2}{3}x$; 8. a) $(3,-5)$;

II. 1) $x>7,y>-6$; $\frac{1}{\sqrt{x-7}}=u,\frac{1}{\sqrt{y+6}}=v$; $(16,30)$; 2) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{5},\ldots\frac{1}{x}=a,\frac{1}{y}=b,\frac{1}{z}=c$; $\left(\frac{120}{61},\frac{120}{11},\frac{120}{19}\right)$; 3) Prima ecuație se împarte cu $xy,\frac{1}{x}=a,\ldots$;

9. $A(2,-1),B(-1,3),C(2,4)$; 10. $m\neq -4$; 11. $f(x)=2x^2-3x-3$;

12. 1) a) $u=\frac{37}{5}e_1-\frac{4}{5}e_2$; 13. a) $A=3,B=-2$; 14. a) $m\in\mathbb{R}-\{\pm 2\}$; c) $m\in\mathbb{R}-\{1\}$;

15. a) $m\in\{\pm 1,0\}$; b) $m=1$; c) $m\in\{-2,1\}$. 16. a) $(2,4)$ b) $(6,-3)$ c) $(2,-1,1)$.

17. 1) a) 2; b) 1; c) 3; d) 3; 2) a) $m\neq -\frac{1}{3}\Rightarrow r=2$; $m=-\frac{1}{3}\Rightarrow r=1$; b) $m\neq 1,-2\Rightarrow r=3$; $m=-2\Rightarrow r=2; m=1\Rightarrow r=1$; 3) a) $\det(A)=-x^2+2mx-m; r=3\Leftrightarrow\Delta<0\Rightarrow m\in(0,1)$;

18. a) $\left(\frac{7\lambda}{13},\frac{16\lambda}{13},\lambda\right),\lambda\in\mathbb{R}$; c) $(1-\alpha,\alpha-2,\alpha),\alpha\in\mathbb{R}$; 19. a) $\left(\frac{2\alpha-5\beta}{7},\frac{3\alpha-4\beta}{7},\alpha,\beta\right)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$; 21. a) $(0,0,0)$; b) $\left(\frac{\alpha}{3},\frac{2\alpha}{3},\alpha\right),\alpha\in\mathbb{R}$; 22. a) $m\neq -\frac{17}{5},2\Rightarrow$ s.c.d.

$m=2,m=-\frac{17}{5}\Rightarrow$ s.i. ; 23. a) $m\neq 0\Rightarrow$ s.c.d.; $m=0,n\neq\frac{7}{4}\Rightarrow$ s.i. ; $m=0,n=\frac{7}{4}$ s.c. $\left(\alpha,0,\frac{1}{2}\right)$, $\alpha\in\mathbb{R}$; 24. $a=2,b=-12,c=-2$; 31. $\overline{abc}=685$; 32. $a=100,s=100,c=100$; 33. $A=45,B=15$; 35. a) $(5,3,-2)$; b) $(2,4,2)$

Teste de evaluare. Testul 1. 1. Sistemul compatibil dublu nedeterminat $\left(\frac{-3\alpha-2\beta}{2},\frac{7\alpha-4\beta}{2},\alpha,\beta\right),\alpha,\beta\in\mathbb{R}$; 2. $\det(A)=-2\beta+4;\beta\neq 2$ și $\alpha\in\mathbb{R}\Rightarrow\operatorname{rang}(A)=3$; $\beta=2,\alpha=0\Rightarrow\operatorname{rang}(A)=2;\beta=2,\alpha\neq 0\Rightarrow\operatorname{rang}(A)=3$; 3. $\Delta=2a(a-2)=0\Rightarrow a\in\{0,2\}\Rightarrow S=2$; 4. a) $\operatorname{rang}(A)=3$; b) $t=\alpha\in\mathbb{R},z=-\alpha,x=1,y=0$; c) Este sistemul de la a). Testul 2. 1. $\Delta=0,\Delta_{car}=0\Rightarrow a_1=1,b_1=-\frac{1}{4}$, când $x=\frac{3}{8}(\lambda-1),y=\frac{1}{4}(\lambda-1)$, $z=\lambda\in\mathbb{R}$ sau $a_2=2,b_2=-1$ când $x=\frac{1}{8}(5\lambda-3),y=\frac{1}{4}(3\lambda-1),z=\lambda\in\mathbb{R}$; 2. Dacă $\alpha=-41,\beta=-2\Rightarrow\operatorname{rang}(A)=3$; $\alpha\neq -41\Rightarrow\operatorname{rang}(A)=3$; $\alpha=-41,\beta\neq 2\Rightarrow\operatorname{rang}(A)=3$; 3. $A^{-1}=A^*\Leftrightarrow\det(A)=1,\det(A)=-2a^3+7a^2-3a-1; a\in\left\{1,\frac{5\pm\sqrt{41}}{4}\right\}$;

4. $X=\begin{pmatrix}5 & -2 & -4\\ -3 & 0 & 3\end{pmatrix}$. Testul 3. (grilă) 1. a) ; 2. e) ; 3. b) ; 4. e).

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

Capitolul 1. Mulțimea numerelor reale

1. 1) Minorant este orice număr ≤ -3; majorant este orice număr ≥ 6; $\min A = -3; \max A = 6$;
3) Minorant este orice număr ≤ 0 ; majorant este orice număr ≥ 5 ; $\nexists \min A$; $\max A = 5$;
2. 3) $\inf A = -2, \sup A = 1$; 5) $\inf A = 0 = \min A, \sup A$ nu există în $\mathbb{R}$;
5. 1) $-13 \le f(x) \le 5$; 4) $-1 \le f(x) \le 1$; 5) $0 \le f(x) \le 1$; 6. 1) $f(E) = [-1,8] \Rightarrow \inf f = -1$,
$\sup f = 8$; 2) f este strict crescătoare și din $0 \le x \le 3 \Rightarrow f(0) \le f(x) \le f(3) \Rightarrow -1 \le f(x) \le \frac{1}{2} \Rightarrow$
$\inf f = -1, \sup f = \frac{1}{2}$; 7. 2) a) $A' = [0,1]; \{-1\}$; $A' = [-\infty,-1] \cup [1,\infty)$; nu avem puncte izolate;
e) $A' = \{0\}$, iar $x_n = \frac{1}{n}, n \ge 1$ sunt puncte izolate ; 8. 1), 2), 3) Inducție matematică ; 4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k x - b_k)^2 = \left(\sum a_k^2\right) x^2 + 2\sum a_k b_k x + \sum b_k^2 \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$ dacă $\Delta \le 0$; 5. a) Se ridică la
pătrat și se utilizează 4) ; 6) Din $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \ge 0; 1 \le i < j \le n$ rezultă $a_i b_i + a_j b_j \ge a_i b_j + a_j b_i$
care se adună pentru $1 \le i < j \le n$ (în total $\frac{n(n-1)}{2}$). Se obține
$(n-1)\left(\sum a_i b_i\right) \ge a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_1 b_3 + \ldots + a_1 b_n + a_n b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + \ldots + a_{n-1} b_n + a_n b_{n-1}$, iar de aici
$n\sum a_i b_i \ge \left(\sum a_i\right)\left(\sum b_i\right)$. Avem egalitate dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ sau $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$.
Funcții elementare 1. I. $(1,d),(2,e),(3,a),(4,b),(5,c)$; II. $(1,d),(2,a),(3,b),(4,c),(5,e)$;
4. 1) $f(2) = 0, f(3) = 0; f(x) = x^2 - 5x + 6$; 5. 2) $(1,1)$; 4) $(3,9),(-4,-5)$; 6. 1) $(3,-3),(-2,2)$;
9. 1) $D = \mathbb{R} - \{1\}$; 2) $D = \mathbb{R} - \{-1,0\}$; 3) $D = \mathbb{R} - \{0,3\}$; 4) $D = \mathbb{R}$; 11. 1) $x^2 - 3x + 2 = y$;
$\Delta x \ge 0 \Rightarrow y \ge -\frac{1}{4} \Rightarrow A\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ punct de minim și $\operatorname{Im} f = \left[-\frac{1}{4}, \infty\right)$; 3) $f(x) = 3 - 2x$ dacă
$x \le 1; f(x) = 1, x \in (1,2)$; $f(x) = 2x - 3, x \in [2,\infty)$; $A(\alpha,1)$ punct de minim $\forall \alpha \in [1,2]$ și
$\operatorname{Im} f = [1,\infty)$; 12. 1) $0 < f(x) \le 1$; 3) $-1 \le f(x) \le 1$; 4) $2 < f(x) \le 3$.
14. $f_1 \circ f_1 = f_1, f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1 = f_2, f_1 \circ f_3 = f_3 \circ f_1 = f_3$, $f_2 \circ f_3 = f_3 \circ f_2 = f_1, f_3 \circ f_3 = f_2$;
15. În relația dată se pune $-x$ în locul lui x și găsim $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ care este impară și
$-\frac{1}{2} \le f(x) \le \frac{1}{2}; g(x) = \frac{x^2}{3(x^2+1)}$; 17. $f(f(x)) = \frac{-(x+1)}{x}$; 18. $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}, x \in \mathbb{Q}$,
$f^{-1}(x) = \frac{x}{(3+2x)}, x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; 19. 1) $x \ne 0, 2 - x \ge 0 \Rightarrow D = (-\infty,2] - \{0\}$; 6) $D = (-\infty,-2] \cup [2,\infty)$
$-\{\pm 3\}$; 7) $D = \varnothing$; 10) $1 - x \ge 0, x - 2 \ge 0 \Rightarrow x \in \varnothing$; 20. 1) $f(-2) = -5, f(-1) = -2, f(0) = 0$;
$f^{-1}(\{-2\}) = \{x | f(x) = -2\}$; a) $3x + 1 = -2, x \le -1 \Rightarrow x = -1$; b) $\frac{x}{(2x+3)} = -2, x > -1 \Rightarrow x \in \varnothing$.
Deci $f^{-1}(\{-2\}) = \{-1\}$; 21. 1) $x^2 + 1 = y; \Delta x \ge 0 \Rightarrow y \ge 1$ și deci $\operatorname{Im} f = [1,\infty)$; 2) $\operatorname{Im} f = (0,1]$;
22. 1) s.c. ; 2) s.d. ; 3) s.d. ; 4) s.d. ; 5)-6) s.c. ; 24. 1) f este strict crescătoare și din $-2 \le x \le 3 \Rightarrow$

$f(-2) \le f(x) \le f(3) \Rightarrow -5 \le f(x) \le 10$. $\min_{[-2,3]} f(x) = -5, \max_{[-2,3]} f(x) = 10$; 25. 1) $f(x) = 2x - \{x\}$
este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$; 26. 1) $f(-x) = -x^3 - x = -f(x) \Rightarrow f$ impară , 2) pară ; 3) nici pară,
nici impară; 27. 1) $f(1-x) = f(1+x)$; 28. Din f impară este suficient să arătăm că
$f(x) < 1, \forall x \ge 0$; 29. 1) $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$; 4) nu este bijectivă; 2), 3), 5),..., 8) sunt bijective;
30. a) 4) -1; 6) $-2,1,13$; 7) $-3,4$; 8) 4; b) 1) $(-\infty,0) \cup \left(\frac{1}{3},\infty\right)$; 2) $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right) \cup (1,2)$; 5) $[-2,4] \cup [5,\infty)$;
6) $[-2,-1)$; 8) $[-5,-1)$; 31. 1) $(-1,\infty)$; 2) $(-\infty,1] \cup (2,\infty) - \{0\}$; 3) $\left(-\frac{1}{2},\infty\right) - \{2\}$; 5) $(1,\infty)$;
6) $[-1,2)$; 34. 1) pară; 2) nici pară, nici impară; 3) pară; 4)-6) impară; 35. f este s.c. pe $[0,\infty)$ și s.d.
pe $(-\infty,0]$; ± 1; 39. 1) $f > 0$ dacă $x > 0$ și $f \le 0$ dacă $x \le 0$; 2) $f > 0$ dacă $x \in (-\infty,0) \cup (1,\infty)$ și
$f \le 0$ dacă $x \in [0,1]$; 41. a) 1) $-1,4$; 2) 1; 3) ± 2; 5) 2; 7) 10,1000; b) 1) $(-\infty,1)$; 2) $(-\infty,-1]$;
3) $(-1,2] \cup [3,\infty)$; 4) $(-\infty,4)$.

Capitolul 2. Șiruri

2.2. Definirea limitei unui șir. Subșiruri. 1. 1) În afara vecinătăților $(0,2)$ respectiv $(1,3)$
sunt o infinitate de termeni ai șirului. Deci 1 și 2 nu pot fi limita țirului. Pentru $x \ne 1, x \ne 2$
se poate alege o vecinătate a lui x care nu conține nici un termen al șirului; 2. 1) 0; 2) 1;
3) $\{0,2\}$; 4) $\{0\}$; 5) $\{0,1,-1\}$; 3. 6) $\left|\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n}} < \varepsilon \Rightarrow$
$\frac{3}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n}} < \frac{3}{2\sqrt{2n}} < \varepsilon \Rightarrow \forall n \ge \left[\frac{9}{8\varepsilon^2}\right] + 1 = n_\varepsilon$; 7. a) $x_n = 3$; b) $x_n = 3 + \frac{1}{n}, n \ge 1$;
c) $x_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}, n \ge 1$; 9. Prin reducere la absurd; Subșiruri. 5. Fie $\varepsilon > 0$. Atunci
$\exists n_0, n_1, n_2$ astfel încât $\forall n \ge n_0, |x_{3n} - x| < \varepsilon, \forall n \ge n_1, |x_{3n+1} - x| < \varepsilon$ și $\forall n \ge n_2$,
$|x_{3n+2} - x| < \varepsilon$. Pentru $n \ge \max(3n_0, 3n_1 + 1, 3n_2 + 2)$ avem $|x_n - x| < \varepsilon$. Deci $x_n \to x$. 7.
$x_n - y_n \to 0 \Rightarrow |x_n - y_n| \to 0$, iar $a_n = \frac{1}{2}\left(x_n + y_n - |x_n - y_n|\right) \to \frac{x+x}{2} = x$ și
$b_n = \frac{1}{2}\left(x_n + y_n + |x_n - y_n|\right) \to \frac{x+x}{2} = x$; 2.3. 1. I 2) $\frac{11}{3}$; 3) ∞ ; II 1) ∞ ; 2) $-\infty$; III 1) 0;
2) $\frac{3}{2}$; 6) $-\infty$; 8) $\frac{1}{2}$; 11) $\frac{1}{2}$; 13) 2; 14) $\frac{1}{2}$; 16) $\frac{3}{2}$; IV. 1) $-\frac{3}{2}$; 2) 0 ; 4) $\frac{1}{15}$; 7) 1; V. 1) 1; 2)
$\frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{3}$; VI. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 0; VIII. 1) 1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) ∞ ; 4) $-\infty$; IX. 1) -1; 2) 1; 3) $-\infty$; 4) 1;
6) -1; 2. 1) $a = 1, b = -2$; 2) $a = \pm 2$; 3) $a \in \left(0, \frac{1}{16}\right)$; 4) $a = \sqrt{2}, b = -\sqrt{2}$; 3. 1) $D = \mathbb{R}$,
$f(x) = x, x > 0; f(0) = 0; f(x) = x^2, x < 0$; 5. $\lim y_n = \lim(x_n + y_n - x_n) = \lim(x_n + y_n) -$
$\lim x_n \in \mathbb{R}$. Pentru $x_n = (-1)^n, y_n = (-1)^{n+1}, x_n + y_n = 0 \to 0$.

2.5. Proprietatea lui Weierstrass. 1. I. 1) $x_n = 2 - \frac{1}{n} \in (0,2)$, strict crescător $\Rightarrow$ convergent;

II. 2) $x_n \nearrow$ și $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3} < 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} < 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}$

$2-\frac{1}{n}<2 \Rightarrow$ convergent; III. 2) Prin inducție $x_n < x_{n+1}, x_n < 3; \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3\left(l = \frac{1}{2}l + \frac{3}{2}\right)$;

IV. 1) $x_n > 0, \forall n \geq 0, x_{n+1} = f(x_n), f(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ strict crescătoare, $x = f(x) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$;

$x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) < f(x_1) \Rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow$ inductiv $x_n < x_{n+1}, \forall n \geq 0$; $x_0 < \frac{1}{2} \Rightarrow$

$f(x_0) < f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x_1 < \frac{1}{2} \Rightarrow$ inductiv $x_n < \frac{1}{2}, \forall n \geq 0$. Deci (x_n) convergente la

$\frac{1}{2}\left(l = \frac{1}{4} + l^2\right)$; 4. $f(x) = x^3 + nx - n$ este strict crescătoare, $f\left(\frac{1}{n+1}\right) < 0$,

$f(x_n) = 0, f\left(\frac{1}{n}\right) > 0 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < x_n < \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \to 0$.

Teste de evaluare. Testul 1.1. $a_n - a_{n-1} = \frac{2n-10}{3}, a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 = a_5 \leq a_6 \leq \ldots; b_1 \geq b_2$

$\geq \ldots$;2. a) $x_n \to 1$; b) Inducție matematică;3. a) Se înmulțesc relațiile $x_k = \frac{k-1}{k+1} x_{k-1}$,

$2 \leq k \leq n \Rightarrow x_n = \frac{2x_1}{n(n+1)}$; b) $2x_1$;4. a) Inducție după n ; b) Criteriul „cleștelui";

5. $\left(1-\sqrt{3}\right)^n = a_n - b_n\sqrt{3}$; Testul 2.1. 1) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; 2) –1; 3) $\frac{1}{3}$; 2. $a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \to \frac{1}{2}$;

$0 < b_n < \frac{1}{2^n} \Rightarrow b_n \to 0$;3. Se adună și se scade n; $\frac{a}{3} + \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = \frac{6}{5}$;

4. $a_{n+1} - 1 = (a_n - 1)^3 \Rightarrow a_n - 1 = (a-1)^{3^{n-1}}$; $a_n \to 0$ dacă $a = 0$; $a_n \to 1$ dacă $a \in (0,2)$;

$a_n \to 2$ dacă $a = 2$; Testul 3.1. c);2. Se adună inegalitățile

$x - 1 < [x] \leq x, 2^2 x - 1 < \left[2^2 x\right] \leq 2^2 x, \ldots, n^2 x - 1 < \left[n^2 x\right] \leq n^2 x$; b);3. a);4. b) .

Capitolul 3. Limite de funcții

3.3. 2.1. 1) $A' = \left\{\frac{1}{2}\right\}$; orice element din A este punct izolat;2. 1) $\left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}^*\right\}$. $A' = \{0\}$;

2) $\left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{\frac{n}{n+1} \middle| n \in \mathbb{N}^*\right\}$; $A' = \{0,1\}$; 3) $\left\{\frac{\sqrt{2}n}{n+1} \middle| n \in \mathbb{N}^*\right\}$; 4) $A' = \left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm 1, 0\right\}$

3. 1) $l(0) = \lim\limits_{x_n \to 0} (3x_n + 2) = 3 \cdot 0 + 2 = 2$; 2) $l(1) = \lim\limits_{x_n \to 1} \frac{1}{(x_n - 1)^2} = \frac{1}{0_+} = \infty$; 4. 1) Nu ;

Mulțimea punctelor de acumulare pentru $f(x) = \sqrt{x}$ este $[0,\infty]$ (în $\overline{\mathbb{R}}$);

5. 3) $l_s(-1) = 3, l_d(-1) = -3 \Rightarrow f$ nu are limită în $x = -1$; 4) Fie $a \in \mathbb{R}$. Funcția are limită în $a \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\in\mathbb{Q}}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}}} f(x) \Leftrightarrow 2a+1 = 4-a \Leftrightarrow a = 3$. Deci, f are limită doar în $a = 3$;

7. Funcția f are limită în $a \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\in\mathbb{Q}}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}}} f(x) \Leftrightarrow a^2 - a = a - 3 \Leftrightarrow a \in \varnothing$;

8. 3) $a = 5$; 4) $a = 4$; 9. f neconstantă $\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$ cu $f(a) \neq f(b)$. Fie T o perioadă a funcției f . Presupunem, prin absurd, că există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$. Considerăm șirurile (x_n) cu $x_n = a + nT \to \infty$, (y_n) cu $y_n = b + nT \to \infty$. Atunci $f(x_n) = f(a+nT) = f(a) \to f(a)$, iar $f(y_n) = f(b+nT) = f(b) \to f(b)$. Deci $f(a) = f(b) = l$, contradicție. 3.2.1) Fie $\varepsilon > 0$. Să găsim $\delta(\varepsilon) = \delta > 0$ astfel încât dacă $0 < |x-1| < \delta$ să rezulte $|(4x+3) - 7| < \varepsilon$. Această inegalitate devine $4|x-1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{4}$. Se ia $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$;

3) Fie $\varepsilon > 0$. Să determinăm $\delta(\varepsilon) = \delta > 0$ astfel încât dacă $x > \delta$ să rezulte $3x - 2 > \varepsilon$. De aici $x > \frac{\varepsilon+2}{3}$. Alegem $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon+2}{3} > 0$, care este bun pentru ε dat; 3. Fie $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Arătăm că $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) = 0$. Fie $\varepsilon > 0$, dat, iar $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

Mulțimea $\mathbb{Q}_n = \left\{\frac{p}{q} \middle| 1 \leq q \leq n, 0 \leq p \leq q\right\}$, conține numere raționale din $[0,1]$ cu

numărătorul cel mult n , este finită. Definim $\delta = \min\left\{|a - x| \middle| x \in \mathbb{Q}_n\right\} > 0$. Toate numerele raționale din $(a-\delta, a+\delta)$ au numărătorul mai mare decât n și avem

$|f(x) - f(a)| < \frac{1}{n} \leq \varepsilon$ (evident $|f(x) - f(a)| = 0, \forall x$ irațional). Deci $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$. Dacă

a este rațional, $a = \frac{p}{q}, (p,q) = 1$ pentru care $f(a) = \frac{1}{q}$; $a + \frac{\sqrt{2}}{n} \to a$ și

$f\left(a + \frac{\sqrt{2}}{n}\right) = 0 \to 0$; 3.4.1 Criteriul cu limite laterale 1. 1) $l_s(0) = \lim\limits_{x\nearrow 0} (x-1) = -1$,

$l_d(0) = \lim\limits_{x\searrow 0} (x+1) = 1 \Rightarrow$ nu există $l(0)$; 12) $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x\in\mathbb{Q}}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}}} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} \left(x^2 - x\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 1} 2 \Leftrightarrow 0 = 2$, fals. Deci f nu are limită în $a = 1$; 2. 1) $\alpha = 3$; 2) $\alpha = \pm 1$; 3) $\alpha = \frac{1}{4}$; 3)

(Trecerea la limită în inegalități) 1. a) nu există $l_s(0) = \infty, l_d(0) = 0$; b) 1; 3) $\frac{2}{7}$; e)

$\frac{k(k+1)}{2}$; f) 3; 3. $x - x^2 \leq f(x) \leq x + x^2$ plus criteriul „cleștelui"; 3.7.1.1. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3)

$\frac{m}{n}$; 4)-6) 1; 7) 0; 8) $\frac{1}{4}$; 9) $\frac{3}{5}$; 14) 3; II. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) –2; 2.1) $\sqrt[3]{e^2}$; 2) e^{-5}; 3)

$\sqrt[3]{e}$; 4) $\frac{1}{e}$; 5) $e^{-\frac{4}{5}}$; 3. 1) $\frac{5}{3}$; 2) 5; 3) $\frac{4}{3}$; 4) $\frac{2}{3}$; 6) 2; 3.8. 1. $\left(\frac{0}{0}\right)$ a) 1) –2; 2)

$l_s(2)=-\infty, l_d(2)=\infty$; limita $l(2)$ nu există; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) 0; 5) –8; 6) 6; 7) $\frac{m}{n}$; 8) $\frac{n}{m}a^{n-m}$;

9) $\frac{n(n+1)}{2}$; c) 1) $\frac{1}{2}$; 2) 3; 3) $\frac{4}{3}$; 4) $\frac{1}{9}$; 5) $\frac{3}{2}$; 6) $\frac{m}{n}$; 7) $\frac{1}{n}$; 8) $\frac{1}{n!}$; 1) 1; 2) 3; 3) $\frac{2}{2\sqrt{2}}$; 4)

$-\frac{1}{36}$; 5) $\frac{3}{4}$; 6) $-\frac{1}{3}$; 7) $\frac{1}{3}$; 8) 2; 9) $-\frac{5}{27}$; 10) $\frac{3}{2}$; 11) $-\frac{2}{3}$; 12) $-\frac{1}{3}$; e) 1) ∞ ; 2) 0; 3) 3; 4)

$\frac{2}{3}$; 5)-6) 1; 7) $-\infty$; 8) $-\frac{5}{3}$; 2. $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ a) 1) $-\infty$; 2) $-\infty$; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) $\frac{2}{3}$; 5)-6) 0; b) 1) $-\frac{1}{2}$; 2)

$-\frac{\sqrt{2}}{3}$; 3) ∞; 4) 1; 5) 3; 6) 0; 7) $\frac{3}{5}$; 8) 0; 3. $(\infty-\infty)$ a) 1) –1;

2) $l_s(2)=-\infty; l_d(3)=\infty$; 4) 1; 5) $\frac{1}{6}$; 6) $-\frac{1}{2}$; 7) 0; b) 1) 0; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) 1; 5) –1; 6)

$-\infty$; 7) $\frac{1}{2}$; 8) 0; 9) $-\frac{7}{4}$; 10) 8; 3.9. 1) $a=1, b=-1$; 2) $a=1, b=\frac{1}{2}$; 3) $a=b=1, c=-\frac{1}{2}$; 5)

$a=b=1$; 8) $a=1, b=2$; 9) $a=2, b=1$;

Teste de evaluare. **Testul 1.** 1. 1) $\frac{15}{11}$; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) e^{-3}; 2. $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{3}$; 3. 1) $3^3\ln 3-1$;

2) $\frac{1}{24}$; 3) 1; 4. $a_n=e^{-n}; \frac{1}{e-1}$; **Testul 2.** 1. 1) $\frac{2}{3}$; 2) 1; 3) –1; 2. $a=4\ln 2$; 3. 1) $\frac{\sqrt{22}}{4}$; 2) $\frac{1}{4}$;

3) –1; 4. $\sqrt[3]{e}$; **Testul 3(de tip grilă)** 1. 1) d; 2) c; 3) b; 2. a; 3. c; 4. e.

Capitolul 4. Funcții continue

4.4.1. 1) Este continuă; 2) Nu are sens; $a=0$ nu este punct de acumulare pentru E;
3) $l_s(1)=l_d(1)=f(1)=0\Rightarrow f$ continuă în $a=1$; 2. 2) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbb{Q}}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}}} f(x)=$

$=f(a)\Leftrightarrow a^2=a\Rightarrow a\in\{1,0\}$ puncte de continuitate; 2) $f(x)=x, x\in\mathbb{Q}$,

$f(x)=0, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ este continuă numai în $a=0$; 3. 1) $l(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\frac{1}{2}\Rightarrow f$ poate fi

prelungită prin continuitate în $a=1$; $\overline{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\overline{f}(x)=f(x), x\neq 1$ și $\overline{f}(1)=\frac{1}{2}$; 2) da;

4. 1) $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}$; 2) $a=-\frac{1}{3}, b=\frac{1}{12}, c=\frac{1}{4}$; 5. 1) $l_s(2)=l_d(2)=f(2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5+\alpha=2+2\alpha\Rightarrow\alpha=3$, 2) $\alpha=\frac{1}{25}$; 3) $\alpha=\frac{-6+2\sqrt{3}}{3}$; 4) $\alpha=-\frac{1}{6}$; 5) $\alpha=\frac{2}{5}$; 6)

$\alpha=-1, \beta=0$; 7) $\alpha\in\mathbb{R}, \beta=1$; 6. 1) $l_d(1)=6, l_s(1)=f(1)=3\Rightarrow a=1$ p.d. de speța I;

2) $l_d(0)=\infty, l_s(0)=0=f(0)\Rightarrow a=0$ p.d. de speța II; 3) f nu are limită în $a=0\Rightarrow a=0$
p.d. speța II; 4) II; 5) I; 6) II; 7 II; 7. O funcție monotonă pe un interval nu are

discontinuității de speța a II-a; 1) f este continuă în două puncte , în rest are
discontinuități de speța a II-a și deci nu poate fi monotonă pe nici un interval $I\subseteq\mathbb{R}$;
8. IV. 1) $f(x)=x^2, x\in(-1,1]$, $f(x)=0, x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty); E_c=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$;
9. 1) $l_s(1)=l_d(1)=f(1)\Rightarrow 1+\alpha=1+\alpha=1+\alpha^3\Rightarrow\alpha\in\{0,\pm 1\}$; 2) $\alpha=1$; 3) $\alpha=0, \beta=2$;
4) $\alpha=4, \beta=-5$; 10. 2) f continuă în $x_0\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x_0=0; f$ continuă pe $[k,k+1)\Leftrightarrow\alpha=k$;
$0\in[k,k+1)\Rightarrow k=0\Rightarrow\alpha=0\Rightarrow f$ continuă pe $[0,1)$; 11. Fie $a\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$. Există
$(x_n), x_n\in\mathbb{Q}, \forall n$ cu $x_n\to a$. Deci $f(x_n)\to f(a), g(x_n)\to g(a)$. Cum $f(x_n)=g(x_n)$,
$\forall n\Rightarrow f(a)=g(a)$; 12. a) $|f(0)|\le 0\Rightarrow f(0)=0; -Mx\le f(x)\le Mx\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$;

13. a) $3x=y\Rightarrow f(y)=f\left(\frac{2}{3}y\right)=\ldots=f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n y\right)=\ldots; \left(\frac{2}{3}\right)^n y_n\to 0\Rightarrow f(y)=f(0), \forall y$;

15. $f(x)-g(x)=x+\alpha+1$ dacă $x\le 1, f(x)-g(x)=\alpha-1$ dacă $x>1$; 1) $\alpha=-\frac{1}{2}\Rightarrow f$
continuă pe $\mathbb{R}$; 2) $\alpha\neq-\frac{1}{2}\Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R}-\{1\}$; 16. I. 1) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$; 2) $\mathbb{R}-\{1\}$; II. 1) g
continuă pe $\mathbb{R}, f$ continuă pe $\mathbb{R}-\{1\}\Rightarrow h$ continuă pe $\mathbb{R}-\{1\}$; 2) $\alpha=2\Rightarrow h$ continuă pe
$\mathbb{R}; \alpha\neq 2\Rightarrow h$ continuă pe $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2},1\right\}$; 4.5.1. 1)-2) $f(\mathbb{R})=\{\pm 1,0\}\Rightarrow f$ nu are P.D. pe $\mathbb{R}$;
3) f continuă pe $\mathbb{R}\Rightarrow f$ are P.D. pe $\mathbb{R}$; 2. a) Prin reducere la absurd dacă f are P.D. pe
I și $f(I)\subseteq\mathbb{Q}\Rightarrow f(I)$ interval neredus la un punct și deci $f(I)$ conține și elemente din
$\mathbb{R}-\mathbb{Q}$! b) Cf. cu a), dacă f nu ar fi constantă, nu ar avea P.D.; 3. $f(x)=x$ dacă $x\in A$
și $f(x)=-x$ dacă $x\in\mathbb{R}-A$; Dacă $A=\varnothing\Rightarrow f(x)=-x, \forall x\in\mathbb{R}$; Dacă $A\neq\varnothing$, sau $A\neq\mathbb{R}$,
fie $a\in A$. Trebuie ca a să nu fie punct de discontinuitate de prima speță $\Rightarrow a=-a\Rightarrow a=0$
și deci $f(x)=\begin{cases} x, x\ge 0\\ -x, x<0\end{cases}$, $f(x)=\begin{cases} x, x<0\\ -x, x\ge 0\end{cases}$ funcții continue cu P.D.;

4. $\mathcal{C}=\left\{C_x \middle| aria C_x=\pi x^2, x\le 10\right\}$ și $f:\mathcal{C}\to\mathbb{R}, f(C_x)=\pi x^2-250$. Din $f(1)f(10)<$
$<0\Rightarrow\exists C_\alpha\in\mathcal{C}$ astfel încât $f(C_\alpha)=0\Leftrightarrow\pi\alpha^2=250$; 6. a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$f(x)=x^4+7x^3-9$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty, f(0)=-9, \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty\Rightarrow$ există $x_1<0$ și
$x_2>0$ cu $f(x_1)=f(x_2)=0$; b) $f(1)=-1, f(2)=2, f(0)=2, f(-3)=-13, f(-2)=2$; c)
$f(-1)f(1)<0\Rightarrow\exists x_0\in(-1,1)$, $f(x_0)=0$; 7.1) $f(x)>0$ dacă $x\in(-2,0)\cup(1,\infty)$;
$f(x)<0$, $x\in(-\infty,-2)\cup(0,1); f(x)=0, x\in\{-2,0,1\}$; 4) $f(x)=0$ dacă
$x=2; f(x)>0$ dacă $x>2$; 9. $g(x)=f(x)-2x-1$ este continuă pe $\mathbb{R}$ și
$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\infty, \lim\limits_{x\to\infty} g(x)=-\infty$; 10. Nu, pentru că $\mathbb{R}^*$ nu este interval!; 11. Funcția
$g:[-a,a]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)-x$ este continuă și $g(-a)=f(-a)+a\ge 0$,

$g(a)=f(a)-a\le 0\Rightarrow \exists c\in[-a,a]$ astfel încât $g(c)=0$; 12. 1) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, f continuă pe $\mathbb{R}\Rightarrow f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

Teste de evaluare. Testul 1. 1. $x=\frac{1}{2}$; 2. $a=1,b=2$; 3. $f(x)=0, x\in[0,3), f(3)=1$; f continuă pe $[0,3)$; 4. $a=1,b=2,c=-4$; 5. a) $f(2)f(3)<0$; b) $f(x)>0$ dacă $x\in(0,e)\cup\cup(e^2,\infty)$; $f(x)<0$ dacă $x\in(e,e^2)$; c) $h:[a,b]\to\mathbb{R}, h(x)=f(x)-x$ este continuă și $h(a)\ge 0, h(b)\le 0$.

Testul 2. 1. $x_k=\frac{1}{2}+k, k\in\mathbb{Z}$; 2. $a=4,b=0$; 3. $f(x)=\operatorname{sgn}(x)\Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R}-\{0\}$; 4. b) Reciproca nu este adevărată. Mulțimea valorilor poate fi $[m,M]$ fără ca funcția să fie definită pe un interval închis și mărginit. 5. $f(5)f(17)<0$ și f continuă; b) $u=\sqrt[3]{2-x}, v=\sqrt{x-1}$ și ecuația asociată are soluțiile 1, 2 și 10; $x\in(1,2)\cup(10,\infty)$.

Capitolul 5. Funcții derivabile

5.2.1. a) 1) $f'(2)=4$, unde $f(x)=x^2$; 2) $f'(4)=\frac{1}{4}$, unde $f(x)=\sqrt{x}$; b) $f'(1)=2$; $y-1=2(x-1)$; 4. a) $m=3,\left(\sqrt{2},2-\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right)$; b) $a=1,b=-4,c=5$; 5. $\left(\frac{1}{2},-\frac{15}{32}\right)$; 6. $(8,0),(0,0)$; 7. 2) $m=4,n=-5$; 8. $m=f'(x_0)=5x_0^4+8>0$; 10. a) 1) $f'(x_0)$; 3) $f'(x_0)$; 4) $x_0f'(x_0)-f(x_0)$; 5) $\frac{a+b}{c}f'(x_0)$; b) $f(x)=1, x\in\mathbb{Q}$ și $f(x)=0, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$; 16. $f'(0)=\lim\limits_{x_n\to 0}\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0}$, unde 1) $f(x_n)=0$, dacă $x_n\to 0$ și $x_n\ne\frac{1}{n},\forall n\in\mathbb{N}^*$ sau 2) $f(x_n)=\frac{1}{2^n}$, dacă $x_n=\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}^*$. Deci $f'(0)=\lim\limits_{x_n\to 0}\frac{f(x_n)}{x_n}$ cu $\lim\limits_{x_n\to 0}\frac{f(x_n)}{x_n}=\lim\frac{0}{x_n}=0$ după 1) sau $\lim\limits_{x_n\to 0}\frac{f(x_n)}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$. Deci $f'(0)=0$; 17. 1) $\frac{dN}{dt}=kN, k>0$; 2) $\frac{dT}{dt}=-k(T-T_0), k>0$; 3) $\frac{dQ}{dt}=-kQ, k>0$; 4) $F=\frac{k}{x^2}, k>0, \frac{dF}{dx}=-\frac{2k}{x^2}$; 21. $s'(t)=3t^2-24t+36$ este viteza la momentul t; 22. Săgeata este paralelă cu axa Ox când ajunge în H.

5.3.1. 1) $f_s'(1)=-1\ne f_d'(1)=1\Rightarrow f$ nu este derivabilă în $x=1$; 1) Se știe că: a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x-a|$ este derivabilă pe $\mathbb{R}-\{a\}$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x-a)|x-b|$ este derivabilă pe $\mathbb{R}\Leftrightarrow a=b$. Se ia $f_1(x)=x|x-a|, f_2(x)=|x-b|$ când $f-f_1=f_2$. Dacă $a=0$, atunci $f-f_1$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ în timp ce f_2 este derivabilă pe $\mathbb{R}-\{b\}$. Deci $a\ne 0$ și $f-f_1$ este derivabilă pe $\mathbb{R}-\{a\}$. La fel trebuie să fie și $f_2\Rightarrow a=b$.

Avem $f(x)=(x+1)|x-a|$. De aici $a=b=-1$;3. Pentru $x>x_0\Rightarrow\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\le\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}$. Pentru $x\to x_0, g'(x_0)\le f_d'(x_0)\le h'(x_0)$. Pentru $x<x_0\Rightarrow g'(x_0)\ge h'(x_0)$;4 . $a=-1,b=0,c=4$;5 . 2) $m=-1,n=1$;5.4.1. 1) $n=4+m$; 2) $m=-9,n=21$; 3) $m=2,n=0$; 4) $m=1,n=0$2. f continuă în $x_0\Rightarrow g(x_0)=h(x_0)$, iar din f derivabilă în $x_0\Rightarrow g'(x_0)=h'(x_0)$;4. $x=0$ (Se studiază derivabilitatea numai în punctele de continuitate: $0,\pm\sqrt{2}$);5.5.1. 1) $D_{f'}=\mathbb{R}; f'(x)=2x-1$; 3) $D_{f'}=\mathbb{R}$; $f'(x)=2x, x\ge 0, f'(x)=-2x, x<0$; 4) $D_{f'}=\mathbb{R}-\{0\}; f'(x)=2, x\le 0, f'(x)=4, x>0$; 5) $D_{f'}=\mathbb{R}-\{0,1\}$2. 1) $a=-2,b=-8$; 2) $a=4,b=-5$;4 . 1) $D_{f'}=\mathbb{R}\Leftrightarrow a=1,b=-1$;

5. 1) $f(x+1)=f(x),\forall x\Rightarrow T=1$ perioadă pentru f; $f:[0,1)\to\mathbb{R}, f(x)=x, x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ și $f(x)=1-x, x\in\left[\frac{1}{2},1\right)$; $D_{f'}=\mathbb{R}-\left\{\frac{k}{2}|k\in\mathbb{Z}\right\}$; 5) $f(x)=x^2, x<0; f(x)=0, x\in[0,1]$; $f(x)=(x-1)^2, x>1$;6. $f'(x)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x^2+ax+1\ne 0,\forall x\Leftrightarrow a^2-4<0\Rightarrow a\in(-2,2)$;

5.7.4. 1) $a=-\frac{1}{2},b=2,c=1$;5. $m=1,n=q=3,p=8$;6. 1) $P(x)=-\frac{x^4}{4}+x^2-\frac{3}{4}$;

11. 3) $I'(x)=0, x\in\mathbb{R}$ este o soluție a problemei. Fie P o funcție polinomială cu $\operatorname{grad}(P)=n$. Din relație, prin trecere la grad, rezultă $2n=(2n-2)+(n-2)$, adică $n=4$. Se găsește $P(x)=\frac{x^4}{48}$;17 . $f(x)=-4-\frac{9}{x-1}; f^{(n)}(-1)=\frac{9\cdot n!}{2^{n+1}}; \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2}{n+1}\le 1,\forall n\ge 1\Rightarrow a_{n+1}\le a_n (a_n>0)$. Deci (a_n) este convergent. Din $a_{n+1}=\frac{2}{n+1}a_n\Rightarrow\lim a_n=0$;

21. $a_n=6n, b_n=3n^2-3n-4$;23. Aplicații. 1) $\left(f^{-1}\right)'(0)=\frac{1}{2}; \left(f^{-1}\right)''(0)=0$; $\left(f^{-1}\right)'''(0)=-\frac{1}{16}$; 2) $\frac{1}{7};-\frac{2}{49};\frac{60}{74}$;24*. $f(x)=\alpha_0+\alpha_1(x-x_0)+\ldots+\alpha_n(x-x_n)^n$; $\alpha_k=\frac{a_k}{k!}$. 29. a) Se arată că f este indefinit derivabilă în $x=0$ și că $f^{(n)}(x)=P_{2n}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}, x>0$ și $f^{(n)}(x)=0, x\le 0$, unde P_{2n} este polinom de grad $2n$;

b) Se ia $h_a(x)=a^2-x^2$, indefinit derivabilă și se definește $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_a(x)=(f\circ h_a)(x)=e^{-\frac{1}{a^2-x^2}}$, $|x|\le 0$ și $f_a(x)=0, |x|>a$;

33. $f'(x)=nx^{n-1}, f''(x)=n(n-1)x^{n-2},\ldots, f^{(n)}(x)=n!$ și egalitatea devine $C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n=2^n$.

Teste de evaluare. Testul 1. 1. a) $f'(2)=\frac{2}{3}$; b) $f_s'(1)=-1\neq f_d'(1)=1$; 2. a) $y-f(2)=f'(2)(x-2); y=3x-4$; b) $f(x)=|x(x-1)|$; 3. $m=4, n=-7, p=1$; 4. $f(x)=x^2$, $x<-1; f(x)=1, x\in[-1,1]; f(x)=x^3, x>1; D_{f'}=\mathbb{R}-\{\pm1\}$; 5. a) Dacă $x=0$, atunci din condiție $f(0)=0$. Se împarte inegalitatea cu $|x|\neq 0$ și rezultă $0\leq\left|\frac{f(x)}{x}-1\right|\leq|\text{arctg } x|$.

De aici $f'(0)=1$; b) $a=\frac{2}{5}, b=-9, c=-27$; Testul 2. 1. a) $f'(-1)=6; y-6x-8=0$;

b) $f(1)=3, f'(1)=1; a=-1, b=3$; 2. $a=-3, b=4, c=-2$; 3. f injecție și surjecție;

$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}, f(x_0)=y_0\Rightarrow x_0=2; (f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{9}$. Din $(f^{-1})'(f)=\frac{1}{f'}$ prin derivare rezultă $(f^{-1})''(y_0)=\frac{-f''(x_0)}{(f'(x_0))^2}; (f^{-1})''(2)=-\frac{4}{243}$; 5. b) Se aplică formula lui Leibniz; $(-1)^n(n-2)!\left[\frac{nx+1}{(x+1)^n}+\frac{nx-1}{(1-x)^n}\right]$. Testul 3. 1. a); 2. b); 3. d); 4. b);

5. $f^{(n)}(0)=n(n-1)a^{n-2}$; c); 6. e); 7. c); 5. 9. 2. 1. 1) $f'(x)=2x-2=0\Rightarrow x=1$;

$x<1\Rightarrow f'(x)<0$ și $x>1\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow x=1$ este punct de minim;

2. 1) $f'(x)=2x-3=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}$; 3) $f'(x)=3x^2+3=0\Rightarrow x\in\varnothing$. Deci, f nu are puncte critice; 6. $f(x)=a^x-b^x-x$ cu $f(0)=0$. Deci $f(x)\geq f(0), \forall x$, adică $x_0=0$ este punct de minim. Prin urmare $f'(0)=0$. De aici $a=be$. Dacă $b<1$, atunci din $e^x-1\geq xb^{-x}$ pentru $x\to-\infty$ rezultă $-1\geq 0$, fals; 7. $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=a^x-x^a$.

Cum $f(x)\geq f(a)=0$ rezultă $x_0=a$ este punct de minim. Deci $f'(a)=0$, adică $\ln a=1$.

În final $a=e$; 8. $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=(1+x)^n-ax\geq f(0)$; 3. 1. $c=\frac{1}{2}$; 2. Se aplică teorema lui Rolle pe intervalele $[-3,-2],[-2,2],[2,3]$; 4. a) 1) Da; 2) Nu; 3) Nu; 4) Nu;

5) Da; b) 1) $m=e, n=p=1$; 8. $h:[a,b]\to\mathbb{R}, h(x)=\frac{f(x)}{x}$ plus teorema lui Rolle;

9. $h:[a,b]\to\mathbb{R}, h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ plus teorema lui Rolle; 4. 3. $f:[27,30]\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x}$ plus teorema lui Lagrange; 4. a) 1) $c=\sqrt{3}$; 2) $c=\frac{1}{\ln 2}$; 3) $c=\frac{9}{4}$; 4) $c=\sqrt{2}$; b) 1) $m=2$,

$c=\frac{3}{4}$; 2) $m=\frac{2}{\pi}, n=1, c=-\frac{3}{4}\in(-1,0), c=\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{4}\in(0,1)$; 6. Se aplică Lagrange funcției f pe $[-2,1]$; $c=-\frac{1}{2}$; 7. Se aplică Lagrange funcției $f(x)=\ln x$ pe intervalele $[k,k+1], k=\overline{1,n}$ și se obține $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}<\ln(n+1)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Deci $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=\infty$.

9. 1) $c(x)=1-\sqrt{1-x}$; 10. 1) $f:[n,n+1]\to\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}^*, f(x)=\frac{e^x}{x}$ și se aplică Lagrange;

$-\infty$; 2) 1; 3) 1; 4) $\frac{e}{4}$; 12. $x_1=0, x_2=1$; 14. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+e^x$ este strict crescătoare și $f(a_n)<f(a_{n+1})\Rightarrow a_n<a_{n+1}, \forall n$, iar $4>a_n+e^{a_n}\geq a_n+(a_n+1)=2a_n+1$.

De aici $a_n\leq\frac{3}{2}, \forall n; l=1$.

Teste de evaluare. Testul 1. 1. a) $m=2(e+1), n=-(e+1)$; b) $f'(x)=0\Rightarrow x=-1$, punct de minim, $x=e+1$, punct de maxim; 2. $f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}, f'(x)>0, \forall x>1\Rightarrow f$ strict crescătoare $\Rightarrow f(x)>f(1)=0$; 3. a) $y=x+1$; b) $f'(x)=0\Rightarrow x=1$;

4. a) $a\in\left\{\frac{3}{5},-1\right\}\Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R}$; $a\in\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{5},-1\right\}\Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R}-\{1\}$; 5. a) 2;

Testul 2. 1. $a=-5, b=-3, c=-1$; 2. $f'(x)=0$ are două rădăcini; de o parte și de alta a lor f' își schimbă semnul. Analog pentru ecuația $f''(x)=0$; 3. $f_s'(0)=f_d'(0)=3$;

$D_{f'}=\mathbb{R}$; 3) $c=\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\in(-1,1)$; 4. 1) $f'(x)\leq 0, \forall x\Leftrightarrow(m<0, \Delta\leq 0); m\in[-1,0)$;

2) $f:(0,\infty)-\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=x-1-\ln x$ cu $f'(x)=\frac{x-1}{x}; x=1$, punct de minim cu $f(1)=0$; 5. a) $n=3, l=-\frac{1}{3}; n\in\{1,2\}$, $l=0; n>3$, impar, $l=-\infty; n>3, n$ par limita nu există; b) 0; c) $\sqrt[6]{e}$; Testul 3. 1. e); 2. a) ; 3. $x^2=t>0$; b); 4. $y=x$ asimptotă oblică la $-\infty$; c); 5. d).

Capitolul 6. Reprezentarea grafică a funcțiilor

1. I. Pentru toate funcțiile domeniul maxim de definiție este $\mathbb{R}$. 1) $x=-1$, punct de maxim; $x=1$, punct de minim; $x=0$, punct de inflexiune; 2) $x=0$, punct de maxim; $x=\frac{2}{3}$, punct de minim; $x=\frac{1}{3}$ punct de inflexiune; 3) $x=-\frac{1}{2}$, punct de maxim; $x=\frac{1}{2}$, punct de minim; $x=0$, punct de inflexiune; 4) $x=0$, punct de maxim; $x=2$, punct de minim;

$x=1$, punct de inflexiune; 5) $x=0, x=2$, puncte de minim; $x=1$, punct de maxim; 2 puncte de inflexiune în intervalele $(0,1),(1,2)$; 6) $x=\pm 3$, puncte de minim; $x=0$, punct de maxim; $x=\pm\sqrt{3}$, puncte de inflexiune. II. 1) $\mathbb{R}^*; x=-\sqrt{2}$, punct de maxim; $x=\sqrt{2}$, punct de minim; $y=\frac{x}{2}$ a.o.; $x=0$ a.v.; 2) $\mathbb{R}-\{1\}; y=1$ a.o.; $x=1$ a.v.;

3) $\mathbb{R}-\{\pm 1\}; x=\pm 1$ a.v.; $y=0$ a.o.; $x=0$, punct de minim ; 4) $\mathbb{R}-\{0,1\}; x=0, x=1$, a.v.; $x=\frac{1}{2}$, punct de maxim; 5) $\mathbb{R}-\{1,3\}; x=1, x=3$ a.v.; $y=0$ a.o.; $x=2$, punct de maxim; 6) $\mathbb{R}; y=0$ a.o. $x=-1$, punct de minim; $x=1$, punct de maxim; $x=0, x=\pm\sqrt{3}$, puncte de inflexiune;

III. 1) $(0,\infty); x=0$ a.v. la dreapta; $y=0$ a.o. la $+\infty$; 2) $\mathbb{R}; x=-\frac{1}{2}$, punct de minim; $x=\frac{-3\pm\sqrt{41}}{8}$, puncte de inflexiune; $y=-1$ a.o. la $-\infty$; $y=1$ a.o. la $+\infty$;

3) $(-\infty,0)\cup[1,\infty); x=0$ a.v. la stânga; $y=1$ a.o.; 4) $\mathbb{R}; x=0$, punct de inflexiune; $y=-1$ a.o. la $-\infty$; $y=1$ a.o. la $+\infty$; 5) $x=-\sqrt{3}$, punct de maxim; $x=\sqrt{3}$, punct de minim; $x=0$ punct de inflexiune; $x=\pm 1$ a.v. IV . 1) $(0,\infty); x=\frac{1}{e}$ punct de minim; 2) $(0,\infty)\ x=1$, punct de minim; $x=0$ a.v. la dreapta; 3) $(0,\infty); x=\frac{1}{\sqrt{e}}$, punct de minim; $x=\frac{1}{\sqrt{e^3}}$, punct de inflexiune; 4) $\mathbb{R}; x=0$, punct de minim ; $x=\pm 1$ puncte de inflexiune;

5) $(-\infty,-1)\cup(1,\infty); x=-1-\sqrt{2}$, punct de maxim; $x=-1$ a.v. la stânga; $x=1$ a.v. la dreapta;

V. 1) $\mathbb{R}; x=1$, punct de maxim; $x=2$, punct de inflexiune; $y=0$ a.o. la $+\infty$; 2) $\mathbb{R}^*; x=1$, punct de minim; $x=0$ a.v.; $y=0$ a.o.; 3) $\mathbb{R}-\{-1\}; x=0$, punct de minim; $x=-1$ a.v.; $y=0$ a.o. la $-\infty$; 4) $\mathbb{R}; x=2$, punct de maxim; $x=0$, punct de minim; $x=2\pm\sqrt{2}$, puncte de inflexiune; $y=0$ a.o. la $+\infty$; 5) $\mathbb{R}; x=-2$, punct de maxim; $x=0$, punct de minim; $x=-2\pm\sqrt{2}$, puncte de inflexiune; $y=0$ a.o. la $-\infty$; VI. 1) $E_s=[0,2\pi]; x=\frac{\pi}{4}$, punct de maxim; $x=\frac{5\pi}{4}$, punct de minim; 2) $E_s=[0,2\pi]; x=\frac{\pi}{3}$, punct de maxim; $x=\frac{5\pi}{3}$, punct de minim; $x=0, x=\pi-\arccos\frac{1}{4}$, puncte inflexiune; 3) $E_s=[0,2\pi]; x=\frac{\pi}{6}$, punct de maxim; $x=\frac{5\pi}{6}$, punct de minim; $x=\pi, x=\frac{3\pi}{2}$, puncte de inflexiune;

VII. 1) $\mathbb{R}; x=0$, punct de minim; $x=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$, puncte de inflexiune; $y=\frac{\pi}{2}$, a.o.; 2) $\mathbb{R}; x=0$, punct de minim; $y=-\frac{\pi x}{2}-1$ a.o. la $-\infty$; $y=\frac{\pi x}{2}-1$ a.o. la $+\infty$; 3) $(0,\infty); x=0$ a.v.;

4) $\mathbb{R}^*; y=0$ a.o.; 5) $\mathbb{R}-\{1\}; x=\frac{1}{2}$ punct de inflexiune; $y=\frac{\pi}{4}$ a.o.

VIII. 1) $(0,\infty); x=\frac{1}{e}$, punct de minim; 2) $(0,\infty); x=e$ punct de maxim; un punct de inflexiune în intervalul $(e,\infty); y=1$ a.o. la $+\infty$; 3) $(-1,\infty)-\{0\}; x=-1$ a.v.; $y=1$ a.o. la $+\infty$;

IX. 1) i)a) semicercul superior al cercului cu centrul în $O(0,0)$ și rază $R=3\left(x^2+y^2-9=0\right)$; b) semicercul inferior $(y\le 0)$ al cercului cu centrul în $O(0,0)$ și $R=5\left(x^2+y^2-25=0\right)$; c) semicercul drept, în raport cu Oy, din cercul cu centrul în $O(0,0)$ și $R=4\left(x^2+y^2-16=0\right)$.

ii) a) semi-elipsă situată în semiplanul superior $\left(\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{64}-1=0\right)$; iii) a) Porțiuni ale hiperbolei $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}-1=0$ situate în semiplanul inferior; iv) a) Parte a parabolei $y^2=9x$ situată în primul cadran; b) Parte a parabolei $y^2=-2x$, care se află în cadranul doi;

2. 1) $(-1)^2+(-2)^2-5=0$, adevărat; ecuația tangentei în M la cerc este $x(-1)+y(-2)-5=0$ sau $x+2y+5=0$; 2) $(3-1)^2+(-1-2)^2-13=0$, adevărat; $(t):(x-1)(3-1)+(y-2)(-1-2)-13=0$ sau $2x-3y-9=0$; 4) $\frac{9}{25}+\frac{64}{100}-1=0$, adevărat; $(t):\frac{3x}{25}+\frac{2y}{5}-1=0$; 7) $(-4)^2-8\cdot 2=0$, adevărat; $y(-4)-4(x+2)=0$ sau $x+y+2=0$;

2.a) $y=mx-1$, a.o.; $mx-y-1=0, \forall m\in\mathbb{R}\Rightarrow x=0, y=-1$; b) $f'(-2)=0\Rightarrow m=1$;

3. $m\in\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)\cup(1,\infty)$; 4. $a=2$; 5. $a=4$; 6. $m\in\{0,4\}$; 9. $a\le\frac{1}{2}$; 10. $a=-1, b=1$;

11. $a=1, b=\frac{3}{2}$; 14. $a=-\frac{1}{6}, b=3, c=8$; 15.a) $a=b=1, c=-2$; 16. $a=b=0, c=1$;

17. $a=c=-2, b=-3, d=1$; 18. $a=1, b=-1, c=-2, d=-3$;

Teste de evaluare.Testul 1. 1.a) Se aplică Lagrange funcției $g:[-2,1]\to\mathbb{R}, g(x)=x-x^3$;

2. $m\in\{0,4\}$; 3.a) $f(x)=\frac{1}{x}$ dacă $|x|<1, x\ne 0$; $f(x)=\frac{x^2+4}{x}$, dacă $|x|>1, f(1)=3$; $D=\mathbb{R}-\{-1,0\}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty; l_s(-1)=-5, l_d(-1)=-1$, $l_s(0)=-\infty, l_d(0)=\infty$, $l_s(1)=1, l_d(1)=5$. $x=0$, a.v., $y=x$. a.v.; 4.a) $D=(0,\infty)$; $x=0$ a.v. $y=0$ a.o. la $+\infty$; $(1,0)$ punct unghiular; $\left(e^2,\frac{2}{e}\right)$ punct de maxim. Testul 2. 1. $f'(-1)=0$ sau $f'(1)=0\Rightarrow a=-3$ sau $a=3$;

2a) $f'(x)=0$ radăcini reale dacă $\Delta_x>0$; b) $a=4,b=-5$; 4.a) Se trasează graficul pe $E_s=[0,\pi]-\left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$;

Testul 3. 1a) $y=-2x$ a.o. la $-\infty$; $y=0$ a.o. la $+\infty$; $(-1,1),(1,-1)$ puncte de întoarcere pentru grafic; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)$ punct de maxim; 3a) $a=2,b=4$; b) $D=\mathbb{R}-\{-2\}$; c) $y=x-4$ a.o., $x=-2$ a.v.; $(-5,-12)$ punct de maxim, $(1,0)$ punct de minim; 4.a) $D=\mathbb{R}-\left\{-2,\pm\frac{1}{2}\right\}$, $y=\ln 4$ a.o., $(0,-\ln 4)$ punct unghiular.

Capitolul 7. Teste de recapitulare finală

Testul 1. 1.a) $A^k=O,k\geq 3$; b) $B=-3A^2+6I_2;\det(B)=6^3$;

2.a) Inducție matematică; b) $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n+1}{2n+2}<1,a_n>0\Rightarrow a_{n+1}<a_n,\forall n\geq 1$; c) $(a_n)\searrow$, $a_n>0\Rightarrow(a_n)$ convergent. Utilizând a) și criteriul „cleștelui" rezultă $a_n\to 0$;

3. a) $(4,-2)$; b) $B(3,-3);D(2,4)$. Cercul de diametru $[OD]$ are centrul $C'(1,2)$ și rază $R'=\frac{OD}{2}=\sqrt{5};x-3y=0$; 4. $C_1+C_2+C_3+C_4,L_2-L_1,L_3-L_1,L_4-L_1$; $x_1=10,x_2=-2$, $x_{3,4}=\pm 2\sqrt{2}$; 5. I. b) 1^0) Inducție matematică; 2^0) $\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{2}{3};q=\frac{2}{3},y_0=\frac{1}{3}$; 3^0) $y_n\to 0$, $x_n=\frac{y_n-2}{y_n-1}\to 2$; d) $f(x)=4-\frac{6}{x+1};f^{(n)}(x)=6(-1)^{n+1}\frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$; II a) $-\frac{\sqrt{2}}{5}$; b) 4; c) $\frac{1}{2}$; d) e; Testul 2. 1. I. $\alpha=1,\beta=\frac{1}{2};(2-\lambda,2,\lambda),\lambda\in\mathbb{R}$; II $x=y=z\in\mathbb{R}$;

2. I. a) $a_n=n(n+1)(5n+2),b_n=n^2(n+1)$; b) $u_n=\frac{n(n+1)(15n^2+43n+26)}{12}$, $v_n=\frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{12}$; $\lim\frac{u_n}{v_n}=5$; II. a) 1; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{1}{2}$; 3. I. a) $A(4,0),B(0,2)$, $C(1,-1)$; 5; b) $P(3,0),Q(0,3),R(2,1)$; II. a) $(3,2),R=\sqrt{5}$; b) $x+2y-2=0$; c) Se ia $y=mx+n$ care trece prin B, adică $8m+n=7$, și se cere să aibă cu cercul un punct comun; 4. I. $G=\{I_2,A,A^2\}$; II. $XA=B\Rightarrow X=BA^{-1}(\det A\neq 0)$; 5. I. b) $(2,2)$;

c) 1^0) Se arată inductiv $x_0<x_{2n}<x_{2n+2}<2<x_{2n+3}<x_{2n+1}<x_1,\forall n\geq 1$; $\lim x_{2n}=l_1,\lim x_{2n+1}=l_2$ și se trece la limită în relația de recurență. Se obține sistemul $l_1=\sqrt{6-l_2},l_2=\sqrt{6-l_1}$ cu soluția $l_1=l_2=2$. Deci $\lim x_n=2$; d) $-\frac{1}{2}$; e) $a=\frac{2}{5},b=-\frac{4}{5}$, $c=-\frac{48}{5}$; II a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$; c)1;

Testul 3. 1. I. Sistem liniar omogen care pentru $m\neq\frac{5}{4}$ are numai soluția banală;

II. $a=3,b=-2$; III. $X=\begin{pmatrix}-1&2\\0&3\end{pmatrix},Y=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&0\end{pmatrix}$; 2. I. a) $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+2)+$ $+\ln(n+1)>0\Leftrightarrow e>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, adevărat deoarece șirul (e_n) cu $e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ este strict crescător și convergent la $e;b_{n+1}-b_n>0\Leftrightarrow e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$; b) $a_n-b_n=\ln\frac{n+1}{n}$ și se trece la limită; c) Inducție matematică; d) $\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}=(a_{2n}-a_n)+\ln\frac{2n+1}{n+1}\to\ln 2$;

II. a) $-\frac{3}{2}$; b) $-\frac{2}{\ln 3}$; 3. I. $C(5,-1),B(-3,5);(AB):2x+y+1=0,(BC):3x+4y-11=0$; $(AC):x+3y-2=0$; b) $x^2+y^2-8x-12y+2=0$; II. a) $b=\sqrt{7}$; b) $T\left(\frac{9}{4},\frac{7}{4}\right)$; 4.I. $x=\pm 1$; II. $\alpha=-1,\beta=-10$; Testul 4. 1. I. b) $A^n=I_3$, dacă $n=3k;A^n=A$, dacă $n=3k+1$; $A^n=A^2$ dacă $n=3k+2,k\in\mathbb{N}^*$; III. b) $x=-1,y=-2$; 2. II. a) $\sqrt{e}$;

b) $\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\geq\frac{n}{\sqrt{2n}}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\to\infty$; 3. I. $BC=AC=5$; b) $x+2y-3=0,x=\frac{1}{2}$; $\left(\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)$, $R=\frac{5\sqrt{5}}{4}$; II. a) $y^2=12x;x+y+6\sqrt{3}=0$; b) $R(6,0),S(3,3)$; 9; 4. b) $x=\alpha$, $y=2\alpha-8,z=-3\beta,t=\beta,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$; 5. a) $f'(x)<0$; b) $x\geq -3\Rightarrow f(x)\leq f(-3)=\sqrt{5}$; c) $[1,\infty)$; d) $-\frac{1}{2}$;

Testul 5. 1. I. a) $AB=BA=O_3$; b) $(A+B)^n$ cu binomul lui Newton și a) $\Rightarrow A^n+B^n$; II. $\det A\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow m\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup(2,\infty)$; III. $\Delta=-4m(m-1)(m-2)$; $(0,0,0)$ dacă $m\in\mathbb{R}-\{0,1,2\};(\alpha,\alpha,\alpha),\alpha\in\mathbb{R}$ dacă $m=0;\left(\frac{\alpha}{3},\frac{2\alpha}{3},\alpha\right),\alpha\in\mathbb{R}$ dacă $m=1;\left(\frac{\alpha}{9},\frac{4\alpha}{9},\alpha\right)$, $\alpha\in\mathbb{R}$ dacă $m=2$; 2. II. a) $\frac{n}{(2n)^2}\leq a_n\leq\frac{n}{(n+1)^2};0$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=e^{nx}-nex-1$ continuă și $f\left(\frac{1}{n}\right)f\left(\frac{2}{n}\right)<0\Rightarrow\exists x_n\in\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)$ cu $f(x_n)=0$. Deci $x_n\to 0$;

3. I. $2x-y+6=0,x-4y-4=0,2x-3y+2=0$; II. $(-4,3),\left(-\frac{4}{7},-\frac{3}{7}\right)$; 4. 30; 5. b) $\left(-\sqrt{3},-\sqrt{3}\right),\left(\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$; c) 1^0) $x_n\in\left[-1,\sqrt{3}\right),\forall n\geq 0,x_n<x_{n+1};\sqrt{3}$; 2^0) $y_1=\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}},q=\left(2-\sqrt{3}\right)^2,y_n\to 0,x_n\to\sqrt{3}$; e) $a=2,b=-1$.

CUPRINS

ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL ŞI SISTEME DE ECUAŢII LINIARE 3

0. PERMUTĂRI 5
1. MATRICE 21
2. DETERMINANŢI 74
3. SISTEME DE ECUAŢII LINIARE 121

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ 166

1. MULŢIMEA NUMERELOR REALE 168
2. ŞIRURI 206
3. LIMITE DE FUNCŢII 287
4. FUNCŢII CONTINUE 342
5. FUNCŢII DERIVABILE 387
6. REPREZENTAREA GRAFICĂ A FUNCŢIILOR 527
7. TESTE DE RECAPITULARE FINALĂ 557
8. INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI 564

Tiparul executat la ***S.C. LUMINA TIPO s.r.l.***
str. Luigi Galvani nr. 20 bis, sect. 2, Bucureşti
tel./fax 211.32.60; tel. 212.29.27
E-mail: **office@luminatipo.com**
www.luminatipo.com